# 目　　录

# 引言　指数函数

在数学中这是个最重要的函数. 它是用公式来定义的，对每个复数 $z$，规定

$$\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

级数(1)对每个 $z$ 绝对收敛，对复平面的每个有界子集一致收敛. 因此, exp 是连续函数. (1)的绝对收敛指出了算式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b^m}{m!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^kb^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}$$

是正确的. 它给出了重要的加法公式

$$\exp(a)\exp(b)=\exp(a+b) \tag{2}$$

此公式对所有复数 $a$ 和 $b$ 是正确的.

我们规定数 $e$ 是 exp(1), 习惯上常用较短的表达式 $e^z$ 代替 $\exp(z)$. 注意, 由(1)可得

$$e^0=\exp(0)=1$$

**定理**

($a$) 对每一个复数 $z$, $e^z\neq0$.

($b$) exp 的导数是它自己: $\exp'(z)=\exp(z)$.

($c$) exp 限制在实轴上是单调增加的正函数, 且当 $x\to\infty$ 时, $e^x\to\infty$; 当 $x\to-\infty$ 时, $e^x\to0$.

($d$) 存在一个正数 $\pi$ 使得 $e^{\pi i/2}=i$, 并使得 $e^z=1$ 当且仅当

$z/(2\pi i)$是整数时才成立.

(e) exp 是周期函数，其周期是 $2\pi i$.

(f) 映射 $t \to e^{it}$ 将实轴映到单位圆周上.

(g) 若 $w$ 是复数且 $w \neq 0$，则存在某些 $z$，使 $w = e^z$.

**证明** 由(2)，$e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$. 由此得到(a). 其次

$$\exp'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h}$$

$$= \exp(z) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}$$

$$= \exp(z)$$

在上述等式中，第一个是定义，第二个从(2)得到，而第三个从(1)得到，因此证明了(b).

由于(1)，显然 exp 在正实轴上是单调增加的，而且当 $x \to \infty$ 时，$e^x \to \infty$. (c)的另一个断言是 $e^x \cdot e^{-x} = 1$ 的结果.

对于任何实数 $t$，(1)表示 $e^{-it}$ 是 $e^{it}$ 的共轭复数. 因此

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1$$

或

(3) $$|e^{it}| = 1 \quad (t \text{ 是实数})$$

换句话说，若 $t$ 为实数，则 $e^{it}$ 位于单位圆周上. 我们定义 $\cos t$，$\sin t$ 为 $e^{it}$ 的实部和虚部:

(4) $$\cos t = \mathrm{Re}[e^{it}], \quad \sin t = \mathrm{Im}[e^{it}] \quad (t \text{ 是实数})$$

若对等价于(4)的 Euler 恒等式

(5) $$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

两边微分，并且应用(b)，则得

$$\cos' t + i \sin' t = i e^{it} = -\sin t + i \cos t$$

于是

(6) $$\cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos$$

幂级数(1)给出表示式

(7) $$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots$$

取$t=2$，则级数(7)的各项按绝对值减少(除首项外)，而且它们的符号是交错的，因此 $\cos 2$ 小于级数(7)的前三项之和；于是$\cos 2<-\frac{1}{3}$．由于$\cos 0=1$ 且 cos 是实轴上的实连续函数，故可断定存在一个最小的正数$t_0$使得

$\cos t_0=0$．我们定义

(8) $$\pi=2t_0$$

从(3)及(5)得到 $\sin t_0=\pm 1$．由于在开区间$(0, t_0)$上

$$\sin' t=\cos t>0$$

和 $\sin 0=0$，故有 $\sin t_0>0$，因此 $\sin t_0=1$，而且

(9) $$e^{\pi i/2}=i$$

由此可见，$e^{\pi i}=i^2=-1$，$e^{2\pi i}=(-1)^2=1$，且对每个正整数$n$，$e^{2\pi in}=1$．同样立即得到(e)：

(10) $$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z$$

若 $z=x+iy$，$x$ 和 $y$ 为实数，则 $e^z=e^x e^{iy}$；因此$|e^z|=e^x$．若 $e^z=1$，则必须有 $e^x=1$，从而 $x=0$；根据(10)，为了证明 $y/2\pi$一定是整数，只要证明当 $0<y<2\pi$时，$e^{iy}\neq 1$就足够了．

设$0<y<2\pi$，且

(11) $$e^{iy/4}=u+iv\text{（}u \text{ 和 } v \text{ 是实数）}$$

由于$0<y/4<\pi/2$，故有 $u>0, v>0$．同样

(12) $$e^{iy}=(u+iv)^4=u^4-6u^2v^2+v^4+4iuv(u^2-v^2)$$

仅当 $u^2=v^2$时，(12)的右边才是实数；由于 $u^2+v^2=1$仅当 $u^2=v^2=\frac{1}{2}$时才成立，因此(12)表示出

$$e^{iy}=-1\neq 1$$

这就证明了$(d)$.

我们已经知道，$t\to e^{it}$ 将实轴映入单位圆周内. 为了证明$(f)$，现固定 $w$ 使得 $|w|=1$；我们将要证明，对于某些实数 $t$ 有 $w=e^{it}$. 记 $w=u+iv$，$u$ 和 $v$ 为实数，而且首先假定 $u\geqslant 0$ 及 $v\geqslant 0$. 由于 $u\leqslant 1$，则 $\pi$ 的定义表明存在一个 $t$，$0\leqslant t\leqslant \pi/2$，使得 $\cos t=u$；因而 $\sin^2 t=1-u^2=v^2$，又由于当 $0\leqslant t\leqslant\pi/2$ 时有 $\sin t\geqslant 0$，故 $\sin t=v$. 因此 $w=e^{it}$.

若 $u<0$ 及 $v\geqslant 0$，则 $-iw$ 满足上述的条件. 因此，对于某些实数 $t$ 有 $-iw=e^{it}$，而且 $w=e^{i(t+\pi/2)}$. 最后，若 $v<0$，则上述两种情况证明了，对于某些实数 $t$ 有 $-w=e^{it}$，因此 $w=e^{i(t+\pi)}$. 这就证明了$(f)$.

若 $w\neq 0$，令 $\alpha=w/|w|$，因而 $w=|w|\alpha$. 根据$(c)$，有一个实数 $x$ 使得 $|w|=e^x$. 由于 $|\alpha|=1$，则$(f)$证明了，对于某些实数 $y$ 有 $\alpha=e^{iy}$. 因此 $w=e^{x+iy}$. 这就证明了$(g)$，且完成了本定理的证明.

我们将遇到 $(1+x^2)^{-1}$ 在实直线上的积分. 为了求它的值，在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 内，令 $\varphi(t)=\sin t/\cos t$. 根据(6)有 $\varphi'=1+\varphi^2$. 因此，$\varphi$ 是一个 $(-\pi/2,\ \pi/2)$ 到 $(-\infty,\ \infty)$ 上的单调增加的映射，而且得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\varphi'(t)dt}{1+\varphi^2(t)}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}dt=\pi$$

# 第一章 抽象积分

大约十九世纪末，许多数学家才搞清楚，Riemann 积分(微积分学教程中学习的内容之一)应当由另外一种类型更广泛、更灵活、更适合于处理极限过程的积分来代替. 在这方面所作努力之中，最著名的有 Jordan, Borel, W. H. Young 及 Lebesgue, 而Lebesgue 的结构终于是最成功的.

简要说来，其主要的思想是：函数$f$在闭区间$[a,b]$上的Riemann 积分能够用和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)m(E_i)$$

逼近，其中$E_1,\cdots,E_n$为不相交的闭区间，它们的并为$[a,b]$，$m(E_i)$表示$E_i$的长度，而 $t_i\in E_i(i=1,2,\cdots,n)$. Lebesgue 发现，当上面和式中的集$E_i$属于直线上较大的一类子集，即所谓“可测集”，而且把所考虑的函数类扩大到所谓“可测函数”时，可以得出一种完全令人满意的积分理论. 涉及到决定性的集论的性质如下：任何可数个可测集族的并和交是可测的；每一个可测集的余集也是可测的；而且，最重要的是“长度”的概念(现称为“测度”)可按这样的方法推广：对于两两不相交的可测集的每一个可数集族$\{E_i\}$，都有

$$m(E_1\cup E_2\cup E_3\cup\cdots)=m(E_1)+m(E_2)+m(E_3)+\cdots$$

$m$的这个性质称为可数可加性.

从 Riemann 积分理论过渡到 Lebesgue积分理论是一个完备化的过程(其意义以后将更加精确地叙述). 它在分析上如同从有

理数系构造实数系那样有同样根本的重要性。

上面提到的测度$m$当然与实直线的几何性质是密切相关的。在本章中，将介绍关于在任意集上任何可数可加测度的 Lebesgue 积分的一种抽象的（公理化的）叙述（精确定义见后）。这个抽象理论无论从那方面看都不比实直线上的特殊情形更困难；它说明，积分理论中的大部分与基础空间的任何几何（或拓扑）是无关的；而且，它当然也向我们提供了一个广泛有用的工具。我们将在第二章中证实包括 Lebesgue 测度在内的一大类测度的存在。

## 集论的记号和术语

**1.1** 某些集能用列出它们的元素来描述，例如$\{x_1, \cdots, x_n\}$是元素为$x_1, \cdots, x_n$的集；而$\{x\}$是仅有一个元素$x$的集。更为常见的是用性质来描述集合。对于具有性质$P$的所有元素$x$的集记为

$$\{x: P\}$$

符号$\varnothing$表示空集。族及类这些词在使用时与集是同义的。

若$x$为集$A$的元素，记$x\in A$；否则$x\notin A$。若$B$是$A$的子集，即若$x\in B$蕴涵着$x\in A$，就记$B\subset A$。若$B\subset A$且$A\subset B$，则$A=B$。若$B\subset A$且$A\neq B$，则$B$是$A$的真子集。注意，对于每一个集$A$有$\varnothing\subset A$。

$A\cup B$及$A\cap B$分别为$A$与$B$的并及交。若$\{A_\alpha\}$是集族，其中$\alpha$遍取某个指标集$I$，则$\{A_\alpha\}$的并及交记作

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \quad 及 \quad \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$$

即：

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x: x\in A_\alpha \text{ 对至少一个} \alpha\in I\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x: x\in A_\alpha \text{ 对每一个 } \alpha\in I\}$$

若 $I$ 是所有正整数的集，习惯的记号是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ 及 } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

若$\{A_\alpha\}$的任何两个集没有公共元素，则$\{A_\alpha\}$是一个不相交的集族.

记 $A-B=\{x: x\in A, x\notin B\}$. 当从上下文能清楚地知道是对哪一个比较大的集取余集时，$A$ 的余集就用$A^c$来表示.

集 $A_1, \cdots, A_n$ 的笛卡儿乘积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$是全部$n$ 元序组$(a_1, \cdots, a_n)$的集，其中 $a_i\in A_i$, $i=1, \cdots, n$.

实直线(或实数系)记作 $R^1$，且

$$R^k=R^1\times\cdots\times R^1 \quad (k\text{ 个因子})$$

广义实数系是$R^1$加上两个符号$\infty$及$-\infty$，并且具有明显的顺序. 若$-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty$，则闭区间$[a, b]$及开区间$(a, b)$定义为

$$[a, b]=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}, \quad (a, b)=\{x: a<x<b\}$$

同样，记

$$[a, b)=\{x: a\leqslant x<b\}, \quad (a, b]=\{x: a<x\leqslant b\}$$

若$E\subset[-\infty, \infty]$且 $E\neq\varnothing$，则在$[-\infty, \infty]$内，$E$ 的最小上界(上确界)及最大下界(下确界)存在，并记为$\sup E$ 及 $\inf E$.

有时(仅当$\sup E\in E$ 时)把$\sup E$ 记作 $\max E$.

记号

$$f: X\to Y$$

意味着 $f$ 是集$X$到集$Y$内的一个函数(或映射，或变换)；即对每个$x\in X$，$f$ 确定一个元素$f(x)\in Y$. 若$A\subset X$及 $B\subset Y$，则$A$的象及$B$的逆象(或原象)是

$$f(A)=\{y: y=f(x)\text{对某个}x\in A\}$$

$$f^{-1}(B)=\{x: f(x)\in B\}$$

要注意，虽然 $B\neq\varnothing$，但 $f^{-1}(B)$可能是空的.

$f$ 的定义域是 $X$，$f$ 的值域是 $f(X)$.

若 $f(X)=Y$，称 $f$ 把 $X$ 映射到 $Y$ 上.

对每一个 $y\in Y$，用 $f^{-1}(y)$ 代替 $f^{-1}(\{y\})$. 对每个 $y\in Y$，若 $f^{-1}(y)$ 至多由一点组成，则 $f$ 称为一、一的. 若 $f$ 是一、一的，则 $f^{-1}$ 是一个函数，其定义域是 $f(X)$，而值域是 $X$.

若 $f:X\to[-\infty,\infty]$ 且 $E\subset X$，则习惯上记作 $\sup_{x\in E}f(x)$ 而不是 $\sup f(E)$.

若 $f:X\to Y$ 及 $g:Y\to Z$，则复合函数 $g\circ f:X\to Z$ 用公式

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))\quad(x\in X)$$

定义.

## 可测性概念

可测函数类在积分理论中起着基础的作用. 它与另一最重要的函数类，即连续函数类有些共同的基本性质. 记住这些相似的地方是有益的. 因此，我们的表述是按这样一种方式组织的，即特别强调拓扑空间、开集和连续函数这些概念与可测空间、可测集和可测函数等另一些概念之间的类似性. 看来，当这种处理方式十分抽象时，这些概念之间的关系就显得最清楚不过了. 正是这一点(而不只是为了追求一般性)，促使我们来探讨这个课题.

**1.2 定义**

(a) 集 $X$ 的子集族 $\tau$ 称为 $X$ 上的一个拓扑，若 $\tau$ 具有如下三个性质:

(i) $\varnothing\in\tau$ 及 $X\in\tau$.

(ii) 若 $V_i\in\tau$，$i=1,\cdots,n$，则 $V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n\in\tau$.

(iii) 若 $\{V_\alpha\}$ 是 $\tau$ 的元素的任何集族(有限，可数或不可数)，则 $\bigcup_\alpha V_\alpha\in\tau$.

(*b*) 若 $\tau$ 是 $X$ 上的拓扑，则 $X$ 称为拓扑空间，且 $\tau$ 的元素称为 $X$ 的开集.

(*c*) 若 $X$ 和 $Y$ 为拓扑空间，且 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 内的映射，若对 $Y$ 的每一个开集 $V$，$f^{-1}(V)$ 是 $X$ 的开集，则称 $f$ 为连续的.

**1.3 定义**

(*a*) 集 $X$ 的子集族 $\mathfrak{M}$ 称为 $X$ 的一个 $\sigma$-代数，若 $\mathfrak{M}$ 具有如下性质：

(i) $X\in\mathfrak{M}$.

(ii) 若 $A\in\mathfrak{M}$，则 $A^c\in\mathfrak{M}$，其中 $A^c$ 是 $A$ 关于 $X$ 的余集.

(iii) 若 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 且 $A_n\in\mathfrak{M}$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $A\in\mathfrak{M}$.

(*b*) 若 $\mathfrak{M}$ 是 $X$ 的 $\sigma$-代数，则 $X$ 称为可测空间，且 $\mathfrak{M}$ 的元素称为 $X$ 的可测集.

(*c*) 若 $X$ 是可测空间，$Y$ 是拓扑空间，而 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 内的映射，若对 $Y$ 的每一个开集 $V$，$f^{-1}(V)$ 是 $X$ 的可测集，则 $f$ 称为可测的.

把术语"可测空间"应用到序对 $(X, \mathfrak{M})$ 而不是 $X$ 上也许更合适些. 毕竟 $X$ 是一个集，并且 $X$ 也不会由于我们心目中同时有一个由其子集构成的 $\sigma$-代数而有任何形式的改变. 类似地，一个拓扑空间是一个序对 $(X, \tau)$. 但如果这类事情在全部数学内有系统地去做的话，则术语就会变得非常不方便. 我们将于 1.21 节中在一些较大的范围内再讨论这个问题.

**1.4 关于定义1.2的注释** 最熟悉的拓扑空间是度量空间. 我们假定对度量空间已有所了解，但为了完整起见，还是给出基本的定义.

度量空间是一个集 $X$，在此集中定义了一个具有如下性质的距离函数(或度量) $\rho$：

(*a*) 对所有 $x,y\in X$，$0\leqslant\rho(x,y)<\infty$.

(b) 当且仅当 $x=y$ 时，$\rho(x,y)=0$.

(c) 对所有 $x,y\in X$, $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

(d) 对所有 $x,y,z\in X$, $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

性质(d)称为三角不等式.

若 $x\in X$ 且 $r\geqslant 0$，则以 $x$ 为中心，$r$ 为半径的开球是指集 $\{y\in X: \rho(x,y)<r\}$.

若 $X$ 是度量空间，且 $\tau$ 是所有集 $E\subset X$ 的集族，$E$ 是开球的任意并，则 $\tau$ 是 $X$ 内的拓扑. 不难证明，交的性质依赖于这样的事实：若 $x\in B_1\cap B_2$ 其中 $B_1$ 及 $B_2$ 为开球，则 $x$ 是一个开球 $B\subset B_1\cap B_2$ 的中心. 我们把它留作练习.

例如，在实直线 $R^1$ 上，当且仅当一个集是一些开区间 $(a,b)$ 的并时，该集是开集. 在平面 $R^2$ 上，开集是开圆盘的并.

我们将常常碰到的另一拓扑空间是扩充了的实直线 $[-\infty,\infty]$；它的拓扑是通过规定如下的集为开集来定义的，即规定 $(a,b)$, $[-\infty,a)$, $(a,\infty]$ 以及这种类型开区间的任何并为开集.

在 1.2 节定义(c)中给出的连续性定义是对整体而言的. 通常需要定义局部的连续性，即若对 $f(x_0)$ 的每一个邻域 $V$，对应有 $x_0$ 的一个邻域 $W$，使得 $f(W)\subset V$，则称 $X$ 到 $Y$ 内的映射 $f$ 在点 $x_0\in X$ 连续.

(根据定义，点 $x$ 的邻域是一个包含点 $x$ 的开集.)

对于度量空间，此局部性定义当然与习惯上的 $\varepsilon$-$\delta$ 定义是相同的.

下面的简易命题将这两个连续性定义按预期的方式联系起来了.

**1.5 命题** 设 $X$ 和 $Y$ 是拓扑空间，$f$ 是 $X$ 到 $Y$ 内的映射. 当且仅当 $f$ 在 $X$ 的每一点连续时，映射 $f$ 是连续的.

**证明** 若 $f$ 连续且 $x_0\in X$，则对 $f(x_0)$ 的每一个邻域 $V$，$f^{-1}(V)$

是 $x_0$ 的一个邻域. 因为 $f(f^{-1}(V))\subset V$,故 $f$ 在 $x_0$ 连续.

若 $f$ 在 $X$ 的每一点连续,且 $V$ 是 $Y$ 的开集,则每一点 $x\in f^{-1}(V)$ 有一个邻域 $W_x$,使得 $f(W_x)\subset V$. 因此 $W_x\subset f^{-1}(V)$. 由此可见 $f^{-1}(V)$ 是开集 $W_x$ 的并,所以 $f^{-1}(V)$ 本身是开集,因而 $f$ 是连续的.

**1.6 关于定义 1.3 的注释** 设 $\mathfrak{M}$ 是集 $X$ 内的 $\sigma$-代数,由定义 1.3的性质(i)至(iii)立即得出如下事实.

($a$) 由于 $\varnothing=X^c$,故(i)和(ii)蕴涵着 $\varnothing\in\mathfrak{M}$.

($b$) 在(iii)中取 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$, 我们看出,若 $A_i\in\mathfrak{M}$, $i=1,\cdots,n$. 则 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\in\mathfrak{M}$.

($c$) 由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$$

故 $\mathfrak{M}$ 对可数交(同时对有限交)是封闭的.

($d$) 由于 $A-B=B^c\cap A$,若 $A\in\mathfrak{M}$ 及 $B\in\mathfrak{M}$, 就有 $A-B\in\mathfrak{M}$.

前缀 $\sigma$ 是考虑到这样的事实: (iii)要求对于 $\mathfrak{M}$ 的元的所有可数并成立. 若(iii)只要求对有限并成立,则 $\mathfrak{M}$ 称为集的代数.

**1.7 定理** 设 $Y$ 和 $Z$ 为拓扑空间,且 $g: Y\to Z$ 是连续的.

($a$) 若 $X$ 是拓扑空间,$f: X\to Y$ 是连续的,且 $h=g\circ f$,则 $h: X\to Z$ 是连续的.

($b$) 若 $X$ 是可测空间,$f: X\to Y$ 是可测的, 且 $h=g\circ f$, 则 $h: X\to Z$ 是可测的.

简言之,连续函数的连续函数是连续的;可测函数的连续函数是可测的.

**证明** 若 $V$ 是 $Z$ 内的开集,则 $g^{-1}(V)$ 是 $Y$ 内的开集,且

$$h^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))$$

若 $f$ 是连续的,则 $h^{-1}(V)$ 是开集,因而证明了($a$).

若 $f$ 是可测的，则 $h^{-1}(V)$ 是可测的，因而证明了(b).

**1.8 定理** 设 $u$ 和 $v$ 是可测空间 $X$ 上的实可测函数，设 $\Phi$ 是平面到拓扑空间 $Y$ 内的连续映射，且对 $x\in X$ 定义

$$h(x)=\Phi(u(x),v(x))$$

则 $h: X\to Y$ 是可测的.

**证明** 令 $f(x)=(u(x),v(x))$，则 $f$ 将 $X$ 映射到平面内. 由于 $h=\Phi\cdot f$，定理 1.7 指出，只要证明 $f$ 的可测性就足够了.

若 $R$ 是平面上任一个其边平行于坐标轴的开长方形，则 $R$ 是两个开区间 $I_1$ 及 $I_2$ 的笛卡儿乘积，并根据关于 $u$ 和 $v$ 的假设，

$$f^{-1}(R)=u^{-1}(I_1)\cap v^{-1}(I_2)$$

是可测的. 在平面上的每一个开集 $V$ 是这样的长方形 $R_i$ 的可数并，且由于

$$f^{-1}(V)=f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(R_i)$$

因此，$f^{-1}(V)$ 是可测的.

**1.9** 设 $X$ 是可测空间. 下面的命题是定理1.7和1.8的推论:

(a) 若 $u$ 和 $v$ 是 $X$ 上的实可测函数，$f=u+iv$，则 $f$ 为 $X$ 上的复可测函数.

这个结论由定理1.8，令 $\Phi(z)=z$ 得出.

(b) 若 $f=u+iv$ 是 $X$ 上的复可测函数，则 $u,v$，及 $|f|$ 都是 $X$ 上的实可测函数.

这个结论由定理1.7，令 $g(z)=\mathrm{Re}(z),\mathrm{In}(z)$，及 $|z|$ 得出.

(c) 若 $f$ 及 $g$ 是 $X$ 上的复可测函数，则 $f+g$，及 $fg$ 亦然.

对实的 $f,g$，由定理 1.8，令

$$\Phi(s,t)=s+t$$

和 $\Phi(s,t)=st$ 得出. 对复的情形即由(a)及(b)得出.

(d) 若 $E$ 是 $X$ 内的可测集，且

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\in E\\ 0 & 当\ x\notin E\end{cases}$$

则 $\chi_E$ 是可测函数.

这是明显的. 我们称 $\chi_E$ 为集 $E$ 的特征函数. 整个书中，字母 $\chi$ 将专用于表示特征函数.

(e) 若 $f$ 为 $X$ 上的复可测函数，则存在 $X$ 上的复可测函数 $\alpha$，使得 $|\alpha|=1$，且 $f=\alpha|f|$.

**证明** 令 $E=\{x:f(x)=0\}$，$Y$ 为除去原点的复平面. 对 $z\in Y$，定义 $\varphi(z)=z/|z|$，且令

$$\alpha(x)=\varphi(f(x)+\chi_E(x)) \qquad (x\in X)$$

若 $x\in E$，$\alpha(x)=1$；若 $x\notin E$，$\alpha(x)=f(x)/|f(x)|$. 由 $\varphi$ 在 $Y$ 上连续且 $E$ 可测(为什么?)，$\alpha$ 的可测性由(c)，(d)及定理1.7得出.

现在指出存在大量的 $\sigma$-代数.

**1.10 定理** 若 $\mathscr{F}$ 为 $X$ 的任意子集族，则在 $X$ 内存在一最小的 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}^*$，使得 $\mathscr{F}\subset\mathfrak{M}^*$.

$\mathfrak{M}^*$ 有时称为由 $\mathscr{F}$ 生成的 $\sigma$-代数.

**证明** 令 $\Omega$ 为 $X$ 内所有包含 $\mathscr{F}$ 的 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 的族. 因为 $X$ 的全体子集的集族是具有这种性质的 $\sigma$-代数，故 $\Omega$ 非空. 设 $\mathfrak{M}^*$ 为所有 $\mathfrak{M}\in\Omega$ 的交. 显然，$\mathscr{F}\subset\mathfrak{M}^*$，且 $\mathfrak{M}^*$ 含于每一个包含 $\mathscr{F}$ 的 $\sigma$-代数中. 为完成此证明，必须证明 $\mathfrak{M}^*$ 本身是 $\sigma$-代数.

如果对 $n=1,2,3,\cdots$，$A_n\in\mathfrak{M}^*$，且如果 $\mathfrak{M}\in\Omega$，则 $A_n\in\mathfrak{M}$，因为 $\mathfrak{M}$ 是 $\sigma$-代数，所以 $\bigcup A_n\in\mathfrak{M}$. 因为对每一个 $\mathfrak{M}\in\Omega$，有 $\bigcup A_n\in\mathfrak{M}$，故得出 $\bigcup A_n\in\mathfrak{M}^*$. $\sigma$-代数定义的其余两个性质可用同样方法验证.

**1.11 Borel 集** 设 $X$ 为拓扑空间. 由定理1.10，在 $X$ 内存在一个最小的 $\sigma$-代数 $\mathscr{B}$，使得 $X$ 内每一个开集都属于 $\mathscr{B}$. 称 $\mathscr{B}$ 的元素为 $X$ 的Borel 集.

特别，闭集是 Borel 集(由定义，它是开集的余集)，且闭集的一切可数并及开集的一切可数交都是 Borel 集. 后两者分别称为 $F_\sigma$ 集及 $G_\delta$ 集，并且起着重要的作用. 这符号来源于Hausdorff. 字母 $F$ 及 $G$ 分别用于闭集及开集，而 $\sigma$ 用于并(Summe). $\delta$ 用于交(Durchschnitt). 例如每个半开区间 $[a, b)$ 是 $R^1$ 内的一个 $G_\delta$ 集和一个 $F_\sigma$ 集.

因为 $\mathscr{B}$ 是 $\sigma$-代数，我们现在可以把 $X$ 看作一个可测空间，而 Borel 集则起着可测集的作用. 更简洁地，考虑可测空间 $(X, \mathscr{B})$. 若 $f: X \to Y$ 是 $X$ 的连续映射，其中 $Y$ 为任意拓扑空间. 由定义，显然对 $Y$ 内每个开集 $V$, $f^{-1}(V) \in \mathscr{B}$. 换句话说，$X$ 的每个连续映射是 Borel 可测的.

Borel 可测映射通常称为 Borel 映射，或 Borel 函数.

**1.12 定理** 假设 $\mathfrak{M}$ 是 $X$ 内的 $\sigma$-代数，$Y$ 为拓扑空间，$f$ 映 $X$ 到 $Y$ 内：

($a$) 如果 $\Omega$ 为所有集 $E \subset Y$ 使得 $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$ 的集族，则 $\Omega$ 为 $Y$ 内的 $\sigma$-代数.

($b$) 如果 $f$ 可测且 $E$ 为 $Y$ 的 Borel 集，则 $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$.

($c$) 如果 $Y = [-\infty, \infty]$，且对每一个实数 $\alpha$, $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathfrak{M}$，则 $f$ 可测.

($d$) 如果 $f$ 可测，$Z$ 为拓扑空间，$g: Y \to Z$ 为 Borel 映射，且如果 $h = g \circ f$，则 $h: X \to Z$ 可测.

($c$) 常用来作为实值函数可测性的判别准则(见习题3). 注意，($d$) 推广了定理1.7($b$).

**证明** 从关系式

$$f^{-1}(Y) = X$$

$$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$$

和
$$f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \cdots$$

可得出$(a)$.

现在证明$(b)$，设$\Omega$如$(a)$所规定；$f$的可测性蕴涵着$\Omega$包含$Y$内所有开集，且因$\Omega$为$\sigma$-代数，$\Omega$包含$Y$内所有Borel集.

现在证明$(c)$，令$\Omega$为所有$E\subset[-\infty,+\infty]$，使得$f^{-1}(E)\in\mathfrak{M}$的集族. 选取一实数$\alpha$，并选取$\alpha_n<\alpha$使得当$n\to\infty$时，$\alpha_n\to\alpha$. 因为对于每个$n$，$(\alpha_n,\infty]\in\Omega$，由于

$$[-\infty,\alpha)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[-\infty,\ \alpha_n]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\infty]^c$$

而$(a)$已证明了$\Omega$为$\sigma$-代数，看出$[-\infty,\alpha)\in\Omega$. 而

$$(\alpha,\beta)=[-\infty,\beta)\cap(\alpha,\infty]$$

也有相同的结论. 因为$[-\infty,\ \infty]$内的每个开集都是可数个上述类型开区间的并，故$\Omega$包含每一个开集，于是$f$可测.

现在证明$(d)$，令$V\subset Z$为开集. 则$g^{-1}(V)$为$Y$的Borel集，且因

$$h^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))$$

$(b)$指出$h^{-1}(V)\in\mathfrak{M}$.

**1.13 定义** 设$\{a_n\}$为$[-\infty,\infty]$内的一个序列，令

$$b_k=\sup\{a_k,a_{k+1},a_{k+2},\cdots\}\quad(k=1,2,3,\cdots)\tag{1}$$

且

$$\beta=\inf\{b_1,b_2,b_3,\cdots\}\tag{2}$$

我们称$\beta$为$\{a_n\}$的上极限，记作

$$\beta=\limsup_{n\to\infty}a_n\tag{3}$$

容易验证下列性质：首先，$b_1\geq b_2\geq b_3\geq\cdots$，所以当$k\to\infty$时，$b_k\to\beta$；其次，存在$\{a_n\}$的子序列$\{a_{n_i}\}$使得当$i\to\infty$时，$a_{n_i}\to\beta$，且$\beta$为具有此性质的最大数.

类似地定义下极限：简单交换(1)及(2)中的sup及inf. 注意

(4) $\lim_{n\to\infty}\inf a_n = -\lim_{n\to\infty}\sup(-a_n)$

如果$\{a_n\}$收敛，则显然有

(5) $\lim_{n\to\infty}\sup a_n = \lim_{n\to\infty}\inf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

设$\{f_n\}$为集$X$上广义实数的函数的序列，则用

(6) $(\sup_n f_n)(x) = \sup_n(f_n(x))$

(7) $(\lim_{n\to\infty}\sup f_n)(x) = \lim_{n\to\infty}\sup(f_n(x))$

来定义在$X$上的函数$\sup_n f_n$及$\lim_{n\to\infty}\sup f_n$.

如果

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{8}$$

在每一点$x\in X$此极限都假设存在，则称$f$为叙列$\{f_n\}$的点态极限.

**1.14 定理** 如果对$n=1,2,3,\cdots$, $f_n: X\to[-\infty,\infty]$是可测的，且

$$g = \sup_{n\geq 1} f_n,\quad h = \lim_{n\to\infty}\sup f_n$$

则$g$及$h$是可测的.

**证明** $g^{-1}((\alpha,\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$. 因此由定理1.12$(c)$推出$g$可测. 当然，以inf代替sup，同样的结论仍然成立.

因为

$$h = \inf_{k\geq 1}\{\sup_{i\geq k} f_i\}$$

由此得出$h$可测.

**系**

$(a)$ 每个点态收敛的复可测函数序列的极限是可测的.

$(b)$ 如果$f$及$g$可测（值域在$[-\infty,+\infty]$内），则$\max\{f,g\}$

及$\min\{f,g\}$也可测. 特别,函数

$f^+=\max\{f,0\}$及 $f^-=-\min\{f,0\}$是可测的.

**1.15** 上述函数$f^+$及$f^-$称为$f$的正部和负部. 我们有$|f|=f^++f^-$和$f=f^+-f^-$,而后者是一种将$f$表为具有某种极小性质的,两个非负函数之差的典型形式:

**命题** 若$f=g-h$, $g\geqslant 0$及$h\geqslant 0$,则$f^+\leqslant g$且$f^-\leqslant h$.

**证明** 由$f\leqslant g$及$0\leqslant g$,显然有$\max\{f,0\}\leqslant g$.

## 简单函数

**1.16 定义** 在可测空间$X$上, 值域仅由$[0,\infty)$内有限个点组成的函数$s$称为简单函数.

(有时称具有有限值域的任意函数为简单函数是方便的,然而我们主要感兴趣的还是上述情况. 注意, 我们从简单函数的值中明显地排除了$\infty$.)

如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为简单函数$s$不同的值, 且令$A_i=\{x:s(x)=\alpha_i\}$, 显然

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$$

在这里$\chi_{A_i}$按照1.9(*d*)所定义,是$A_i$的特征函数.

同样显然的是,当且仅当每个$A_i$可测时, $s$是可测的.

**1.17 定理** 设$f:X\to[0,\infty]$可测. 则存在$X$上的简单可测函数$s_n$使得

(*a*) $0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant f$.

(*b*) 对每个$x\in X$, 当$n\to\infty$, $s_n(x)\to f(x)$.

**证明** 对$n=1,2,3,\cdots$,及$1\leqslant i\leqslant n2^n$,定义

$$E_{n,i}=f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right)\right)\text{及 } F_n=f^{-1}([n,\infty]) \tag{1}$$

并且令

$$s_n=\sum_{i=1}^{n2^n}\frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}}+n\chi_{F_n} \tag{2}$$

定理 1.12(*b*)指出 $E_{n,i}$ 及 $F_n$ 均为可测集. 容易看出函数(2)满足(*a*). 若 $x$ 使得 $f(x)<\infty$，则当 $n$ 足够大时，$s_n\geq f(x)-2^{-n}$；若 $f(x)=\infty$，则 $s_n(x)=n$；这样就证明了(*b*).

应该看到，若 $f$ 有界，上述构造将给出一个一致收敛的序列 $\{s_n\}$.

## 测度的初等性质

**1.18 定义**

(*a*) 正测度为一定义在$\sigma$-代数$\mathfrak{M}$上的函数$\mu$，其值域在$[0,\infty]$内，并且是可数可加的. 即若$\{A_i\}$为 $\mathfrak{M}$ 中互不相交的可数集族，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \tag{1}$$

为避免麻烦，我们假设至少对一个 $A\in\mathfrak{M}$，$\mu(A)<\infty$.

(*b*) 测度空间是一个可测空间具有定义在其可测集的$\sigma$-代数上的正测度.

(*c*) 复测度是定义在一个 $\sigma$-代数上的复值可数可加函数.

注：我们称作正测度的正好是通常的测度，为了强调起见我们才加上个“正”字. 若对每个 $E\in\mathfrak{M}$，$\mu(E)=0$，根据我们的定义，$\mu$ 还是正测度. 对正测度取$\infty$值是允许的，但当我们讲到复测度 $\mu$ 时，对每个$E\in\mathfrak{M}$，$\mu(E)$要理解为复数. 当然，实测度构成了复测度的一个子类.

**1.19 定理** 设$\mu$ 为 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 上的正测度. 则

($a$) $\mu(\varnothing)=0$.

($b$) 如果 $A_1,\cdots,A_n$ 均为$\mathfrak{M}$的两两不相交的元素，则

$$\mu(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\mu(A_1)+\cdots+\mu(A_n)$$

($c$) 如果 $A\in\mathfrak{M}, B\in\mathfrak{M}$，则 $A\subset B$ 蕴涵着$\mu(A)\leqslant\mu(B)$.

($d$) 如果 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n, A_n\in\mathfrak{M}$，且

$$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$$

则当 $n\to\infty$ 时，$\mu(A_n)\to\mu(A)$.

($e$) 如果 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n, A_n\in\mathfrak{M}$,

$$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$$

且 $\mu(A_1)$有限，则当 $n\to\infty$ 时，$\mu(A_n)\to\mu(A)$.

如证明将指出的，这些性质除($c$)外，对复测度也成立；($b$)称为有限可加性；($c$)称为单调性.

**证明**

($a$) 取 $A\in\mathfrak{M}$，使得 $\mu(A)<\infty$，在 1.18(1)中，取 $A_1=A$，及 $A_2=A_3=\cdots=\varnothing$.

($b$) 在 1.18(1)中取 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$.

($c$) 由于 $B=A\cup(B-A)$ 及$A\cap(B-A)=\varnothing$，可看出($b$)蕴涵着 $\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)\geqslant\mu(A)$.

($d$) 令 $B_1=A_1$，且对 $n=2,3,4,\cdots$，令 $B_n=A_n-A_{n-1}$. 则 $B_n\in\mathfrak{M}$, $i\neq j$ 时，$B_i\cap B_j=\varnothing$, $A_n=B_1\cup\cdots\cup B_n$，且 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$.

因此

$$\mu(A_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)\quad 而\quad \mu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i)$$

根据无穷级数和的定义得出$(d)$.

$(e)$ 令$C_n=A_1-A_n$. 则$C_1\subset C_2\subset C_3\subset\cdots$,

$$\mu(C_n)=\mu(A_1)-\mu(A_n)$$

$A_1-A=\bigcup C_n$,于是由$(d)$得出

$$\mu(A_1)-\mu(A)=\mu(A_1-A)=\lim_{n\to\infty}\mu(C_n)=\mu(A_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

这就推出$(e)$.

**1.20 例** 如我们将看到的,有趣的测度空间的构造要求做些艰苦的工作. 然而,可以立即给出少数浅显的例子.

$(a)$ $X$为任意集,对任意$E\subset X$,若$E$为无穷集,定义$\mu(E)=\infty$,当$E$为有限集时,令$\mu(E)$为$E$的点数. 这个$\mu$称为$X$上的计数测度.

$(b)$ 固定$x_0\in X$. 对任意$E\subset X$,若$x_0\in E$,定义$\mu(E)=1$;若$x_0\notin E$,定义$\mu(E)=0$. 这个$\mu$称为集中在$x_0$的单位质量.

$(c)$ 令$\mu$是集$\{1,2,3,\cdots\}$上的计数测度,令$A_n=\{n,n+1,n+2,\cdots\}$. 则$\bigcap A_n=\varnothing$,但对$n=1,2,3,\cdots$,$\mu(A_n)=\infty$. 这表明定理1.19$(e)$中的假设

$$\mu(A_1)<\infty$$

并非多余的.

**1.21 关于术语的注释** 人们经常看到把测度空间看成是"三元序组"$(X,\mathfrak{M},\mu)$,其中$X$为集,$\mathfrak{M}$为$X$内的$\sigma$-代数,而$\mu$为定义在$\mathfrak{M}$上的测度. 类似地,可测空间是"序对"$(X,\mathfrak{M})$. 这虽然有点多余,但在逻辑上完全正确,通常也是便利的. 例如在$(X,\mathfrak{M})$中,集$X$仅是$\mathfrak{M}$的最大元素. 因此我们若知道$\mathfrak{M}$,也就知道了$X$. 类似地,根据定义,每个测度都有一个$\sigma$-代数作为它的定义域,于是我们若知道测度$\mu$,也就知道作为$\mu$的定义域的$\sigma$-代数$\mathfrak{M}$,那末作为$\sigma$-代数$\mathfrak{M}$的最大元素集$X$也就知道了.

因此,使用象"设$\mu$为一测度",或者当我们在问题中希望强调

$\sigma$-代数或这集的时候说"设 $\mu$ 为$\mathfrak{M}$上的测度"或"设 $\mu$ 为$X$上的测度"这类表达语，那是完全合理的.

虽在逻辑上不大有意义但在习惯上(我们通常都是顺从数学上的习惯而不是逻辑)总是说"设$X$为测度空间"；这里着重的并不在于集，而在于测度. 当然，在使用这种说法时，我们总是默认，有一个定义在$X$的某个 $\sigma$-代数上的测度，而它正好是我们实际上要讨论的.

类似地，一个拓扑空间乃是一个序对$(X,\tau)$，此处 $\tau$ 为集$X$上的拓扑. 并且有意义的东西是在$\tau$ 中而不是在$X$中，但述及时仍说成"拓扑空间$X$".

全部数学中均使用这种默契. 大多数的数学系统都是由一些集，连同某些特定的子集类或者某些二元运算或者某些关系(要求它们具有某些性质). 根据需要，人们可以列举出它们，然后把这个系统作为序对，三元序组等等来描述. 例如实直线可描述为四元序组$(R^1, +, \cdot, <)$，此处$+, \cdot$，及$<$满足完备阿基米德(Archimedes)有序域的公理. 然而，我敢打赌，只有极少数数学家才想把实数域看作四元序组.

## $[0,\infty]$中的算术运算

**1.22** 在整个积分论中，不可避免地要遇到$\infty$. 一个理由是希望在无限测度的集上能够积分；毕竟，实直线有无限长. 另一个理由是，即使最初只对实值函数有兴趣，但是一个正实函数序列的上极限或一个正实函数序列的和在某些点却很可能是$\infty$. 而当这种情况发生时，人们不得不作出一些特殊规定，这将在很大程度上丧失如定理1.26 及 1.27 那样的优美性.

我们定义，如果 $0\leqslant a\leqslant\infty$，则 $a+\infty=\infty+a=\infty$，且

$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\begin{cases}\infty, & \text{当 } 0<a\leqslant\infty\\ 0, & \text{当 } a=0\end{cases}$$

实数的和及积当然用通常方法定义.

定义$0\cdot\infty=0$似乎很奇怪，然而，用这定义不难验证，在$[0,\infty]$内交换律，结合律及分配律都是无条件成立的.

对待消去律则要小心处置：仅当$a<\infty$时，$a+b=a+c$才蕴涵着$b=c$；仅当$0<a<\infty$时，$ab=ac$才蕴涵$b=c$.

注意，下列有用的命题成立：

如果$0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots$，$0\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots$，$a_n\to a$且$b_n\to b$则$a_nb_n\to ab$.

把这个命题和定理1.17及1.14结合起来，可以看出到$[0,\infty]$内的可测函数的和及积是可测函数.

## 正函数的积分

本节中，$\mathfrak{M}$为集$X$的$\sigma$-代数，$\mu$为$\mathfrak{M}$上的正测度.

**1.23 定义** 如果$s$为$X$上的可测简单函数，形如

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i} \tag{1}$$

此处$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为$s$的不同的值(与定义1.16比较)，且如果$E\in\mathfrak{M}$，定义

$$\int_E s\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E) \tag{2}$$

此处用到约定$0\cdot\infty=0$；因可能对某个$i$，$\alpha_i=0$且$\mu(A_i\cap E)=\infty$.

如果$f:X\to[0,\infty]$为可测，且$E\in\mathfrak{M}$，定义：

$$\int_E f\,d\mu=\sup\int_E s\,d\mu \tag{3}$$

这上确界取遍所有使得$0\leqslant s\leqslant f$的简单可测函数$s$.

(3) 的左边称为 $f$ 在 $E$ 上关于测度 $\mu$ 的 Lebesgue积分. 它是 $[0,\infty]$ 内的一个数.

注意,当 $f$ 是简单函数的时候,表面上得到了 $\int_E f d\mu$ 的两个定义,就是(2)和(3). 然而,它们得到的积分值是相同的. 因为在这种情况下,出现在(3)右边的函数 $s$ 中, $f$ 是最大的.

**1.24** 下列命题是定义的直接推论. 其中出现的函数和集,都假定是可测的:

($a$) 如果 $0\leqslant f\leqslant g$, 则 $\int_E f d\mu\leqslant\int_E g d\mu$.

($b$) 如果 $A\subset B$ 而 $f\geqslant 0$, 则 $\int_A f d\mu\leqslant\int_B f d\mu$.

($c$) 如果 $f\geqslant 0$ 而 $c$ 为常数, $0\leqslant c\leqslant\infty$, 则

$$\int_E c f d\mu = c\int_E f d\mu$$

($d$) 如果对所有 $x\in E$, $f(x)=0$, 即使 $\mu(E)=\infty$, 也有 $\int_E f d\mu=0$.

($e$) 如果 $\mu(E)=0$, 即使对每个 $x\in E$, $f(x)=\infty$, 也有 $\int_E f d\mu=0$.

($f$) 如果 $f\geqslant 0$, 则 $\int_E f d\mu=\int_X \chi_E f d\mu$.

最后的结果表明,我们能把我们的积分定义限制为在全部 $X$ 上的积分而不失去一般性. 若要在子集上积分,我们可以用($f$)作为定义. 提出那一方式作为定义,纯粹是一种爱好.

在此要注明,测度空间 $X$ 的每个可测子集 $E$ 可以用完全自然的方法重新构成一个测度空间: 新的可测集简单地说,就是含在 $E$ 内的 $X$ 的可测子集,除了它的定义域受限制之外,测度并不改变.

这再次表明，一旦我们在每个测度空间上定义积分之后，就自动地定义了可测空间的每个可测子集上的积分.

**1.25 命题** 设 $s$ 和 $t$ 为 $X$ 上的可测简单函数. 对 $E\in\mathfrak{M}$，定义

(1) $$\varphi(E)=\int_E s\,d\mu$$

则 $\varphi$ 为 $\mathfrak{M}$ 上的测度. 同时

(2) $$\int_X (s+t)d\mu=\int_X s\,d\mu+\int_X t\,d\mu$$

（这个命题包括定理 1.27 及 1.29 的特殊形式.）

**证明** 如果 $s$ 象在定义 1.23 内一样，且 $E_1, E_2, \cdots$ 为 $\mathfrak{M}$ 的互不相交元素，其并为 $E$. $\mu$ 的可数可加性指出

$$\varphi(E)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{r=1}^{\infty}\mu(A_i\cap E_r)$$
$$=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E_r)=\sum_{r=1}^{\infty}\varphi(E_r)$$

同样，$\varphi(\varnothing)=0$，因此 $\varphi$ 不恒等于 $\infty$.

其次设 $s$ 同前面一样，$\beta_1, \cdots, \beta_m$，是 $t$ 的不同的值，且令 $B_j=\{x: t(x)=\beta_j\}$. 若 $E_{ij}=A_i\cap B_j$，则

$$\int_{E_{ij}}(s+t)d\mu=(\alpha_i+\beta_j)\mu(E_{ij})$$

且

$$\int_{E_{ij}}s\,d\mu+\int_{E_{ij}}t\,d\mu=\alpha_i\mu(E_{ij})+\beta_j\mu(E_{ij})$$

于是用 $E_{ij}$ 代替 $X$ 时，(2)成立. 因为 $X$ 是不相交的集 $E_{ij}(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m)$ 的并，我们命题的前半部蕴涵着(2)成立.

现在达到理论的有趣的部分，它的最显著的特点之一是利用它可以有把握处理极限运算.

**1.26 Lebesgue单调收敛定理** 设 $\{f_n\}$ 是一个 $X$ 上的可测函数序列，且假定

(a) 对每一个 $x\in X$, $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\infty$.

(b) 对每一个 $x\in X$，当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)\to f(x)$.

则 $f$ 是可测的，且当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_X f_n d\mu\to\int_X f d\mu$$

**证明** 因为 $\int f_n\leqslant\int f_{n+1}$，存在一个 $\alpha\in[0,\infty)$ 使得当 $n\to\infty$ 时

$$\int_X f_n d\mu\to\alpha \tag{1}$$

根据定理 1.14，$f$ 是可测的. 因为 $f_n\leqslant f$，故对每个 $n$，有 $\int f_n\leqslant\int f$，因此(1)蕴涵

$$\alpha\leqslant\int_X f d\mu \tag{2}$$

设 $s$ 是使得 $0\leqslant s\leqslant f$ 的任一简单可测函数，设 $c$ 是一个常数，$0<c<1$，且定义

$$E_n=\{x: f_n(x)\geqslant cs(x)\}\qquad(n=1,2,3,\cdots) \tag{3}$$

每一个 $E_n$ 是可测的，$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$，且 $X=\bigcup E_n$. 为了看出这个等式，考虑 $x\in X$；若 $f(x)=0$，则 $x\in E_1$；若 $f(x)>0$，因为 $c<1$，则 $cs(x)<f(x)$；因此对某个 $n$，$x\in E_n$. 同样有

$$\int_X f_n d\mu\geqslant\int_{E_n} f_n d\mu\geqslant c\int_{E_n} s d\mu\qquad(n=1,2,3,\cdots) \tag{4}$$

令 $n\to\infty$，应用命题 1.25 和定理 1.19($d$)于(4) 的最后一个积分. 结果是

$$\alpha\geqslant c\int_X s d\mu \tag{5}$$

因为(5)对每一个 $c<1$ 成立，故

(6) $$\alpha \geqslant \int_X s d\mu$$

对满足 $0 \leqslant s \leqslant f$ 的每一个简单可测函数 $s$ 成立. 因此,

(7) $$\alpha \geqslant \int_X f d\mu$$

此定理从(1),(2),(7)得出.

**1.27 定理** 如果对 $n=1,2,3,\cdots$, $f_n: X \to [0,\infty]$ 是可测的,且

(1) $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in X)$$

则

(2) $$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

**证明** 首先, 象在定理 1.17 一样, 存在简单可测函数序列 $\{s_i'\}$, $\{s_i''\}$, 使得 $s_i' \to f_1$, $s_i'' \to f_2$. 若 $s_i = s_i' + s_i''$, 则 $s_i \to f_1 + f_2$, 单调收敛定理连同命题 1.25 一起指出

(3) $$\int_X (f_1+f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$$

其次, 令 $g_N = f_1 + \cdots + f_N$, 序列 $\{g_N\}$ 单调地收敛于 $f$. 若我们应用归纳法于(3), 看出

(4) $$\int_X g_N d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n d\mu$$

再一次应用单调收敛定理, 得到(2). 这就完成了证明.

若设 $\mu$ 是可数集上的计数测度, 定理 1.27 是一个关于非负实数的二重级数的结论(它当然能用初等方法证明):

**系** 如果 $a_{ij} \geqslant 0$ 对 $i$ 和 $j=1,2,3,\cdots$ 成立, 则

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$$

**1.28 Fatou 引理** 如果对每一个正整数 $n$, $f_n: X\to[0,\infty]$ 是可测的. 则

(1) $$\int_X(\liminf_{n\to\infty} f_n)d\mu\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

(1)中严格不等式是能出现的,见习题 8.

**证明** 令

(2) $$g_k(x)=\inf_{i\geqslant k}f_i(x)\qquad(k=1,2,3,\cdots;x\in X)$$

则 $g_k\leqslant f_k$,所以

(3) $$\int_X g_k d\mu\leqslant\int_X f_k d\mu\qquad(k=1,2,3,\cdots)$$

同时,$0\leqslant g_1\leqslant g_2\leqslant\cdots$,根据定理 1.14,每一个 $g_k$ 是可测的,且由定义 1.13,当 $k\to\infty$ 时,$g_k(x)\to\liminf f_n(x)$. 所以单调收敛定理指出,当 $k\to\infty$ 时,(3)的左边趋于(1)的左边. 因此从(3)得到(1).

**1.29 定理** 假定 $f: X\to[0,\infty]$是可测的,且

(1) $$\varphi(E)=\int_E f d\mu\qquad(E\in\mathfrak{M})$$

则 $\varphi$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的一个测度. 且

(2) $$\int_X g d\varphi=\int_X g f d\mu$$

对其值域在$[0,\infty]$内的 $X$ 上的每一个可测函数 $g$ 成立.

**证明** 设 $E_1, E_2, E_3,\cdots$是 $\mathfrak{M}$ 的不相交的元,他们的并是 $E$. 考察

(3) $$\chi_E f=\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{E_j}f$$

和

(4) $$\varphi(E)=\int_X \chi_E f d\mu;\quad \varphi(E_j)=\int_X \chi_{E_j} f d\mu$$

于是从定理 1.27 得到

(5) $$\varphi(E)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(E_j)$$

因为 $\varphi(\varnothing)=0$,(5)证明了 $\varphi$ 是一个测度.

其次,(1)指出对 $E\in\mathfrak{M}$, 当 $g=\chi_E$ 时(2)总是成立的. 因此(2)对每一个简单函数 $g$ 成立, 而一般情况则从单调收敛定理可以得出.

**评注** 定理 1.29 的第二个断言有时写成

(6) $$d\varphi=fd\mu$$

的形式. 我们不给符号 $d\varphi$ 和 $d\mu$ 以独立意义, (6)仅仅意味着(2)对每一个可测的 $g\geq 0$ 成立.

定理 1.29 有一个非常重要的逆定理, 即 Radon-Nikodym 定理, 将在第六章内证明.

## 复函数的积分

象以前一样, 在这节里 $\mu$ 是在任意可测空间 $X$ 上的正测度.

**1.30 定义** 我们定义 $L^1(\mu)$ 是所有使得

$$\int_X |f|d\mu<\infty$$

的、$X$ 上的复可测函数 $f$ 的集族.

注意, 象在命题 1.9($b$)所见到的一样, $f$ 的可测性蕴涵着 $|f|$ 的可测性. 因此上面的积分是确定了的.

$L^1(\mu)$的元素称为(关于 $\mu$ 的)Lebesgue 可积函数或称为可求和函数. 指数 1 的含义将在第三章阐明.

**1.31 定义** 若 $f=u+iv$, 这里 $u$ 和 $v$ 是 $X$ 上实可测函数,

若 $f\in L^1(\mu)$，对每一个可测集 $E$ 定义

$$\int_E fd\mu=\int_E u^+d\mu-\int_E u^-d\mu+i\int_E v^+d\mu-i\int_E v^-d\mu \tag{1}$$

象在 1.15 节内定义的一样，这里 $u^+$ 和 $u^-$ 是 $u$ 的正部和负部. $v^+$ 和 $v^-$ 从 $v$ 类似地得到. 这四个函数都是实的、可测的和非负的. 因此，根据定义 1.23，(1)右边的四个积分存在. 而且有 $u^+\leqslant|u|\leqslant|f|$ 等等，所以这四个积分的每一个都是有限的. 于是(1)定义了左边的积分为一个复数.

有时候，定义一个值域在$[-\infty,\infty]$中的可测函数 $f$ 的积分为

$$\int_E fd\mu=\int_E f^+d\mu-\int_E f^-d\mu \tag{2}$$

也是合情合理的. 如果(2)的右边的积分至少有一个是有限的，这时(2)的左边则是在$[-\infty,\infty]$内的一个数.

**1.32 定理** 假定 $f$ 和 $g\in L^1(\mu)$，且 $\alpha$ 和 $\beta$ 是复数，则 $\alpha f+\beta g\in L^1(\mu)$. 且

$$\int_X(\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\int_X fd\mu+\beta\int_X gd\mu \tag{1}$$

**证明** $\alpha f+\beta g$ 的可测性从命题 1.9(c)得出. 根据 1.24节和定理 1.27，有

$$\int_X|\alpha f+\beta g|d\mu\leqslant\int_X(|\alpha||f|+|\beta||g|)d\mu$$
$$=|\alpha|\int_X|f|d\mu+|\beta|\int_X|g|d\mu<\infty$$

于是 $\alpha f+\beta g\in L^1(\mu)$.

为证明(1)，显然只要证明

$$\int_X(f+g)d\mu=\int_X fd\mu+\int_X gd\mu \tag{2}$$

和

$$\int_X(\alpha f)d\mu=\alpha\int_X fd\mu \tag{3}$$

就够了．并且若(2)对 $L^1(\mu)$内实的$f$ 和 $g$ 成立，(2)的一般场合也即得出．

承认这一点之后，令 $h=f+g$，就有

$$h^+-h^-=f^+-f^-+g^+-g^-$$

或

$$h^++f^-+g^-=f^++g^++h^- \tag{4}$$

根据定理 1.27，有

$$\int h^++\int f^-+\int g^-=\int f^++\int g^++\int h^- \tag{5}$$

因为这些积分的每一个是有限的，通过移项就可以得到(2)．

当 $\alpha\geqslant 0$ 时，从命题 1.24(c)可得到(3)．利用关系式 $(-u)^+=u^-$，容易验证当 $\alpha=-1$ 时，(3)也成立．对 $\alpha=i$ 的情况也是容易证明的：若 $f=u+iv$，则

$$\int(if)=\int(iu-v)=\int(-v)+i\int u=-\int v+i\int u=i\left(\int u+i\int v\right)$$
$$=i\int f$$

这些情况同(2)合在一起，我们得到对任意复数 $\alpha$，(3)成立．

**1.33　定理**　若 $f\in L^1(\mu)$，则

$$\left|\int_X fd\mu\right|\leqslant\int_X|f|d\mu$$

**证明**　令 $z=\int_X fd\mu$，因为 $z$ 是一个复数，存在一个复数 $\alpha$，$|\alpha|=1$，使得 $\alpha z=|z|$．设 $u$是 $\alpha f$的实部．则 $u\leqslant|\alpha f|=|f|$．因此

$$\left|\int_X fd\mu\right|=\alpha\int_X fd\mu=\int_X\alpha fd\mu=\int_X ud\mu\leqslant\int_X|f|d\mu$$

因为前面已指出$\int\alpha fd\mu$ 是实数，故上面等式的第三个等号成立．

我们用另一个重要的收敛定理结束这一节.

**1.34 Lebesgue控制收敛定理** 假定$\{f_n\}$是一个$X$上的复可测函数序列,使得

(1) $$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

对每一个$x\in X$存在. 若存在一个函数$g\in L^1(\mu)$使得

(2) $$|f_n(x)|\leqslant g(x)\qquad(n=1,2,3,\cdots;x\in X)$$

则$f\in L^1(\mu)$,

(3) $$\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|d\mu=0$$

并且

(4) $$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu$$

**证明** 因为$|f|\leqslant g$且$f$是可测的,故$f\in L^1(\mu)$. 因为$|f_n-f|\leqslant 2g$,把Fatou引理应用于函数$2g-|f_n-f|$得到

$$\begin{aligned}\int_X 2g d\mu&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_X(2g-|f_n-f|)d\mu\\&=\int_X 2gd\mu+\liminf_{n\to\infty}\left(-\int_X|f_n-f|d\mu\right)\\&=\int_X 2gd\mu-\limsup_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|d\mu\end{aligned}$$

因为$\int 2gd\mu$是有限的,从两边减去它,便得

(5) $$\limsup_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|d\mu\leqslant 0$$

若一个非负的实数序列不收敛于0,则它的上极限是正的,于是(5)蕴涵着(3). 把定理1.33应用于$f_n-f$,(3)便蕴涵着(4).

## 零测集所起的作用

**1.35 定义** 设$P$是对于点$x$可以具有或者不具有的一种性

质. 譬如, 若 $f$ 是一个给定的函数, $P$ 可以是性质"$f(x)>0$", 若 $\{f_n\}$ 是给定的函数序列, $P$ 可以是性质"$\{f_n(x)\}$ 收敛".

如果 $\mu$ 是一个 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 上的测度, $E\in\mathfrak{M}$, "$P$ 在 $E$ 上几乎处处成立"(简记为 "$P$. a. e. 于 $E$)这句话意味着: 存在一个 $N\in\mathfrak{M}$, 使得 $\mu(N)=0$, $N\subset E$, 并且 $P$ 在 $E-N$ 的每一点上成立. 当然"几乎处处" 这个概念非常强烈地依赖于所给定的测度. 当明确要求指出测度的时候, 我们将记作"a. e. $[\mu]$".

例如, 如果 $f$ 和 $g$ 是可测函数, 并且当

$$\mu(\{x: f(x)\neq g(x)\})=0 \tag{1}$$

时, 我们说 $f=g$ a. e. $[\mu]$ 于 $X$ 上, 并记为 $f\sim g$. 容易看出这是一个等价关系. 传递性($f\sim g$ 和 $g\sim h$ 蕴涵着 $f\sim h$)是 "两个零测集的并是一个零测集"这一事实的推论.

注意, 若 $f\sim g$, 则对每一个 $E\in\mathfrak{M}$,

$$\int_E f d\mu=\int_E g d\mu \tag{2}$$

为了看出这点, 设 $N$ 是满足(1)式的集; 则 $E$ 是 $E-N$ 和 $E\cap N$ 这两个不相交的集的并, 在 $E-N$ 上 $f=g$, 而 $\mu(E\cap N)=0$.

于是, 一般地说, 零测集在积分中是可以忽略的. "可忽略集的每一个子集是可忽略的" 这个结论应当是正确的. 但是可能遇到一些集 $N\in\mathfrak{M}$, $\mu(N)=0$, 而它有子集 $E$ 不是 $\mathfrak{M}$ 的元素. 当然在这种情况下, 可以定义 $\mu(E)=0$, 但是 $\mu$ 的这种扩充还能是一个测度吗? 即, 它还是定义在一个 $\sigma$-代数上吗? 所幸的是, 回答是肯定的.

**1.36 定理** 设$(X,\mathfrak{M},\mu)$是一个测度空间, $\mathfrak{M}^*$是所有这样的 $E\subset X$ 的集族, 对于 $E$ 存在 $A$ 和 $B\in\mathfrak{M}$, 使得 $A\subset E\subset B$, 且 $\mu(B-A)=0$, 在这种情况下, 定义 $\mu(E)=\mu(A)$, 则 $\mathfrak{M}^*$ 是一个 $\sigma$-代数, 且 $\mu$ 是 $\mathfrak{M}^*$ 上的一个测度.

因为零测集的所有子集现在都是可测的，这个扩张了的测度 $\mu$ 称为完备测度。$\sigma$-代数$\mathfrak{M}^*$称为$\mathfrak{M}$的 $\mu$ 完备化。这个定理说每一个测度都能完备化。所以为了方便起见，总可以假定任何给定的测度是完备的；这恰好给出更多的可测集，因此，给出更多的可测函数。通常讨论中所遇到的大多数测度都已经是完备化的。但也有些例外；其中之一将在第七章的Fubini定理的证明中遇到。

**证明** 验证$\sigma$-代数的三个规定性质。(i)$X\in\mathfrak{M}$，因此$X\in\mathfrak{M}^*$。(ii)若 $A\subset E\subset B$，则 $B^c\subset E^c\subset A^c$，且 $A^c-B^c=B-A$。(iii)若 $A_i\subset E_i\subset B_i$，$A=\bigcup A_i$，$E=\bigcup E_i$，和 $B=\bigcup B_i$，则 $A\subset E\subset B$。并且

$$B-A\subset\bigcup_1^\infty(B_i-A_i)$$

故当 $\mu(B_i-A_i)=0$，$i=1,2,3,\cdots$成立时，$\mu(B-A)=0$。

其次，我们来验证 $\mu$ 在$\mathfrak{M}^*$上是完全确定的。假定 $A\subset E\subset B$，$A_1\subset E\subset B_1$，且 $\mu(B-A)=\mu(B_1-A_1)=0$。则

$$A-A_1\subset B_1-A_1$$

所以 $\mu(A-A_1)=0$，类似地 $\mu(A_1-A)=0$，因此

$$\mu(A)=\mu(A_1\cap A)=\mu(A_1)$$

在$\mathfrak{M}^*$上 $\mu$ 的可数可加性是明显的。

**1.37** 就积分来说，a.e.相等的函数可以不加区别，这个事实启发我们，扩大可测函数的定义是有益的。如果 $\mu(E^c)=0$，并且对每一个开集 $V$，$f^{-1}(V)\cap E$ 是可测的，我们称定义在 $E\in\mathfrak{M}$上的函数 $f$ 为在 $X$ 上可测。若对 $x\in E^c$，定义 $f(x)=0$，就得到在旧的意义下的$X$的可测函数。假如测度是完备的，在 $E^c$ 上依照完全任意的方式定义 $f$，仍可得到一个可测函数。在任何 $A\in\mathfrak{M}$ 上 $f$ 的积分与 $E^c$ 上 $f$ 的定义无关，所以 $f$ 在 $E^c$ 上的定义甚至完全不需要指定。

有许多自然会遇到的情况，譬如，在实直线上的一个函数 $f$ 可

以仅仅是几乎处处可微的(关于Lebesgue 测度)，但是在一定的条件下，$f$ 是它的导数的积分仍然正确，这将在第八章内讨论．或者 $X$ 上的可测函数序列 $\{f_n\}$ 可以仅仅是几乎处处收敛；用可测性的新定义，这个极限仍是 $X$ 上的可测函数，我们没有必要非得把它缩减到实际收敛的点集上不可．

为了说明问题，我们叙述 Lebesgue 控制收敛定理的一个推论，其叙述方式容许一些测度为零的例外集．

**1.38 定理** 假定 $\{f_n\}$ 是一个在 $X$ 上几乎处处有定义的复可测函数序列，满足

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,d\mu<\infty$$

则级数

(2) $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

对几乎所有的 $x$ 收敛，$f\in L^1(\mu)$，并且

(3) $$\int_X f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

**证明** 设 $S_n$ 是 $f_n$ 有定义的点集，因此 $\mu(S_n^c)=0$．对 $x\in S=\bigcap S_n$，令 $\varphi(x)=\Sigma|f_n(x)|$．则 $\mu(S^c)=0$．根据(1)和定理 1.27

(4) $$\int_S \varphi\,d\mu<\infty$$

若 $E=\{x\in S:\varphi(x)<\infty\}$，从(4)得出 $\mu(E^c)=0$．对于每一个 $x\in E$，级数(2)绝对收敛．如果对 $x\in E$，$f(x)$ 用(2)定义，则在 $E$ 上 $|f(x)|\leqslant\varphi(x)$．所以根据(4)，在 $E$ 上 $f\in L^1(\mu)$．如果 $g_n=f_1+\cdots+f_n$，则 $|g_n|\leqslant\varphi$，对所有的 $x\in E$，$g_n(x)\to f(x)$，并且定理 1.34 给出了用 $E$ 代替 $X$ 时的(3)式．因为 $\mu(E^c)=0$，此结果等价于

(3).

注意,即使当 $f_n$ 在 $X$ 的每一点均有定义时,由(1)也只能得出(2)几乎处处收敛. 下面是另外一些情况,在这些情况中, 我们只能引出几乎处处成立的结论.

**1.39 定理**

(a) 假设 $f: X \to [0, \infty]$ 是可测的, $E \in \mathfrak{M}$ 并且 $\int_E f d\mu = 0$, 则 $f = 0$ a.e. 于 $E$ 上.

(b) 假设 $f \in L^1(\mu)$ 并且对每一个 $E \in \mathfrak{M}$, 有 $\int_E f d\mu = 0$, 则 $f = 0$ a.e. 于 $E$ 上.

(c) 假设 $f \in L^1(\mu)$ 并且

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \int_X |f| d\mu$$

则存在一个常数 $\alpha$, 使得 $\alpha f = |f|$ a.e. 于 $X$ 上.

注意,(c)叙述了这样的条件,在这个条件下, 定理 1.33 内的等号成立.

**证明**

(a) 如果 $A_n = \left\{ x \in E: f(x) > \frac{1}{n} \right\}$ $n = 1, 2, 3, \cdots$, 则

$$\frac{1}{n} \mu(A_n) \leqslant \int_{A_n} f d\mu \leqslant \int_E f d\mu = 0$$

所以 $\mu(A_n) = 0$, 因为 $\{x \in E; f(x) > 0\} = \bigcup A_n$, 便得出(a).

(b) 令 $f = u + iv$, 设 $E = \{x: u(x) \geqslant 0\}$, 则 $\int_E f d\mu$ 的实部是 $\int_E u^+ d\mu$. 因此 $\int_E u^+ d\mu = 0$, (a)蕴涵着 $u^+ = 0$ a.e. 类似地得出

$$u^- = v^+ = v^- = 0 \qquad \text{a.e.}$$

(c) 考察定理 1.33 的证明, 我们现在的假定蕴涵着在定理

1.33 的证明中最后一个不等号实际上必须是等号. 因此 $\int(|f|-u)d\mu=0$. 因为 $|f|-u\geqslant 0$, (a)证明了 $|f|=u$ a. e. 这就是说, $\mathrm{Re}\,\alpha f=|\alpha f|$ a. e., 因此, $\alpha f=|\alpha f|=|f|$ a. e., 这就是所要的结论.

**1.40 定理** 假设 $\mu(X)<\infty$, $f\in L^1(\mu)$, $S$ 是复平面上的一个闭集, 且对于每一个 $E\in\mathfrak{M}$, $\mu(E)>0$, 平均值

$$A_E(f)=\frac{1}{\mu(E)}\int_E fd\mu$$

在 $S$ 内. 则对于几乎所有的 $x\in X$, $f(x)\in S$.

**证明** 设 $\Delta$ 是在 $S$ 的余集内的闭圆盘 (譬如说中心在 $\alpha$ 且半径 $r>0$), 因 $S^c$ 是可数个这样的圆盘的并, 只需证明对 $E=f^{-1}(\Delta)$, $\mu(E)=0$ 就足够了.

假设 $\mu(E)>0$ 则

$$|A_E(f)-\alpha|=\frac{1}{\mu(E)}\left|\int_E(f-\alpha)\,d\mu\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f-\alpha|\,d\mu\leqslant r$$

由于 $A_E(f)\in S$, 上述结果是不可能的. 因此 $\mu(E)=0$.

**1.41 定理** 设 $\{E_k\}$ 是在 $X$ 内的可测集序列, 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)<\infty \tag{1}$$

则几乎所有的 $x\in X$, 至多属于有限个 $E_k$.

**证明** 若 $A$ 是所有属于无限个 $E_k$ 的 $x$ 的集, 我们要证明 $\mu(A)=0$. 令

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x)\qquad(x\in X) \tag{2}$$

对每一个 $x$, 这个级数的每一项或是 0 或是 1. 因此, $x\in A$, 当且仅当 $g(x)=\infty$. 根据定理 1.27, $g$ 在 $X$ 上的积分等于(1)的和. 于

是 $g\in L^1(\mu)$. 所以 $g(x)<\infty$ a. e.

## 习　　题

1　是否存在一个仅具有可数个元素的无限 $\sigma$-代数?

2　对 $n$ 个函数证明类似定理 1.8 的结果.

3　若 $f$ 是在可测空间 $X$ 上的实函数, 使得对每一个有理数 $r$,

$$\{x: f(x)\geqslant r\}$$

是可测集, 证明 $f$ 是可测的.

4　设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是 $[-\infty, \infty]$ 内的序列, 证明下列结论:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n)=-\liminf_{n\to\infty} a_n$

(b) $\limsup_{n\to\infty}\{a_n+b_n\}\leqslant\limsup_{n\to\infty} a_n+\limsup_{n\to\infty} b_n$

假定这些和中没有 $\infty-\infty$ 的形式.

(c) 对所有的 $n$, $a_n\leqslant b_n$, 则

$$\liminf_{n\to\infty} a_n\leqslant\liminf_{n\to\infty} b_n$$

举例说明在(b)内严格不等式能成立.

5　证明实可测函数序列的收敛点集是可测集.

6　设 $X$ 是一个不可数集, 设 $\mathfrak{M}$ 是所有的使得 $E$ 或 $E^c$ 至多是可数的集 $E\subset X$ 所成的集族. 在第一种情形下定义 $\mu(E)=0$, 在第二种情形下定义 $\mu(E)=1$. 证明 $\mathfrak{M}$ 是 $X$ 内的 $\sigma$-代数, $\mu$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的一个测度.

7　假设对 $n=1, 2, 3, \cdots$, $f_n$: $X\to[0, \infty]$ 是可测的. 对每一个 $x\in X$, $f_1\geqslant f_2\geqslant f_3\geqslant\cdots\geqslant 0$, 当 $n\to\infty$ 时 $f_n(x)\to f(x)$, 且 $f_1\in L^1(\mu)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu$$

并且指出若省去条件"$f_1\in L^1(\mu)$", 这个结论就得不出来.

8　若 $n$ 是奇数, 令 $f_n=\chi_E$, 若 $n$ 是偶数, 令 $f_n=1-\chi_E$, 这个例子与Fatou引理有什么关系?

9　假设 $\mu$ 是 $X$ 上的正测度, $f: X\to[0, \infty]$ 是可测的, $\int_X f d\mu=c$, 这里 $0<c<\infty$, $\alpha$ 是一个常数. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\log[1+(f/n)^\alpha]d\mu=\begin{cases}\infty & 若\ 0<\alpha<1\\ c & 若\ \alpha=1\\ 0 & 若\ 1<\alpha<\infty\end{cases}$$

提示：若 $\alpha \geq 1$，被积函数被 $\alpha f$ 控制．若 $\alpha < 1$，能应用 Fatou 引理．

10　假设 $\mu(X) < \infty$，$\{f_n\}$ 是 $X$ 上的一个有界复可测函数序列．且 $f_n \to f$ 在 $X$ 上是一致的．证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

并且指明假设"$\mu(X) < \infty$"不能省略．

11　证明在定理 1.41 中

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

因此，证明此定理就无需涉及积分．

12　假设 $f \in L^1(\mu)$．证明对每一个 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$ 使得当 $\mu(E) < \delta$ 时，$\int_E |f| d\mu < \varepsilon$

# 第二章　正 Borel 测度

## 向量空间

**2.1　定义**　复向量空间（或复数域上的向量空间）是一个集 $V$，它的元素称为向量，在元素间定义了两种运算，一种称为加法，一种称为纯量乘法，并满足下列熟知的代数性质：

对于一对向量 $x$ 和 $y$ 对应着一个向量 $x+y$，并满足 $x+y=y+x$ 和 $x+(y+z)=(x+y)+z$；$V$ 包含唯一的向量 0（零向量或 $V$ 的原点），使得对每个 $x\in V$，$x+0=x$；并且对每个 $x\in V$，对应着唯一的向量 $-x$，使得 $x+(-x)=0$.

对于每一对 $(\alpha,x)$，$x\in V$，$\alpha$ 是一个纯量（今后的行文中，纯量的意思就是复数），对应着一个向量 $\alpha x\in V$，满足 $1x=x$，$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$，以及两个分配律：

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,\ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \tag{1}$$

向量空间 $V$ 到向量空间 $V_1$ 内的线性变换是 $V$ 到 $V_1$ 内的一个映射 $\Lambda$，使得对所有 $x,y\in V$ 和一切的纯量 $\alpha,\beta$，有

$$\Lambda(\alpha x+\beta y)=\alpha\Lambda x+\beta\Lambda y \tag{2}$$

在 $V_1$ 是纯量域的特殊情况下（除了仅由 0 组成的平凡场合之外，这是最简单的向量空间的例子），$\Lambda$ 称为线性泛函．因此，线性泛函是 $V$ 上的，满足(2)的一个复函数．

注意，若 $\Lambda$ 是线性的，我们常常用记号 $\Lambda x$，而不用 $\Lambda(x)$．

当然，上述定义无论用任何一个域代替复数域都是适用的．除非明白地指出是相反的情形，本书中的向量空间均是复向量空间．然而，有个值得注意的例外：欧氏空间 $R^k$ 是实数域上的向量空间．

**2.2 作为线性泛函的积分** 分析学是充满了向量空间和线性变换的，并在积分为一方、以线性泛函为另一方之间有一种特别密切的关系.

例如，定理 1.32 证明了 $L^1(\mu)$ 对任何正测度 $\mu$ 是一个向量空间，而映射

$$(1) \qquad f \longrightarrow \int_X f d\mu$$

是 $L^1(\mu)$ 上的一个线性泛函. 类似地，如果 $g$ 是任何有界可测函数，则映射

$$(2) \qquad f \longrightarrow \int_X fg d\mu$$

也是 $L^1(\mu)$ 上的一个线性泛函；在第 6 章中，我们将看到，在某种意义上，泛函(2)是 $L^1(\mu)$ 上仅有的一种我们感兴趣的泛函.

另一个例子，设 $C$ 是单位区间 $I=[0,1]$ 上一切连续复函数的集. 两个连续函数的和是连续的，一个连续函数的任何纯量积也是连续的. 因此，$C$ 是一个向量空间. 如果

$$(3) \qquad \Lambda f = \int_0^1 f(x)dx \qquad (f \in C)$$

是通常的 Riemann 积分，则 $\Lambda$ 显然是 $C$ 上的线性泛函；$\Lambda$ 有一个附带的有趣的性质：它是一个正的线性泛函. 即是说，当 $f \geqslant 0$ 时，有 $\Lambda f \geqslant 0$.

我们当前的任务之一仍然是构造 Lebesgue 测度. 根据下述观察得知，此构造可以建立在线性泛函(3)的基础之上：考虑开区间 $(a, b) \subset I$ 和定义在 $I$ 上的这样一类函数 $C$，当 $f \in C$ 时，$0 \leqslant f \leqslant 1$，而对所有不在 $(a, b)$ 中的 $x$，$f(x)=0$. 对所有这样的 $f$，有 $\Lambda f < b-a$，然而，我们可以选择 $f$，使得 $\Lambda f$ 要多么接近 $b-a$ 都行. 因此，$(a, b)$ 的长度(或测度)是和泛函 $\Lambda$ 的值直接有关的.

从更一般的观点看，上述观察导致出著名的并且极为重要的

F. Riesz 定理:

对 $C$ 上的每一个正线性函数 $\Lambda$, 都对应 $I$ 上的一个有限正 Borel 测度 $\mu$, 使得

$$(4) \qquad \Lambda f = \int_I f d\mu \qquad (f \in C)$$

[逆定理是显然的: 若 $\mu$ 是 $I$ 上的正有限 Borel 测度, $\Lambda$ 由(4)式定义, 则 $\Lambda$ 是 $C$ 上的一个正线性函数.]

显然, 用 $R^1$ 代替有界区间 $I$ 是有意思的. 如果我们只考虑 $R^1$ 上的那些在某些有界区间外取值为零的连续函数, 就能做到这一点(这些函数是, 举例说, Riemann 可积的). 其次, 多个变量的函数常常出现在分析中. 因此, 我们应该由 $R^1$ 扩充到 $R^n$. 结果是 Reisz 定理的证明几乎不需作任何修改仍然通得过. 而且, 它表明 $R^n$ 的欧氏性质(坐标, 正交性等等)在证明中并不起什么作用; 事实上, 如果对它们考虑得太多, 反而会造成妨碍. 对于证明来说, 实质性的东西乃是 $R^n$ 的一些拓扑性质(这是自然的, 因为现在我们谈的是连续函数). 起决定作用的性质是局部紧性: $R^n$ 的每一点有一个邻域, 它的闭包是紧的.

因此, 我们将在很一般的条件下建立 Riesz 定理(定理2.14). Lebesgue 测度的存在性于是就作为一种特殊情况而得到. 希望集中注意力于更加具体的情况的人, 至少对于初学者, 可以轻松地跳过下述关于拓扑预备知识的那一节(最有趣的一段是 Urysohn 引理; 参看习题 3), 并在这一章的其余部分可以用 $R^1$ 代替 $X$.

## 拓扑学预备知识

**2.3 定义** 设 $X$ 是象 1.2 节所定义的拓扑空间.

($a$) 集 $E \subset X$ 是闭的, 如果它的余集 $E^c$ 是开的. (因此, $\varnothing$ 和 $X$ 是闭集, 闭集的有限并是闭集, 闭集的任意交是闭集.)

(*b*) 集 $E\subset X$ 的闭包 $\bar{E}$ 是 $X$ 中包含 $E$ 的最小闭集.（下述推理证明了 $\bar{E}$ 存在：$X$ 中包含 $E$ 的所有闭子集的集族 $\Omega$ 是非空的（因为 $X\in\Omega$）. 令 $\bar{E}$ 是 $\Omega$ 的一切元素的交.）

(*c*) 集 $K\subset X$ 是紧的，如果 $K$ 的每个开覆盖包含有限子覆盖. 更明确些，此要求是：如果 $\{V_\alpha\}$ 是开集的集族，它们的并包含 $K$，则 $\{V_\alpha\}$ 的某个有限子族的并也包含 $K$.

特别，如果 $X$ 本身是紧的，则 $X$ 称为紧空间.

(*d*) 点 $p\in X$ 的一个邻域是 $X$ 的任意一个包含 $p$ 的开子集.（使用这个词不是十分标准的；有些人对任意包含一个含 $p$ 的开集的集使用"$p$ 的邻域"这个词.）

(*e*) $X$ 是一个 Hausdorff 空间，如果下述条件成立：若 $p\in X$，$q\in X$，且 $p\neq q$，则 $p$ 有一个邻域 $U$，$q$ 有一个邻域 $V$，使得 $U\cap V=\varnothing$.

(*f*) $X$ 是局部紧的，如果 $X$ 的每一点有一个邻域，它的闭包是紧的.

显然，每个紧空间是局部紧的.

我们回顾一下 Heine-Borel 定理：欧氏空间 $R^n$ 的紧的子集恰好是那些闭的而且有界的集（[26][†]，定理 2.41）. 由此定理容易得到：$R^n$ 是局部紧的 Hausdorff 空间. 而且，每个度量空间也是 Hausdorff 空间.

**2.4 定理** 在拓扑空间 $X$ 中，设 $K$ 是紧的而 $F$ 是闭集. 如果 $F\subset K$，则 $F$ 是紧的.

**证明** 如果 $\{V_\alpha\}$ 是 $F$ 的开覆盖，$W=F^c$，则 $\{W\}\cup\{V_\alpha\}$ 覆盖 $K$；因此，存在有限集族 $\{V_{\alpha_i}\}$ 使得

$$K\subset W\cup V_{\alpha_1}\cup\cdots\cup V_{\alpha_n}$$

† 括号中的数字请看参考书目.

则 $$F\subset V_{\alpha_1}\cup\cdots\cup V_{\alpha_n}$$

**系** 若 $A\subset B$, 而 $B$ 有紧闭包, 则 $A$ 也有.

**2.5 定理** 设 $X$ 是 Hausdorff 空间. $K\subset X$, $K$ 是紧的, 且 $p\in K^c$. 则存在开集 $U$ 和 $W$, 使得 $p\in U$, $K\subset W$, 并且 $U\cap W=\varnothing$.

**证明** 设 $q\in K$, 由 Hausdorff 分离公理推出存在不交的开集 $U_q$ 和 $V_q$, 使得 $p\in U_q$, $q\in V_q$. 因为 $K$ 是紧的, 存在点 $q_1,\cdots,q_n\in K$, 使得

$$K\subset V_{q_1}\cup\cdots\cup V_{q_n}$$

通过集

$$U=U_{q_1}\cap\cdots\cap U_{q_n} \text{ 和 } W=V_{q_1}\cup\cdots\cup V_{q_n}$$

定理的要求得到满足.

**系**

($a$) Hausdorff 空间的紧子集是闭集.

($b$) 在 Hausdorff 空间中, 如果 $F$ 是闭集, $K$ 是紧的, 则 $F\cap K$ 是紧的.

由系($a$)和定理 2.4 就得到系($b$).

**2.6 定理** 设 $\{K_\alpha\}$ 是 Hausdorff 空间紧子集的集族, $\bigcap_\alpha K_\alpha=\varnothing$, 则 $\{K_\alpha\}$ 族中存在有限个集它们的交也是空的.

**证明** 令 $V_\alpha=K_\alpha^c$. 固定 $\{K_\alpha\}$ 的一个元素 $K_1$. 由于 $K_1$ 没有点属于每个 $K_\alpha$, $\{V_\alpha\}$ 是 $K_1$ 的一个开覆盖. 因此, 对某个有限集族 $\{V_{\alpha_i}\}$, 有 $K_1\subset V_{\alpha_1}\cup\cdots\cup V_{\alpha_n}$. 由此得到

$$K_1\cap K_{\alpha_1}\cap\cdots\cap K_{\alpha_n}=\varnothing$$

**2.7 定理** 设 $U$ 是局部紧 Hausdorff 空间 $X$ 的开集, $K\subset U$, $K$ 是紧的. 则存在一个具有紧闭包的开集 $V$, 使得

$$K\subset V\subset\overline{V}\subset U$$

**证明** 由于 $K$ 的每个点有一个闭包是紧的邻域, 而且 $K$ 被这些邻域的有限并所覆盖, $K$ 便位于一个闭包是紧的开集 $G$ 内. 如

果 $U=X$, 则取 $V=G$.

否则, 令 $C$ 是 $U$ 的余集. 定理 2.5 表明, 对每个 $p\in C$ 对应一个开集 $W_p$, 使得 $K\subset W_p$ 和 $p\notin\overline{W}_p$. 因此, $p$ 跑遍 $C$ 时, $\{C\cap\overline{G}\cap\overline{W}_p\}$ 是一个紧集的集族, 其交是空集. 由定理 2.6, 存在点 $p_1,\cdots,p_n\in C$, 使得

$$C\cap\overline{G}\cap\overline{W}_{p_1}\cap\cdots\cap\overline{W}_{p_n}=\varnothing$$

因为

$$\overline{V}\subset\overline{G}\cap\overline{W}_{p_1}\cap\cdots\cap\overline{W}_{p_n}$$

这时集

$$V=G\cap W_{p_1}\cap\cdots\cap W_{p_n}$$

具有所要求的性质.

**2.8 定义** 设 $f$ 是拓扑空间上的实(或广义实数的)函数. 如果对每个实数 $\alpha$, $\{x: f(x)>\alpha\}$ 是开的, 则称 $f$ 为下半连续的. 如果对每个实数 $\alpha$, $\{x: f(x)<\alpha\}$ 是开的, 则称 $f$ 为上半连续的.

下述半连续函数的性质几乎是这个定义的直接推论:

(a) 一个实函数是连续的当且仅当它既上半连续又下半连续.

(b) 开集的特征函数是下半连续的; 闭集的特征函数是上半连续的.

(c) 任意一族下半连续函数的上确界是下半连续的. 任意一族上半连续函数的下确界是上半连续的.

**2.9 定义** 拓扑空间 $X$ 上的复函数 $f$ 的支集是集

$$\{x: f(x)\neq 0\}$$

的闭包. 记 $X$ 上支集是紧的所有连续复函数的集为 $C_c(X)$.

可以看出, $C_c(X)$ 是向量空间. 这是基于两个事实:

(a) $f+g$ 的支集位于 $f$ 的支集和 $g$ 的支集的并内, 而紧集的任意有限并是紧的.

(*b*) 象连续函数的纯量倍数一样，两个连续复函数的和也是连续的.

（定理 1.8 的叙述和证明当用“连续函数”代替“可测函数”，用“拓扑空间”代替“可测空间”还是照样成立的；取$\Phi(s,t)=s+t$，或$\Phi(s,t)=st$，去证明连续函数的和与积是连续的.）

**2.10 定理** 设 $X$ 和 $Y$ 是拓扑空间，并设 $f:X\to Y$ 是连续的. 如果 $K$ 是 $X$ 的紧子集，则 $f(K)$ 是紧的.

**证明** 如果$\{V_\alpha\}$为$f(K)$的一个开覆盖，则$\{f^{-1}(V_\alpha)\}$是$K$的一个开覆盖. 于是，对某些 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, $K\subset f^{-1}(V_{\alpha_1})\cup\cdots\cup f^{-1}(V_{\alpha_n})$，因此，$f(K)\subset V_{\alpha_1}\cup\cdots\cup V_{\alpha_n}$.

**系** 任何 $f\in C_c(X)$的值域是复平面的一个紧子集.

事实上，如果$K$是 $f\in C_c(X)$的支集，则 $f(X)\subset f(K)\cup\{0\}$. 若 $X$ 不是紧的，则 $0\in f(X)$. 但 0 不一定属于 $f(K)$，这由简单例子即可看出.

**2.11 记号** 在本章，将使用下述约定. 记号

(1) $$K\prec f$$

表示 $K$ 是 $X$ 的紧子集，$f\in C_c(X)$，对一切$x\in X$, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，并对一切 $x\in K$, $f(x)=1$. 记号

(2) $$f\prec V$$

表示$V$是开集，$f\in C_c(X)$, $0\leqslant f\leqslant 1$，并且 $f$ 的支集含于$V$. 记号

(3) $$K\prec f\prec V$$

表示(1)和(2)都成立.

**2.12 Urysohn 引理** 设 $X$ 是局部紧的 Hausdorff 空间，$V$ 是 $X$ 中的开集，$K\subset V$，而 $K$ 是紧的. 则存在一个 $f\in C_c(X)$，使得

(1) $$K\prec f\prec V$$

利用特征函数的语言，这个结论断言存在一个连续函数 $f$，满

足不等式$\chi_K \leqslant f \leqslant \chi_V$. 注意，容易找到半连续函数满足此不等式.例如，$\chi_K$ 和 $\chi_V$.

**证明** 令 $r_1=0, r_2=1$ 而 $r_3, r_4, r_5, \cdots$是$(0,1)$ 内的全体有理数的一种排列. 由定理 2.7，能找到开集 $V_0$ 和$V_1$使得 $\overline{V}_0$ 是紧的，并且

$$K \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset V_0 \subset \overline{V}_0 \subset V \tag{2}$$

设 $n \geqslant 2$，并且 $V_{r_1}, \cdots, V_{r_n}$ 已按这样一种方式选择好，使当$r_i < r_j$ 时，有$\overline{V}_{r_j} \subset V_{r_i}$. 则数 $r_1, \cdots, r_n$ 中的一个，例如 $r_i$ 将是小于$r_{n+1}$的诸数中最大的那一个，另外，例如 $r_j$ 将是大于 $r_{n+1}$ 的诸数中最小的那一个. 再由定理 2.7，能找到 $V_{r_{n+1}}$，使得 $\overline{V}_{r_j} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V}_{r_{n+1}} \subset V_{r_i}$.

继续下去，我们得到一个开集族$\{V_r\}$，对$[0,1]$中的每个有理数 $r$，都有如下的性质：$K \subset V_1$，$\overline{V}_0 \subset V$，每个 $\overline{V}_r$ 是紧的，并且

$$\text{当 } s > r \text{ 时，} \overline{V}_s \subset V_r \tag{3}$$

定义

$$f_r(x) = \begin{cases} r & \text{若 } x \in V_r \\ 0 & \text{若 } x \notin V_r \end{cases} \quad g_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \in \overline{V}_s \\ s & \text{若 } x \notin \overline{V}_s \end{cases} \tag{4}$$

和

$$f = \sup_r f_r, \quad g = \inf_s g_s \tag{5}$$

定义 2.8 的评注表明 $f$ 是下半连续的，而 $g$ 是上半连续的. 显然有 $0 \leqslant f \leqslant 1$，当 $x \in K$ 时，$f(x)=1$，并且 $f$ 的支集在$\overline{V}_0$ 中. 今证 $f=g$ 以完成本证明.

仅当 $r>s$，$x \in V_r$ 和 $x \notin \overline{V}_s$ 时，不等式 $f_r(x) > g_s(x)$才可能成立. 但是 $r>s$ 蕴涵着 $V_r \subset V_s$. 因此，对一切 $r$ 和 $s$，有 $f_r \leqslant g_s$，于是 $f \leqslant g$.

设对某个 $x$，$f(x) < g(x)$. 则存在有理数 $r$ 和 $s$，使得 $f(x) <$

$r<s<g(x)$. 因为 $f(x)<r$, 我们有 $x\notin V_r$; 因为 $g(x)>s$, 我们有 $x\in\overline{V}_s$. 由(3), 这是矛盾的. 因此, $f=g$.

**2.13 定理** 设 $V_1,\cdots,V_n$ 是局部紧 Hausdorff 空间 $X$ 的开子集, $K$ 是紧的, 并且

$$K\subset V_1\cup\cdots\cup V_n$$

则存在函数 $h_i\prec V_i(i=1,2,\cdots,n)$, 使得

(1) $$h_1(x)+\cdots+h_n(x)=1 \qquad (x\in K)$$

因为(1), 集族 $\{h_1,\cdots,h_n\}$ 称为 $K$ 上的从属于覆盖 $\{V_1,\cdots,V_n\}$ 的单位划分.

**证明** 由定理 2.7, 每个 $x\in K$ 有一个邻域 $W_x$, 具有紧闭包 $\overline{W}_x\subset V_i$, 对某个 $i$(依赖于 $x$)成立. 存在点 $x_1,\cdots,x_m$, 使得 $W_{x_1}\cup\cdots\cup W_{x_m}\supset K$. 如果 $1\leqslant i\leqslant n$, 令 $H_i$ 是含于 $V_i$ 的 $\overline{W}_{x_j}$ 的并. 由 Urysohn 引理, 存在函数 $g_i$, 使得 $H_i\prec g_i\prec V_i$. 定义

(2)
$$\begin{aligned}
h_1&=g_1\\
h_2&=(1-g_1)g_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
h_n&=(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_{n-1})g_n
\end{aligned}$$

则 $h_i\prec V_i$. 由归纳法, 容易验证

(3) $$h_1+h_2+\cdots+h_n=1-(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)$$

因为 $K\subset H_1\cup\cdots\cup H_n$, 故对每一点 $x\in K$, 至少有一个 $g_i(x)=1$, 因此, (3)证明了(1)成立.

## Riesz 表示定理

**2.14 定理** 设 $X$ 是局部紧的 Hausdroff 空间, $\Lambda$ 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函. 则在 $X$ 内存在一个包含 $X$ 的一切 Borel 集的 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$, 并存在 $\mathfrak{M}$ 上的唯一一个正测度 $\mu$, $\mu$ 在下述意义上表示了 $\Lambda$:

(a) 对每个 $f\in C_c(X)$，$\Lambda f=\int_X fd\mu$.

并有下述的附加性质：

(b) 对每个紧集 $K\subset X$, $\mu(K)<\infty$.

(c) 对每个 $E\in\mathfrak{M}$, 有

$\mu(E)=\inf\{\mu(V):E\subset V, V$ 是开集$\}$

(d) 对每个开集 $E$ 和每个 $E\in\mathfrak{M}$ 而 $\mu(E)<\infty$, 有

$\mu(E)=\sup\{\mu(K):K\subset E, K$ 是紧集$\}$

(e) 如果 $E\in\mathfrak{M}$, $A\subset E$, 并且 $\mu(E)=0$, 则 $A\in\mathfrak{M}$.

当然，(a)是最感兴趣的一个性质．定义 $\mathfrak{M}$ 和 $\mu$ 之后，证明 $\mathfrak{M}$ 是 $\sigma$-代数，$\mu$ 是可数可加的过程中，(b)到(d)也就会建立起来．我们稍后将看到(定理 2.18)，在"合理的"空间 $X$ 内，每一个满足(b)的 Borel 测度也满足(c)和(d)，并且在那些情况下对每个 $E\in\mathfrak{M}$, (d)一定成立．性质(e)仅说明，在定理 1.36 的意义下，$(X,\mathfrak{M},\mu)$ 是一个完备测度空间．

在这个定理的整个证明中，字母 $K$ 表示 $X$ 的紧子集，$V$ 表示 $X$ 内的开集．

我们从证明 $\mu$ 的唯一性开始．如果 $\mu$ 满足(c)和(d)，显然 $\mu$ 在 $\mathfrak{M}$ 上由它在紧集上的值所决定．因此，当 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ 是满足定理的测度时，只要对一切 $K$，证明 $\mu_1(K)=\mu_2(K)$ 就足够了．于是，固定 $K$ 和 $\varepsilon>0$．由(b)和(c)，存在 $V\supset K$，有 $\mu_2(V)<\mu_2(K)+\varepsilon$；由 Urysohn 引理，存在 $f$，使得 $K\prec f\prec V$；因此

$$\mu_1(K)=\int_X \chi_K d\mu_1\leqslant\int_X fd\mu_1=\Lambda f=\int_X fd\mu_2$$

$$\leqslant\int_X \chi_V d\mu_2=\mu_2(V)<\mu_2(K)+\varepsilon$$

这样，$\mu_1(K)\leqslant\mu_2(K)$．如果改变 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ 的地位，就会得到相反的不等式，从而证明了 $\mu$ 的唯一性．

上述计算还附带地证明了由$(a)$可推得$(b)$.

$\mu$和$\mathfrak{M}$的构造

对$X$中的每个开集$V$,定义

$$\mu(V)=\sup\{\Lambda f: f\prec V\} \tag{1}$$

如果$V_1\subset V_2$,显然(1)蕴涵着$\mu(V_1)\leqslant\mu(V_2)$. 因此,如果$E$是一个开集,则

$$\mu(E)=\inf\{\mu(V): E\subset V, V\text{ 是开集}\} \tag{2}$$

并且对每个$E\subset X$,由(2)来定义$\mu(E)$和(1)是一致的.

注意,尽管对每个$E\subset X$定义了$\mu(E)$,$\mu$的可数可加性将仅对$X$中某种$\sigma$-代数$\mathfrak{M}$证明.

令$\mathfrak{M}_F$是一切$E\subset X$的类,这里$E$满足两个条件:$\mu(E)<\infty$,和

$$\mu(E)=\sup\{\mu(K): K\subset E, K\text{ 是紧的}\} \tag{3}$$

最后,令$\mathfrak{M}$是一切$E\subset X$的类,这里$E$对每个紧集$K$有$E\cap K\in\mathfrak{M}_F$.

证明$\mu$和$\mathfrak{M}$有所要求的性质

显然$\mu$是单调的,即若$A\subset B$,有$\mu(A)\leqslant\mu(B)$,而且$\mu(E)=0$蕴涵着$E\in\mathfrak{M}_F$和$E\in\mathfrak{M}$. 因此,$(e)$成立,且根据定义,$(c)$也成立.

因为其他结论的证明相当长,把它分成几步来证比较方便.

可以看出,$\Lambda$的正性蕴涵着$\Lambda$是单调的:$f\leqslant g$蕴涵着$\Lambda f\leqslant\Lambda g$. 这是显然的,因为$\Lambda g=\Lambda f+\Lambda(g-f)$而$g-f\geqslant 0$. 此单调性将用于II和X.

I 如果$E_1, E_2, E_3, \cdots$是$X$的任意子集,则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) \tag{4}$$

**证明** 首先证明如果$V_1$和$V_2$是开集,则

$$\mu(V_1\cup V_2)\leqslant\mu(V_1)+\mu(V_2) \tag{5}$$

选择 $g \prec V_1 \cup V_2$. 由定理 2.13，存在函数 $h_1$ 和 $h_2$，使得 $h_i \prec V_i$，对 $g$ 的支集内的一切 $x$，$h_1(x)+h_2(x)=1$. 因此，$h_i g \prec V_i$，$g=h_1g+h_2g$，于是

$$(6) \qquad \Lambda g=\Lambda(h_1g)+\Lambda(h_2g)\leqslant\mu(V_1)+\mu(V_2)$$

因为(6)对每个 $g \prec V_1 \cup V_2$ 都成立，由此得到(5).

如果对某个 $i$，$\mu(E_i)=\infty$，则(4)显然为真. 因此，对每个 $i$，设 $\mu(E_i)<\infty$. 取 $\varepsilon>0$. 由(2)，存在开集 $V_i \supset E_i$，使得

$$\mu(V_i)<\mu(E_i)+2^{-i}\varepsilon \qquad (i=1,2,3,\cdots)$$

令 $V=\bigcup_1^\infty V_i$ 并选择 $f \prec V$. 因为 $f$ 有紧的支集，可以看出对某个 $n$，有 $f \prec V_1 \cup \cdots \cup V_n$. 对(5)应用归纳法，于是得到

$$\Lambda f\leqslant\mu(V_1\cup\cdots\cup V_n)\leqslant\mu(V_1)+\cdots+\mu(V_n)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)+\varepsilon$$

因为对每个 $f \prec V$，此不等式成立，且 $\bigcup E_i \subset V$，由此得到

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\mu(V)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)+\varepsilon$$

由于 $\varepsilon$ 是任意的，故证明了(4).

II 如果 $K$ 是紧的，则 $K\in\mathfrak{M}_F$，并且

$$(7) \qquad \mu(K)=\inf\{\Lambda f: K \prec f\}$$

由此就得到定理的结论($b$).

**证明** 如果 $K \prec f$，$0<\alpha<1$，令 $V_\alpha=\{x:f(x)>\alpha\}$. 则 $K\subset V_\alpha$，并且当 $g \prec V_\alpha$ 时，$\alpha g<f$. 因此

$$\mu(K)\leqslant\mu(V_\alpha)=\sup\{\Lambda g: g \prec V_\alpha\}\leqslant\alpha^{-1}\Lambda f$$

令 $\alpha\to1$，最终得到

$$(8) \qquad \mu(K)\leqslant\Lambda f$$

因此，$\mu(K)<\infty$. 由于 $K$ 显然满足(3)，$K\in\mathfrak{M}_F$.

如果 $\varepsilon>0$，则存在 $V\supset K$，使 $\mu(V)<\mu(K)+\varepsilon$. 由 Urysohn

引理，存在 $f, K \prec f \prec V$. 因此

$$\Lambda f \leqslant \mu(V) \leqslant \mu(K) + \varepsilon$$

由此式并结合(8)式，就得到(7).

III 每个开集都满足(3). 因此，$\mathfrak{M}_F$ 包含每个 $\mu(V) < \infty$ 的开集 $V$.

**证明** 令 $\alpha$ 是一个实数，使得 $\alpha < \mu(V)$. 存在一个使 $\alpha < \Lambda f$ 的 $f \prec V$. 如果 $W$ 是包含 $f$ 的支集 $K$ 的任意一个开集，则 $f \prec W$，于是 $\Lambda f \leqslant \mu(W)$. 因此，$\Lambda f \leqslant \mu(K)$. 这就表示有满足 $\alpha < \mu(K)$ 的紧集 $K \subset V$，于是对于 $V$，(3)式成立.

IV 设 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，其中 $E_1, E_2, E_3, \cdots$ 是 $\mathfrak{M}_F$ 的互不相交的元素. 则

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \tag{9}$$

并且，如果 $\mu(E) < \infty$，则 $E \in \mathfrak{M}_F$.

**证明** 我们首先指出，如果 $K_1$ 和 $K_2$ 是不相交的紧集，则

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2) \tag{10}$$

取 $\varepsilon > 0$. 由 Urysohn 引理，存在 $f \in C_c(X)$，使得在 $K_1$ 上 $f(x) = 1$，在 $K_2$ 上 $f(x) = 0$. 由 II，存在 $g$ 使得

$$K_1 \cup K_2 \prec g \text{ 和 } \Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$$

注意 $K_1 \prec fg$ 和 $K_2 \prec (1-f)g$. 因为 $\Lambda$ 是线性的，由(8)式得到

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leqslant \Lambda(fg) + \Lambda(g - fg) = \Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$$

由于 $\varepsilon$ 是任意的，因此由 I 得到(10).

如果 $\mu(E) = \infty$，则由 I 得到(9). 因此，设 $\mu(E) < \infty$，并取 $\varepsilon > 0$. 因为 $E_i \in \mathfrak{M}_F$，存在紧集 $H_i \subset E_i$，有

$$\mu(H_i) > \mu(E_i) - 2^{-i}\varepsilon \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{11}$$

令 $K_n = H_1 \cup \cdots \cup H_n$，并对(10)应用归纳法，得到

(12) $$\mu(E)\geqslant\mu(K_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(H_i)>\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)-\varepsilon$$

由于对每个 $n$ 和每个 $\varepsilon>0$(12)成立，所以(9)的左边不小于右边。于是从 I 得到(9)。

但是，如果 $\mu(E)<\infty$ 而 $\varepsilon>0$，(9)表明，对某个 $N$

(13) $$\mu(E)\leqslant\sum_{i=1}^{N}\mu(E_i)+\varepsilon$$

由(12)，就得到 $\mu(E)\leqslant\mu(K_N)+2\varepsilon$，这就证明了 $E$ 满足(3)；因此，$E\in\mathfrak{M}_F$。

V 如果 $E\in\mathfrak{M}_F$ 和 $\varepsilon>0$，则存在紧集 $K$ 和开集 $V$，使得 $K\subset E\subset V$ 而 $\mu(V-K)<\varepsilon$。

**证明** 我们的定义表明，存在 $K$ 和 $V$ 使得

$$\mu(V)-\frac{\varepsilon}{2}<\mu(E)<\mu(K)+\frac{\varepsilon}{2}$$

因为 $V-K$ 是开集，由 III，$V-K\in\mathfrak{M}_F$。于是 IV 蕴涵着

$$\mu(K)+\mu(V-K)=\mu(V)<\mu(K)+\varepsilon$$

VI 如果 $A\in\mathfrak{M}_F$ 和 $B\in\mathfrak{M}_F$，则 $A-B$，$A\cup B$ 和 $A\cap B$ 属于 $\mathfrak{M}_F$。

**证明** 如果 $\varepsilon>0$，V 表明存在集 $K_i$ 和 $V_i$ 使得 $K_1\subset A\subset V_1$，$K_2\subset B\subset V_2$，并且 $\mu(V_i-K_i)<\varepsilon$，$i=1,2$。由于

$$A-B\subset V_1-K_2\subset(V_1-K_1)\cup(K_1-V_2)\cup(V_2-K_2)$$

I 表明

(14) $$\mu(A-B)\leqslant\varepsilon+\mu(K_1-V_2)+\varepsilon$$

因为 $K_1-V_2$ 是 $A-B$ 的紧的子集，(14)表明 $A-B$ 满足(3)，所以 $A-B\in\mathfrak{M}_F$。

由于 $A\cup B=(A-B)\cup B$，应用 IV，可证明 $A\cup B\in\mathfrak{M}_F$。因为 $A\cap B=A-(A-B)$，也有 $A\cap B\in\mathfrak{M}_F$。

VII $\mathfrak{M}$ 是 $X$ 中包含所有 Borel 集的 $\sigma$-代数.

**证明** 令 $K$ 是 $X$ 内的任一个紧集.

如果 $A\in\mathfrak{M}$，则 $A^c\cap K=K-(A\cap K)$，于是 $A^c\cap K$ 是 $\mathfrak{M}_F$ 的两个元素之差. 因此，$A^c\cap K\in\mathfrak{M}_F$，于是可以得出结论：$A\in\mathfrak{M}$ 蕴涵着 $A^c\in\mathfrak{M}$.

其次，设 $A=\bigcup_{1}^{\infty}A_i$，这里每个 $A_i\in\mathfrak{M}$. 令 $B_1=A_1\cap K$ 且

$$B_n=(A_n\cap K)-(B_1\cup\cdots\cup B_{n-1})\qquad(n=2,3,4,\cdots)\tag{15}$$

那末，由 VI 知 $\{B_n\}$ 是 $\mathfrak{M}_F$ 中的互不相交元素的序列，且 $A\cap K=\bigcup_{1}^{\infty}B_n$. 由 IV 得到 $A\cap K\in\mathfrak{M}_F$. 因此，$A\in\mathfrak{M}$.

最后，如果 $C$ 是闭集，则 $C\cap K$ 是紧的. 因此 $C\cap K\in\mathfrak{M}_F$，于是 $C\in\mathfrak{M}$. 特别，$X\in\mathfrak{M}$.

因此，我们证明了 $\mathfrak{M}$ 是 $X$ 中的一个 $\sigma$-代数，它含有 $X$ 的全体闭子集. 故 $\mathfrak{M}$ 含有 $X$ 内的全体 Borel 集.

VIII $\mathfrak{M}_F$ 恰好由那些使 $\mu(E)<\infty$ 的 $E\in\mathfrak{M}$ 所组成.

这蕴涵着定理中的 $(d)$.

**证明** 如果 $E\in\mathfrak{M}_F$，II 和 VI 蕴涵着对每个紧集 $K$，$E\cap K\in\mathfrak{M}_F$，因此，$E\in\mathfrak{M}$.

反之，设 $E\in\mathfrak{M}$，$\mu(E)<\infty$，并取 $\varepsilon>0$. 存在开集 $V\supset E$，而 $\mu(V)<\infty$；由 III 和 V，存在紧集 $K\subset V$，而 $\mu(V-K)<\varepsilon$. 因为 $E\cap K\in\mathfrak{M}_F$，存在紧集 $H\subset E\cap K$，而

$$\mu(E\cap K)<\mu(H)+\varepsilon$$

因为 $E\subset(E\cap K)\cup(V-K)$，由此得到

$$\mu(E)\leqslant\mu(E\cap K)+\mu(V-K)<\mu(H)+2\varepsilon$$

这就蕴涵着 $E\in\mathfrak{M}_F$.

IX $\mu$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的一个测度.

**证明** 直接由 IV 和 VIII 得到 $\mu$ 的可数可加性。

X 对每个 $f\in C_c(X)$, $\Lambda f=\int_X fd\mu$。

这就证明了(a)并完成此定理。

**证明** 显然,对实的 $f$ 证明就够了.而且,对每个实 $f\in C_c(X)$,只要证明不等式

$$\Lambda f\leqslant\int_X fd\mu \tag{16}$$

也就够了。因为,一旦(16)成立,$\Lambda$ 的线性表明

$$-\Lambda f=\Lambda(-f)\leqslant\int_X(-f)d\mu=-\int_X fd\mu$$

此不等式和(16)一起就说明(16)的等号成立。

令 $K$ 是实 $f\in C_c(X)$ 的支集, $[a, b]$是一个包含 $f$ 值域的区间(注意定理 2.10 的系),取 $\varepsilon>0$, 并对 $i=0,1,\cdots,n$ 选择 $y_i$, 使得 $y_i-y_{i-1}<\varepsilon$ 和

$$y_0<a<y_1<\cdots<y_n=b \tag{17}$$

令

$$E_i=\{x:y_{i-1}<f(x)\leqslant y_i\}\cap K \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{18}$$

由于 $f$ 连续, $f$ 是 Borel 可测的, 因此集 $E_i$ 是不相交的 Borel 集,它们的并是 $K$。于是存在开集 $V_i\supset E_i$,使得

$$\mu(V_i)<\mu(E_i)+\frac{\varepsilon}{n} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{19}$$

并对一切 $x\in V_i$,有 $f(x)<y_i+\varepsilon$。由定理 2.13, 存在函数 $h_i\prec V_i$,在 $K$ 上有 $\Sigma h_i=1$。因此 $f=\Sigma h_i f$,并且 II 表明

$$\mu(K)\leqslant\Lambda(\Sigma h_i)=\Sigma\Lambda h_i$$

由于 $h_i f\leqslant(y_i+\varepsilon)h_i$ 和在 $E_i$ 上 $y_i-\varepsilon<f(x)$,有

$$\Lambda f=\sum_{i=1}^{n}\Lambda(h_i f)\leqslant\sum_{i=1}^{n}(y_i+\varepsilon)\Lambda h_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(|a|+y_i+\varepsilon)\Lambda h_i-|a|\sum_{i=1}^{n}\Lambda h_i$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}(|a|+y_i+\varepsilon)[\mu(E_i)+\varepsilon/n]-|a|\mu(K)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\varepsilon)\mu(E_i)+2\varepsilon\mu(K)+\frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^{n}(|a|+y_i+\varepsilon)$$

$$\leqslant\int_X fd\mu+\varepsilon[2\mu(K)+|a|+b+\varepsilon]$$

因为 $\varepsilon$ 是任意的，故(16)成立。定理证明完毕。

## Borel 测度的正则性

**2.15 定义** 定义在局部紧的 Hausdorff 空间 $X$ 的全体 Borel 集所成 $\sigma$-代数上的测度 $\mu$ 称为 $X$ 上的 Borel 测度。设 $\mu$ 是正的，并且一个 Borel 集 $E\subset X$ 具有定理 2.14 的性质(c)或(d)，我们就分别称 $E$ 为外正则或内正则的。如果 $X$ 内的每个 Borel 集同时是外正则和内正则的，则称 $\mu$ 为正则的。

在 Riesz 定理的证明中，每个集 $E$ 的外正则性是在构作的过程中建立的，而内正则性则仅就开集和 $\mu(E)<\infty$ 的 $E\in\mathfrak{M}$ 作过证明。产生这一缺点是自然的。在定理 2.14 的假设下，我们无法证明 $\mu$ 的正则性；习题 17 介绍了一个例子。

然而，稍强的假设能给出一个正则测度。定理 2.17 指明了这一点。定理 2.18 说明，要是我们把假设更特殊化一些，一切正则性的问题都会消失干净。

**2.16 定义** 拓扑空间一个集 $E$ 称为 $\sigma$-紧的，如果 $E$ 是紧集的可数并。

测度空间(测度为 $\mu$)的一个集 $E$，如果 $E$ 是集 $E_i$ 的可数并，而 $\mu(E_i)<\infty$，那末称 $E$ 为有 $\sigma$-有限测度。

例如，在定理 2.14 所述的情况下，每个 $\sigma$-紧集有 $\sigma$-有限测度. 也容易看出，如果 $E\in\mathfrak{M}$, $E$ 有 $\sigma$-有限测度，则 $E$ 是内正则的.

**2.17 定理** 设 $X$ 是局部紧，$\sigma$-紧的 Hausdorff 空间. 如果 $\mathfrak{M}$ 和 $\mu$ 都象定理 2.14 所叙述的那样，则 $\mathfrak{M}$ 和 $\mu$ 有下述的性质:

(a) 如果 $E\in\mathfrak{M}$ 和 $\varepsilon>0$，则存在闭集 $F$ 和开集 $V$ 使得 $F\subset E\subset V$ 和 $\mu(V-F)<\varepsilon$.

(b) $\mu$ 是 $X$ 上的一个正则 Borel 测度.

(c) 如果 $E\in\mathfrak{M}$，则存在集 $A$ 和 $B$ 使得 $A$ 是一个 $F_\sigma$ 集，$B$ 是一个 $G_\delta$ 集，$A\subset E\subset B$ 且 $\mu(B-A)=0$.

作为(c)的推论，我们看出每个 $E\in\mathfrak{M}$ 是一个 $F_\sigma$ 集和一个测度为 0 的集的并.

**证明** 令 $X=K_1\cup K_2\cup K_3\cup\cdots$，其中 $K_n$ 是紧的. 如果 $E\in\mathfrak{M}$ 和 $\varepsilon>0$，则 $\mu(K_n\cap E)<\infty$，并存在开集 $V_n\supset K_n\cap E$，使得

$$(1)\qquad \mu(V_n-(K_n\cap E))<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

如果 $V=\bigcup V_n$，则 $V-E\subset\bigcup(V_n-(K_n\cap E))$，于是

$$\mu(V-E)<\frac{\varepsilon}{2}$$

用 $E^c$ 代替 $E$，并把此结果用到 $E^c$ 上: 存在开集 $W\supset E^c$ 使得 $\mu(W-E^c)<\frac{\varepsilon}{2}$. 如果 $F=W^c$，则 $F\subset E$ 并且 $E-F=W-E^c$. 于是得到(a).

如果 $F$ 是闭集，则 $F=\bigcup(K_n\cap F)$，每个 $K_n\cap F$ 是紧的，并且当 $n\to\infty$ 时，

$$\mu((K_1\cup\cdots\cup K_n)\cap F)\to\mu(F)$$

因此，由(a)得到(b).

如果对 $\varepsilon=1/j\,(j=1,2,3,\cdots)$ 应用(a)，就得到闭集 $F_j$ 和开集 $V_j$，使得 $F_j\subset E\subset V_j$ 并且 $\mu(V_j-F_j)<1/j$. 令 $A=\bigcup F_j$ 和 $B$

$=\bigcap V_j$. 则 $A\subset E\subset B$, $A$ 是一个 $F_\sigma$ 集, $B$ 是一个 $G_\delta$ 集, 并且由于 $B-A\subset V_j-F_j$, $n=1,2,3,\cdots$, 故 $\mu(B-A)=0$. 这就证明了(c).

**2.18 定理** 设 $X$ 是局部紧的 Hausdorff 空间. 它的每个开集是 $\sigma$-紧的. 设 $\lambda$ 是 $X$ 上的任一个正 Borel 测度, 对每个紧集 $K$, 有 $\lambda(K)<\infty$. 则 $\lambda$ 是正则的.

注意, 每个欧氏空间 $R^k$ 满足现在的假设, 因为 $R^k$ 中的每个开集是闭球的可数并.

**证明** 对 $f\in C_c(X)$, 令 $\Lambda f=\int_X fd\lambda$. 因为对每个紧集 $K$, $\lambda(K)<\infty$, $\Lambda$ 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函, 并且存在测度 $\mu$ 满足定理 2.17 的结论, 于是

$$(1)\qquad \int_X fd\lambda=\int_X fd\mu \qquad (f\in C_c(X))$$

设 $V$ 是 $X$ 中的开集. 则 $V=\bigcup H_i$, 而 $H_i$, $i=1,2,3,\cdots$ 是紧的. 选择 $f_1$ 使得 $H_1\prec f_1\prec V$. 选择好 $f_1,\cdots,f_n$ 以后, 设它们在 $V$ 中有支集 $K_1,\cdots,K_n$, 再选择 $f_{n+1}$ 使得

$$(2)\qquad H_1\cup\cdots\cup H_n\cup K_1\cup\cdots\cup K_n\prec f_{n+1}\prec V$$

在 $X$ 的每点, 序列 $\{f_n\}$ 单调递增到 $\chi_V$. 因此, (1)蕴涵着

$$(3)\qquad \lambda(V)=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\mu(V)$$

设 $E$ 是 $X$ 中的 Borel 集, 并取 $\varepsilon>0$. 由于 $\mu$ 满足定理 2.17, 存在闭集 $F$ 和开集 $V$ 使得 $F\subset E\subset V$ 和 $\mu(V-F)<\varepsilon$. 但 $V-F$ 是开集. 因此(3)表明 $\lambda(V-F)<\varepsilon$, 这就如在定理 2.17 中一样证明了 $\lambda$ 的正则性.

注: 对 $X$ 中的每个 Borel 集 $E$, 容易得到 $\lambda(E)=\mu(E)$.

习题 18 中举出了一个紧 Hausdorff 空间, 它包含了一个不是 $\sigma$-紧的开集, 并使上述定理不真.

## Lebesgue 测度

**2.19 欧氏空间** $k$ 维欧氏空间 $R^k$ 是一切点 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)$ 的集，它的坐标 $\xi_i$ 是实数，并有下述代数和拓扑结构：

如果 $x=(\xi_1, \cdots, \xi_k)$，$y=(\eta_1, \cdots, \eta_k)$，$\alpha$ 为实数，定义 $x+y$ 和 $\alpha x$ 如下：

(1) $$x+y=(\xi_1+\eta_1, \cdots, \xi_k+\eta_k), \alpha x=(\alpha\xi_1, \cdots, \alpha\xi_k)$$

这使 $R^k$ 成为一个实向量空间. 如果 $x\cdot y=\Sigma\xi_i\eta_i$ 和 $|x|=(x\cdot x)^{\frac{1}{2}}$，则由 Schwarz 不等式 $|x\cdot y|\leqslant|x|\,|y|$ 导出三角不等式

(2) $$|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|$$

因此，得到一个由 $\rho(x,y)=|x-y|$ 定义的度量. 我们假定这些事实是熟悉的，并将在第四章中以更一般的形式加以证明.

如果 $E\subset R^k$ 和 $x\in R^k$，则 $E$ 对于 $x$ 的平移是集

(3) $$E+x=\{y+x: y\in E\}$$

我们称形如

(4) $$W=\{x: \alpha_i<\xi_i<\beta_i, 1\leqslant i\leqslant k\}$$

的集或者用"$\leqslant$"代替任一个或所有的"$<$"而得的集为 $k$-胞腔；它的体积定义为

(5) $$\mathrm{vol}(W)=\prod_{i=1}^{k}(\beta_i-\alpha_i)$$

如果 $a\in R^k$ 和 $\delta>0$，我们称集

(6) $$Q(a;\delta)=\{x: \alpha_i\leqslant\xi_i<\alpha_i+\delta, 1\leqslant i\leqslant k\}$$

为以 $a$ 为顶点的 $\delta$-单元. 这里 $a=(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$.

对 $n=1, 2, 3, \cdots$，我们令 $P_n$ 是一切坐标是 $2^{-n}$ 的整数倍的 $x\in R^k$ 的集，令 $\Omega_n$ 是全体以 $P_n$ 的点为顶点的 $2^{-n}$-单元的集族. 我们需要 $\{\Omega_n\}$ 的下述四个性质. 第一到第三是显而易见的.

(*a*) 如果固定 $n$, 则每个 $x\in R^k$ 属于且仅属于 $\Omega_n$ 的一个元素.

(*b*) 如果 $Q'\in\Omega_n$, $Q''\in\Omega_r$, 而 $r<n$, 则 $Q'\subset Q''$ 或者 $Q'\cap Q''=\varnothing$.

(*c*) 如果 $Q\in\Omega_r$, 则 $\mathrm{vol}(Q)=2^{-rk}$; 如果 $n>r$, 则集 $P_n$ 恰好有 $2^{(n-r)k}$ 个点属于 $Q$.

(*d*) $R^k$ 中每个非空开集是属于 $\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup\cdots$ 中不相交单元的可数并.

**(*d*) 的证明** 如果 $V$ 是开集, 每个 $x\in V$ 属于含于 $V$ 内的一个开球; 因此, 存在属于某个 $\Omega_n$ 的 $Q$, 使 $x\in Q\subset V$. 换句话说, $V$ 是所有那些含于 $V$ 内且属于某个 $\Omega_n$ 的单元之并. 从此单元的集族中, 选出那些属于 $\Omega_1$ 的, 并从 $\Omega_2$, $\Omega_3$, $\Omega_4$, $\cdots$ 中去掉包含在任何一个已选单元之内的那些单元. 从余下的集族中, 选出属于 $\Omega_2$ 且含于 $V$ 的单元, 并在 $\Omega_3,\Omega_4,\Omega_5,\cdots$ 中去掉包含在已选单元之内的单元. 如果我们按这个方法继续进行下去, 由(*a*)和(*b*)就证明了(*d*).

**2.20 定理** 在 $R^k$ 中, 存在定义在 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 上的正完备测度 $m$, 具有下列性质:

(*a*) $m(W)=\mathrm{vol}(W)$, 对每个 $k$-胞腔成立.

(*b*) $\mathfrak{M}$ 包含 $R^k$ 中的一切 Borel 集; 更确切些, $E\in\mathfrak{M}$ 当且仅当存在集 $A\subset R^k$ 和 $B\subset R^k$, 使得 $A\subset E\subset B$, $A$ 是一个 $F_\sigma$ 集, $B$ 是一个 $G_\delta$ 集, 并且 $m(B-A)=0$. $m$ 也是正则的.

(*c*) $m$ 是平移不变的, 即是说, 对每个 $E\in\mathfrak{M}$ 和每个 $x\in R^k$ 成立.

$$m(E+x)=m(E)$$

(*d*) 如果 $\mu$ 是 $R^k$ 上任意一个正的平移不变 Borel 测度, 使得对每个紧集 $K$ 有 $\mu(K)<\infty$, 则存在常数 $c$, 使得对一切 Borel 集 $E\subset R^k$, $\mu(E)=cm(E)$.

$\mathfrak{M}$ 的元素是 $R^k$ 中的 Lebesgue 可测集；$m$ 是 Lebesgue 测度. 当需要明确这一点时，我们将记为 $m_k$，用以代替 $m$. 关于 $R^k$ 上其他测度的描述，请参看定理 8.14.

**证明** 设 $f$ 是 $R^k$ 上任一个复函数，具有紧的支集，定义

(1) $$\Lambda_n f = 2^{-nk}\sum_{x\in P_n} f(x) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

这里的 $P_n$ 与 2.19 节中的一样.

现设 $f\in C_c(R^k)$，$f$ 是实的. $W$ 是一个开的 $k$-胞腔，它包含 $f$ 的支集，并且 $\varepsilon>0$. $f$ 的一致连续性([26]，定理 4.19)表明存在一个整数 $N$ 及支集位于 $W$ 内的函数 $g$ 和 $h$，使得：(i) $g$ 和 $h$ 在属于 $\Omega_N$ 的每个单元上是常数，(ii) $g\leqslant f\leqslant h$，(iii) $h-g<\varepsilon$. 如果 $n>N$，性质 2.19($c$)表明

(2) $$\Lambda_N g=\Lambda_n g\leqslant \Lambda_n f\leqslant \Lambda_n h=\Lambda_N h$$

因此，$\{\Lambda_n f\}$ 的上、下极限至多相差 $\varepsilon\,\mathrm{vol}(W)$，并由于 $\varepsilon$ 的任意性，我们证明了极限

(3) $$\Lambda f=\lim_{n\to\infty}\Lambda_n f \qquad (f\in C_c(R^k))$$

的存在性.

可以直接得出 $\Lambda$ 是 $C_c(R^k)$ 上的正线性泛函.（事实上，$\Lambda f$ 正好是 $R^k$ 上的 Riemann 积分. 为了不致于依赖多元 Riemann 积分的任何一个定理，我们才讨论上述的构造）我们定义 $m$ 和 $\mathfrak{M}$ 为定理 2.14 中与 $\Lambda$ 相对应的测度和 $\sigma$-代数.

由于定理 2.14 给出一个完备测度而 $R^k$ 是 $\sigma$-紧的，由定理 2.17 即推出定理 2.20 的断言($b$).

为证明($a$)，令 $W$ 是 2.19(4) 的开胞腔，$E_r$ 是属于 $\Omega_r$ 而闭包含于 $W$ 的单元的并，并取 $f$ 使得 $\overline{E}_r\prec f\prec W$. 于是 $\Lambda f$ 的构造表明

(4) $$\Lambda f \geqslant \prod_{i=1}^{k}(\beta_i-\alpha_i-2^{1-r})$$

令 $r\to\infty$，并回顾定理 2.14 的构造，有

(5) $$m(W)=\sup\{\Lambda f: f\prec W\}$$

因此，对每个开胞腔 $W$，$m(W)=\mathrm{vol}(W)$，又由于每个胞腔是开胞腔递减序列的交，由此得到($a$)。

由于 $\mathrm{vol}(W+x)=\mathrm{vol}(W)$，由此推出

(6) $$m(E+x)=m(E) \qquad (x\in R^k)$$

对每个胞腔 $E$ 成立；特别，对每个单元 $E$，(6)成立；因此，由性质 2.19($d$)推出，对每个开集 $E$，(6)成立；这样一来，由于

$$m(E)=\inf\{m(V): E\subset V, V \text{ 是开集}\}$$

(6)对每个 $E\in\mathfrak{M}$ 也成立。这就证明了($c$)。

最后，设 $\mu$ 是关于 $R^k$ 上的平移不变的 Borel 测度。令 $c=\mu(Q_0)$，这里 $Q_0$ 是 1-单元。由于 $Q_0$ 是 $2^{nk}$ 个不相交的 $2^{-n}$-单元的并，而这些单元彼此的每一个可由另一个平移得出，又由于 $m(Q_0)=1$，所以对每个 $2^{-n}$-单元 $Q$ 有

(7) $$2^{nk}\mu(Q)=\mu(Q_0)=c\,m(Q_0)=2^{nk}c\,m(Q)$$

由性质 2.19($d$)推知，对每个开集 $E$ 有 $\mu(E)=c\,m(E)$。$m$ 和 $\mu$ 的正则性表明(定理 2.18)，上面的那个方程对每个 Borel 集 $E$ 都是成立的。这就完成了证明。

**2.21 评注** 如果 $m$ 是 $R^k$ 上的 Lebesgue 测度，习惯上用记号 $L^1(R^k)$ 来代替 $L^1(m)$。如果 $E$ 是 $R^k$ 的 Lebesgue 可测子集，并把 $m$ 限制在 $E$ 的可测子集上，显然就得到一个新的测度空间。术语"在 $E$ 上，$f\in L^1$"或"$f\in L^1(E)$"是用来指明 $f$ 在这个测度空间上是可积的。

如果 $k=1$，$I$ 是集 $(a,b)$，$(a,b]$，$[a,b)$，$[a,b]$ 中任一个，如果 $f\in L^1(I)$，习惯上用记号

$$\int_a^b f(x)dx \text{ 来代替 } \int_I f dm$$

由于任意单个点的 Lebesgue 测度为 0，这就使在上述四个集上进行积分都没有什么差别。

如果 $f$ 是 $[a,b]$ 上的连续复函数，则 $f$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分和 Lebesgue 积分一致。当 $f(a)=0, f(b)=0$，并且对 $x<a$ 和 $x>b$，定义 $f(x)$ 是 0 时，这是很明显的。推广到一般的情形也没有什么困难。实际上，对 $[a,b]$ 上每个 Riemann 可积的 $f$，同一事实依然成立。由于以后没有机会讨论 Riemann 可积函数，我们省略了证明，请参阅[26]的定理 10.33。

至此，某些读者可能会产生两个自然的问题：每个 Lebesgue 可测集是 Borel 集吗？$R^k$ 的每个子集是 Lebesgue 可测吗？纵然 $k=1$，这两种情形的答案都是否定的。

通过一种势的推理能够解决第一个问题，我们简述如下。令 $c$ 是连续统（实直线，或者等价地说，整数的一切子集族）的势。我们知道，$R^k$ 有可数基（中心在 $R^k$ 的某个可数稠密子集，带有有理数半径的开球），$\mathscr{B}_k$（$R^k$ 的一切 Borel 集的集族）是由这个基生成的 $\sigma$-代数。由此得到（我们略去证明），$\mathscr{B}_k$ 有势 $c$。另一方面，存在 Cantor 集 $E\subset R^1$，而 $m(E)=0$（习题 5）。$m$ 的完备性蕴涵着 $E$ 的 $2^c$ 个子集中的每一个是 Lebesgue 可测的。由于 $2^c>c$，大部分 $E$ 的子集不是 Borel 集。

第二个问题的否定答案是选择公理的一个推论。下述例子将指明这点。

**2.22 例** 对实数 $x$ 和 $y$，当且仅当 $x-y$ 是有理数的时候，记为 $x\sim y$。显然，$x\sim x$，若 $x\sim y$ 则 $y\sim x$，并且 $x\sim y$，$y\sim z$ 则 $x\sim z$。因此"$\sim$"是个等价关系（用代数术语来说，令 $Q$ 是有理数加法群，每个等价类是 $Q$ 在 $R^1$ 中的一个陪集）。令 $E$ 是 $(0,1)$ 内的一

个集，它刚好含每个等价类的一个点（这样一个集$E$的存在是选择公理的直接应用的结果）．我们断言$E$不是Lebesgue可测的．

象在2.19节中一样，令$E+r=\{x+r: x\in E\}$．我们需要$E$的两个性质：

(a) 如果$x\in(0, 1)$，则对某个有理数$r\in(-1,1)$，有$x\in E+r$．

(b) 如果$r$和$s$是不同的有理数，则$(E+r)\cap(E+s)=\varnothing$．

证明(a)，注意，每个$x\in(0,1)$对应有一个$y\in E$，使得$x\sim y$．如果$r=x-y$，则$x=y+r\in E+r$．

证明(b)，设$x\in(E+r)\cap(E+s)$．则对某个$y\in E$，$z\in E$，$x=y+r=z+s$．由于$y-z=s-r\neq 0$，得出$y\sim z$，从而$E$包含两个等价的点．而这是与$E$的选择相矛盾的．

现在，设$E$是Lebesgue可测的，并且令$\alpha=m(E)$．规定$S=\bigcup(E+r)$是这样的并，这里$r$取遍$(-1, 1)$中的一切有理数．由(b)，集$E+r$是两两不相交的；由于$m$是平移不变的，对每个$r$，$m(E+r)=\alpha$．由于$S\subset(-1,2)$，$m(S)\leqslant 3$．于是，由$m$的可数可加性，不得不有$\alpha=0$．因此，$m(S)=0$．但是(a)可推出$(0, 1)\subset S$，故$1\leqslant m(S)$．这就得到矛盾．

## 可测函数的连续性

由于连续函数在Borel测度、特别在Lebesgue测度的结构中占有如此突出的地位，似乎有理由相信在连续函数和可测函数之间会存在着某些有趣的联系．本节将给出两个这种类型的定理．

在这两个定理中，我们将设$\mu$是局部紧Hausdorff空间$X$上的一个测度，它有定理2.14中所述及的性质．特别，$\mu$可以是某个$R^k$上的Lebesgue测度．

**2.23 Lusin定理** 设$f$是$X$上的复可测函数，$\mu(A)<\infty$，

如果 $x\notin A$, $f(x)=0$, 并且 $\varepsilon>0$. 则存在一个 $g\in C_c(X)$, 使得

(1) $$\mu(\{x: f(x)\neq g(x)\})<\varepsilon$$

并且, 还可以做到

(2) $$\sup_{x\in X}|g(x)|\leqslant\sup_{x\in X}|f(x)|$$

**证明** 首先设 $0\leqslant f<1$, 并且 $A$ 是紧的. 如定理 1.17 中的证明一样, 作出一个收敛于 $f$ 的序列 $\{s_n\}$. 并且令 $t_1=s_1$ 和对 $n=2,3,4,\cdots$, $t_n=s_n-s_{n-1}$. 则 $2^n t_n$ 是集 $T_n\subset A$ 的特征函数, 而且

(3) $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n(x)\qquad(x\in X)$$

固定开集 $V$ 使得 $A\subset V$, 而且 $\overline{V}$ 是紧的. 则存在紧集 $K_n$ 和开集 $V_n$ 使得 $K_n\subset T_n\subset V_n\subset V$ 且 $\mu(V_n-K_n)<2^{-n}\varepsilon$. 由 Urysohn 引理, 存在函数 $h_n$ 使得 $K_n\prec h_n\prec V_n$. 定义

(4) $$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}h_n(x)\qquad(x\in X)$$

这个级数在 $X$ 上一致收敛, 因而 $g$ 是连续的. 并且, $g$ 的支集含于 $\overline{V}$ 中. 由于除开在 $V_n-K_n$ 中以外, $2^{-n}h_n(x)=t_n(x)$, 所以除开在 $\bigcup(V_n-K_n)$ 中以外, $g(x)=f(x)$, 并且后一个集有比 $\varepsilon$ 小的测度. 这样, 当 $A$ 是紧的, $0\leqslant f<1$ 时, (1)式成立.

由此得到, 当 $A$ 是紧的, $f$ 是有界可测函数时, (1)式成立. $A$ 的紧性容易去掉, 因为, 如果 $\mu(A)<\infty$, 则 $A$ 包含一个紧集 $K$, 使 $\mu(A-K)$ 小于事先给定的任意正数. 再者, 如果 $f$ 是个复可测函数, $B_n=\{x: |f(x)|>n\}$, 则 $\bigcap B_n=\varnothing$, 于是由定理 1.19(e), $\mu(B_n)\to 0$. 由于除开在 $B_n$ 上以外, $f$ 同有界函数 $(1-\chi_{B_n})\cdot f$ 一致, 故在一般情形下(1)也成立.

最后, 令 $R=\sup\{|f(x)|: x\in X\}$, 并定义, 若 $|z|\leqslant R$, $\varphi(z)=z$, 若 $|z|>R$, $\varphi(z)=Rz/|z|$. 则 $\varphi$ 是复平面到半径为 $R$ 的圆盘上

的连续映射．如果 $g$ 满足(1)，$g_1=\varphi\circ g$，则 $g_1$ 满足(1)和(2)．

**系** 设满足 Lusin 定理的条件，且 $|f|\leqslant 1$．则存在序列 $\{g_n\}$，使得 $g_n\in C_c(X)$，$|g_n|\leqslant 1$，且

(5) $$f(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x)\quad \text{a. e.}$$

**证明** 由定理得出，对每个 $n$ 对应有一个 $g_n\in C_c(X)$，而 $|g_n|\leqslant 1$，使得 $\mu(E_n)\leqslant 2^{-n}$．这里的 $E_n$ 是一切使 $f(x)\neq g_n(x)$ 的 $x$ 的集．对几乎每个 $x$，它至多属于有限多个集 $E_n$(定理 1.41)．对任意一个这样的 $x$ 和充分大的 $n$ 都有 $f(x)=g_n(x)$．这就得到(5)．

**2.24 Vitali-Carathéodory 定理** 设 $f\in L^1(\mu)$，$f$ 是实值的，并且 $\varepsilon>0$．则在 $X$ 上存在函数 $u$ 和 $v$ 使得 $u\leqslant f\leqslant v$，$u$ 是上半连续且有上界的，$v$ 是下半连续且有下界的，且

(1) $$\int_X(v-u)d\mu<\varepsilon$$

**证明** 首先假定 $f\geqslant 0$，并且 $f$ 不恒等于 0．由于 $f$ 是一个简单函数 $s_n$ 的递增序列的点态极限，$f$ 就是简单函数 $t_n=s_n-s_{n-1}$(取 $s_0=0$)的和．再由于 $t_n$ 是特征函数的线性组合，就存在可测集 $E_i$(不一定要互不相交)和常数 $c_i>0$，使得

(2) $$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\chi_{E_i}(x)\qquad (x\in X)$$

由于

(3) $$\int_X fd\mu=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\mu(E_i)$$

级数(3)是收敛的．存在紧集 $K_i$ 和开集 $V_i$ 使得 $K_i\subset E_i\subset V_i$，且

(4) $$c_i\mu(V_i-K_i)<2^{-i-1}\varepsilon\quad (i=1,2,3,\cdots)$$

令

(5) $$v=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\chi_{V_i},\ u=\sum_{i=1}^{N}c_i\chi_{K_i}$$

$N$是这样选择的，使得

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_i \mu(E_i) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

因此，$v$ 是下半连续的，$u$ 是上半连续的，$u \leqslant f \leqslant v$，并且

$$v-u=\sum_{i=1}^{N} c_i(\chi_{V_i}-\chi_{K_i})+\sum_{N+1}^{\infty} c_i \chi_{V_i}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\chi_{V_i}-\chi_{K_i})+\sum_{N+1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}$$

于是由(4)和(6)得到(1).

在一般情况下，记 $f=f^+-f^-$，如上一样，对 $f^+$ 作出 $u_1$ 和 $v_1$，对 $f^-$ 作出 $u_2$ 和 $v_2$，并令 $u=u_1-v_2$，$v=v_1-u_2$. 由于 $-v_2$ 是上半连续的，而两个上半连续函数之和是上半连续的(对下半连续也有类似的情况；我们把证明留作习题)，故 $u$ 和 $v$ 有所要求的性质.

## 习　题

1　令 $\{f_n\}$ 是 $R^1$ 上的非负实函数的序列，考虑下述四个命题：

(a)　如果 $f_1$ 和 $f_2$ 是上半连续的，则 $f_1+f_2$ 是上半连续的.

(b)　如果 $f_1$ 和 $f_2$ 是下半连续的，则 $f_1+f_2$ 是下半连续的.

(c)　如果每个 $f_n$ 是上半连续的，则 $\sum_1^{\infty} f_n$ 是上半连续的.

(d)　如果每个 $f_n$ 是下半连续的，则 $\sum_1^{\infty} f_n$ 是下半连续的.

证明其中的三个是正确的，但有一个是错误的. 如果省去“非负”一词会产生什么结果？如果用一般的拓扑空间代替 $R^1$ 会影响命题的真实性吗？

2　设 $f$ 是 $R^1$ 上的任意复函数，规定

$$\varphi(x,\delta)=\sup\{|f(s)-f(t)|: s,t\in(x-\delta,x+\delta)\}$$

$$\varphi(x)=\inf\{\varphi(x,\delta): \delta>0\}$$

证明 $\varphi$ 是上半连续的，并且当且仅当 $\varphi(x)=0$ 时 $f$ 在点 $x$ 处连续，因此任何复函数连续点的集都是一个 $G_\delta$ 集.

用一般拓扑空间代替 $R^1$ 后，表述并证明类似的命题.

3 设 $X$ 是一个度量空间，其度量为 $\rho$. 对任意非空集 $E\subset X$, 规定

$$\rho_E(x)=\inf\{\rho(x,y):y\in E\}$$

证明 $\rho_E$ 是 $X$ 上的一致连续函数. 如果 $A$ 和 $B$ 是 $X$ 的不相交非空闭子集，检验函数

$$f(x)=\frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x)+\rho_B(x)}$$

是否满足 Urysohn 引理.

4 检验 Riesz 定理的证明，并证明下述两个命题:

(a) 如果 $E_1\subset V_1$ 和 $E_2\subset V_2$, 而 $V_1$、$V_2$ 是不相交的开集，则 $\mu(E_1\cup E_2)=\mu(E_1)+\mu(E_2)$ 即使 $E_1$ 和 $E_2$ 不属于 $\mathfrak{M}$ 时也成立.

(b) 如果 $E\in\mathfrak{M}_F$, 则 $E=N\cup K_1\cup K_2\cup\cdots$, 其中 $\{K_i\}$ 是不相交的可数紧集族，并且 $\mu(N)=0$.

在习题 5 到 8 中，$m$ 表示 $R^1$ 上的 Lebesgue 测度.

5 令 $E$ 是熟知的 Cantor 三分(middle thirds)集. 证明 $m(E)=0$, 即使 $E$ 和 $R^1$ 有相同的势.

6 构造一个全不连通的紧集 $K\subset R^1$, 使得 $m(K)>0$ ($K$ 没有多于一点的连通子集).

如果 $V$ 是下半连续的, $v\leqslant\chi_K$, 证明确实有 $v\leqslant 0$. 因此 $\chi_K$ 不能在 Vitali-Carathéodory 定理的意义下，用下半连续函数从下面逼近.

7 给定 $\varepsilon>0$, 构造一个开集 $E\subset[0,1]$, 它在 $[0,1]$ 中是稠密的，使得 $m(E)=\varepsilon$ ($A$ 在 $B$ 中稠密意思是说 $A$ 的闭包包含 $B$).

8 构造一个 Borel 集 $E\subset R^1$, 使得对每个非空开区间 $I$ 有

$$0<m(E\cap I)<m(I)$$

对这样一个集 $E$, 有 $m(E)<\infty$ 的可能吗?

9 在 $[0,1]$ 上构造一个连续函数序列 $f_n$, 使得 $0\leqslant f_n\leqslant 1$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$$

然而，却没有一个 $x\in[0,1]$ 能使序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛.

10 如果 $\{f_n\}$ 是 $[0,1]$ 上连续函数序列，使得 $0\leqslant f_n\leqslant 1$, 且当 $n\to\infty$ 时，对每个 $x\in[0,1]$, $f_n(x)\to 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$$

试一试，不用任何测度理论和有关 Lebesgue 积分的定理来证明它。（这是为了使你对 Lebesgue 积分的力量有个印象. W. F. Eberlein 在 1957年 Communications on Pure and Applied Mathematics vol. X, pp. 357-360 中给出了一个漂亮的证明.）

11 设 $\mu$ 是紧 Hausdorff 空间 $X$ 上的一个正则 Borel 测度；假定 $\mu(X)=1$. 证明存在一个紧集 $K\subset X$（$\mu$ 的承载集或支集）使得 $\mu(K)=1$. 但对 $K$ 的每个紧的真子集 $H$ 有 $\mu(H)<1$.

提示：令 $K$ 是一切紧集 $K_\alpha$ 的交，而 $\mu(K_\alpha)=1$；证明每个包含 $K$ 的开集 $V$ 也包含某个 $K_\alpha$. $\mu$ 的正则性是需要的；比较习题 18. 证明 $K^c$ 是 $X$ 中测度为 0 的最大开集.

12 证明 $R^1$ 的每个紧子集是一个 Borel 测度的支集.

13 $R^1$ 的每个紧子集是一个连续函数的支集，对吗？如果不对，你能把 $R^1$ 中是连续函数支集的一切紧集的类刻划出来吗？在其他拓扑空间你的刻划也正确吗？

14 如果 $f$ 是 $R^1$ 上 Lebesgue 可测复函数，证明在 $R^1$ 上存在一个 Borel 函数 $g$，使得 $f=g$ a. e. $[m]$.

15 当 $n\to\infty$ 时，很容易推测出

$$\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}dx \quad 和 \quad \int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$$

的极限. 证明你的推测是正确的.

16 设 $m$ 是关于 $R^k$ 的 Lebesgue 测度，证明 $m(-E)=m(E)$，这里

$$-E=\{-x: x\in E\}$$

因此，对一切 $f\in L^1(R^k)$ 有

$$\int_{R^k} f(x)dx=\int_{R^k} f(-x)dx$$

17 设 $X$ 是带下述拓扑的平面：一个集是开集当且仅当它与每条铅垂线的交，对 $R^1$ 的通常拓扑而言是该线的开子集. 证明 $X$ 是局部紧的 Hausdorff 空间. 如果 $f\in C_c(X)$，令 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $x$ 的这样的值，对至少一个 $y$，$f(x,y)\neq 0$（这样的 $x$ 仅有有限多个!），并定义

$$\Lambda f=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_j, y)dy$$

根据定理 2.14，令 $\mu$ 是与 $\Lambda$ 对应的测度. 如果 $E$ 是 $x$ 轴，证明即使对每个紧

集 $K\subset E$, $\mu(K)=0$, 仍然有 $\mu(E)=\infty$.

18　此题较前面任一题都需要较多的集论技巧. 令 $X$ 是良序的不可数集, 有最后元素 $\omega_1$, 使得 $\omega_1$ 的每个先行元素至多有可数多个先行元素("构造": 取任何良序集, 使它有元素, 其先行元素是不可数的. 令 $\omega_1$ 是这些元素的第一个; 称 $\omega_1$ 为第一个不可数序数). 对 $\alpha\in X$, 令 $P_\alpha[S_\alpha]$ 是 $\alpha$ 的一切先行元素(后继元素)的集. 如果 $X$ 的一个子集是 $P_\alpha$ 或 $S_\beta$ 或 $P_\alpha\cap S_\beta$, 或这种子集的并, 则称它为开集. 证明 $X$ 因此是一个紧 Hausdorff 空间 (提示: 没有一个良序集含有一个无限递减序列).

证明点 $\omega_1$ 的余集是一个开集, 但不是 $\sigma$-紧集.

证明对每个 $f\in C(X)$ 对应一个 $\alpha\neq\omega_1$, 使得 $f$ 在 $S_\alpha$ 上是常数.

证明 $X$ 的不可数紧子集的每个可数集族 $\{K_n\}$ 的交是不可数的(提示: 在 $X$ 内考虑递增可数序列的极限, 它与每个 $K_n$ 相交于无限多点).

令 $\mathfrak{M}$ 是一切 $E\subset X$ 的集族, 使得或者 $E\cup\{\omega_1\}$ 或者 $E^c\cup\{\omega_1\}$ 包含一个不可数紧集; 在第一种情况下, 定义 $\lambda(E)=1$; 在第二种情况下, 定义 $\lambda(E)=0$. 证明 $\mathfrak{M}$ 是一个包含 $X$ 内全体 Borel 集的 $\sigma$-代数, $\lambda$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的测度, 但不是正则的($\omega_1$ 的每个邻域有测度 1), 而且对每个 $f\in C(X)$

$$f(\omega_1)=\int_X f\,d\lambda$$

试刻划定理 2.14 中与这个线性泛函对应的正则的 $\mu$.

19　如果 $\mu$ 是任意一个正测度并且 $f\in L^1(\mu)$, 证明 $\{x: f(x)\neq 0\}$ 有 $\sigma$-有限测度.

20　如果 $X$ 是集 $X_i$ 的可数并, 而 $\mu(X_i)<\infty$, 则称集 $X$ 上的正测度 $\mu$ 为 $\sigma$-有限. 证明当且仅当存在 $f\in L^1(\mu)$ 使得对每个 $x\in X$ 有 $f(x)>0$ 时, $\mu$ 为 $\sigma$-有限.

# 第三章 $L^p$-空 间

## 凸函数和不等式

分析中许多最普通的不等式都有其凸性概念方面的起源.

**3.1 定义** 定义在开区间$(a,b)$上的实函数 $\varphi$，这里$-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$，如果不等式

$$\varphi((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant(1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y) \tag{1}$$

当 $a<x<b$，$a<y<b$，和 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 时成立，$\varphi$ 就称为凸的.

从图形上看，条件就是"当 $x<t<y$ 时，点$(t,\varphi(t))$应该在平面内的两点$(x,\varphi(x))$和$(y,\varphi(y))$的联线上或者在它的下方."同时(1)等价于要求

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}\leqslant\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} \tag{2}$$

对 $a<s<t<u<b$ 成立.

微分中值定理和(2)一起可直接证明"实的可微函数$\varphi$是在$(a,b)$上凸的充要条件是，当$a<s<t<b$时，$\varphi'(s)\leqslant\varphi'(t)$"，即当且仅当导函数 $\varphi'$ 是单调递增函数.

例如，指数函数在$(-\infty,\infty)$上就是凸的.

**3.2 定理** 如果$\varphi$是在$(a,b)$上凸的，则$\varphi$在$(a,b)$上连续.

**证明** 证明的思想很容易用几何的语言表达. 担心不"严格"的人们请把它转译为 $\varepsilon$ 和 $\delta$ 的说法.

假定 $a<s<x<y<t<b$. 把平面内的点$(s,\varphi(s))$记为 $S$，类似地处理 $x,y,t$. 则 $X$ 在 $SY$ 直线上或它的下方，$Y$ 在过 $S$ 和 $X$ 的直线上或它的上方；同时 $Y$ 在 $XT$ 上或它的下方. 当 $y\to x$ 时，

得出 $Y\to X$. 即 $\varphi(y)\to\varphi(x)$. 用同样的方法处理左极限便得出 $\varphi$ 的连续性.

注意，这个定理依赖于我们的讨论是在开区间上进行的这一事实，比如说，若在$[0,1)$上 $\varphi(x)=0$ 且 $\varphi(1)=1$，则 $\varphi$ 在$[0,1]$上不是连续的，但它满足 3.1(1).

**3.3 定理** (Jensen 不等式) 设 $\mu$ 是在集 $\Omega$ 内的 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 上的正测度，使得 $\mu(\Omega)=1$. 如果 $f$ 是在 $L^1(\mu)$ 内的实函数，对所有的 $x\in\Omega$，$a<f(x)<b$，且 $\varphi$ 是在$(a,b)$上凸的，则

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right)\leqslant\int_\Omega(\varphi\circ f)d\mu \tag{1}$$

注：不排除 $a=-\infty$ 和 $b=\infty$ 的情况.

**证明** 令 $t=\int_\Omega f d\mu$，则 $a<t<b$. 若 $\beta$ 是在 3.1(2)左边的商的上确界，这里 $a<s<t$，则对任一 $u\in(t,b)$，$\beta$ 不大于在 3.1(2)右边的商. 由此得出

$$\varphi(s)\geqslant\varphi(t)+\beta(s-t)\qquad(a<s<b) \tag{2}$$

因此

$$\varphi(f(x))-\varphi(t)-\beta(f(x)-t)\geqslant 0 \tag{3}$$

对每一个 $x\in\Omega$ 成立. 因为 $\varphi$ 是连续的，$\varphi\circ f$ 便是可测的. 若在(3)式的两边对 $\mu$ 积分，从我们关于 $t$ 的选择和假定 $\mu(\Omega)=1$ 便得出(1)式.

为给出一个例子，取 $\varphi(x)=e^x$. 则(1)式变成

$$\exp\left\{\int_\Omega f d\mu\right\}\leqslant\int_\Omega e^f d\mu \tag{4}$$

如果 $\Omega$ 是一个有限集，比如说由点 $p_1,\cdots,p_n$ 组成，且若

$$\mu(\{p_i\})=\frac{1}{n},\ f(p_i)=x_i$$

对于实的 $x_i$，(4)变成

(5) $$\exp\left\{\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)\right\}\leqslant\frac{1}{n}(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n})$$

令 $y_i=e^{x_i}$，获得 $n$ 个正数的算术平均与几何平均之间的熟悉的不等式:

(6) $$(y_1y_2\cdots y_n)^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}(y_1+\cdots+y_n)$$

从这里回到(4)式，那末

(7) $$\exp\left\{\int_\Omega \log g d\mu\right\}\leqslant\int_\Omega g d\mu$$

的左边和右边为什么经常地被分别称为正函数 $g$ 的几何平均值和算术平均值应该变得清楚了.

如果取 $\mu(\{p_i\})=\alpha_i>0$，这里 $\Sigma\alpha_i=1$. 则代替(6)式，我们得到

(8) $$y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}\cdots y_n^{\alpha_n}\leqslant\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_ny_n$$

这些恰好是为定理 3.3 中所包含的少数几个范例.

其逆命题，见习题 20.

**3.4 定义** 如果 $p$ 和 $q$ 都是正实数，使得 $p+q=pq$，或等价地说

(1) $$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

则称 $p$ 和 $q$ 为一对共轭指数. 显然(1)蕴涵着 $1<p<\infty$ 和 $1<q<\infty$. 一个重要的特殊情况是 $p=q=2$.

当 $p\to1$ 时，(1) 迫使 $q\to\infty$. 因而 1 和$\infty$也被看作一对共轭指数.

**3.5 定理** 设 $p$ 和 $q$ 是共轭指数，$1<p<\infty$. $X$ 是一个具有测度 $\mu$ 的测度空间. 设 $f$ 和 $g$ 是 $X$ 上的可测函数，其值域为 $[0,\infty]$. 则

(1) $$\int_X fg d\mu\leqslant\left\{\int_X f^p d\mu\right\}^{1/p}\left\{\int_X g^q d\mu\right\}^{1/q}$$

并且

(2) $$\left\{\int_X (f+g)^p d\mu\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int_X f^p d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int_X g^p d\mu\right\}^{1/p}$$

成立.

不等式(1)是 Hölder 不等式; (2)是 Minkowski 不等式. 若 $p=q=2$, (1)就是大家知道的 Schwarz 不等式.

**证明** 设 $A$ 和 $B$ 是(1)式右边的两个因子. 若 $A=0$, 则 $f=0$ a.e.(由定理 1.39); 因此 $fg=0$ a.e., 所以(1)成立. 若 $A>0$ 且 $B=\infty$, (1)也是平凡的. 所以只需要考虑 $0<A<\infty$, $0<B<\infty$ 的情况. 令

(3) $$F=\frac{f}{A},\quad G=\frac{g}{B}$$

这给出了

(4) $$\int_X F^p d\mu=\int_X G^q d\mu=1$$

如果 $x\in X$ 是使得 $0<F(x)<\infty$ 和 $0<G(x)<\infty$ 的点, 则存在实数 $s$ 和 $t$ 使得 $F(x)=e^{s/p}$, $G(x)=e^{t/q}$. 因为 $1/p+1/q=1$, 指数函数的凸性蕴涵着

(5) $$e^{s/p+t/q}\leqslant p^{-1}e^s+q^{-1}e^t$$

由此得出

(6) $$F(x)G(x)\leqslant p^{-1}F(x)^p+q^{-1}G(x)^q$$

对每一个 $x\in X$ 成立. 根据(4), (6)式的积分产生

(7) $$\int_X FG\,d\mu\leqslant p^{-1}+q^{-1}=1$$

把(3)代入(7)式, 便得(1).

注意, (6)也能作为不等式 3.3(8)的特殊情况得出.

为了证明(2), 记

(8) $$(f+g)^p=f\cdot(f+g)^{p-1}+g\cdot(f+g)^{p-1}$$

Hölder 不等式给出

$$(9)\qquad \int f\cdot(f+g)^{p-1}\leqslant\left\{\int f^p\right\}^{1/p}\left\{\int(f+g)^{(p-1)q}\right\}^{1/q}$$

设(9′)是在(9)内交换 $f$ 和 $g$ 的位置而得的不等式. 因为 $(p-1)q=p$, (9)和(9′)相加给出

$$(10)\qquad \int(f+g)^p\leqslant\left\{\int(f+g)^p\right\}^{1/q}\left[\left\{\int f^p\right\}^{1/p}+\left\{\int g^p\right\}^{1/p}\right]$$

显然,只要证明(2)式在左边大于 0 而右边小于∞的场合成立就足够了. 函数 $t^p$ 在 $0<t<\infty$ 上的凸性表明

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p\leqslant\frac{1}{2}(f^p+g^p)$$

因此(2)的左边小于∞, 这样, 假如用(10)右边的第一个因式除(10)的两边, 记住 $1-1/q=1/p$, 从(10)式就可得出(2). 于是完成了证明.

知道在不等式中等号能够成立的条件有时是有用的. 在许多情况下,这方面的信息可通过考察不等式的证明得到.

比如, 在(7)式中等号成立当且仅当(6)式的等号对几乎每一个 $x$ 成立. 在(5)中, 当且仅当 $s=t$ 时等号成立. 因此, 若假定(4)成立, 则“$F^p=G^q$ a. e.”是(7)式的等号成立的充要条件. 用原来函数 $f$ 和 $g$ 的话来说,则获得下列结论:

假定 $A<\infty$ 和 $B<\infty$, (1)的等号成立当且仅当存在两个不同时为 0 的常数 $\alpha$ 和 $\beta$, 使得 $\alpha f^p=\beta g^q$ a. e.

我们把(2)式等号成立的类似的讨论留作习题.

## $L^p$-空间

在这一节里, $X$ 是一个具有正测度 $\mu$ 的任意的测度空间.

**3.6 定义** 如果 $0<p<\infty$ 且 $f$ 是 $X$ 上的一个复可测函数, 定义

(1) $$\|f\|_p=\left\{\int_X|f|^p d\mu\right\}^{1/p}$$

且设 $L^p(\mu)$ 由所有满足

(2) $$\|f\|_p<\infty$$

的 $f$ 组成. 称 $\|f\|_p$ 为 $f$ 的 $L^p$-范数.

如果 $\mu$ 是 $R^k$ 上的 Lebesque 测度, 象在 2.21 节一样, 记 $L^p(R^k)$ 以代替 $L^p(\mu)$. 若 $\mu$ 是集 $A$ 上的计数测度, 习惯上用 $l^p(A)$ 记对应的 $L^p$-空间. 当 $A$ 可数时, 便简记为 $l^p$. $l^p$ 的一个元素可以看作一个复序列 $x=\{\xi_n\}$, 并且

$$\|x\|_p=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right\}^{1/p}$$

**3.7 定义** 假定 $g$: $X\to[0,\infty]$ 是可测的. 设 $S$ 是所有使得

(1) $$\mu(g^{-1}((\alpha,\infty]))=0$$

的实数 $\alpha$ 的集. 如果 $S=\varnothing$, 令 $\beta=\infty$. 如果 $S\neq\varnothing$, 令 $\beta=\inf S$. 因为

(2) $$g^{-1}((\beta,\infty])=\bigcup_{n=1}^{\infty}g^{-1}\left(\left(\beta+\frac{1}{n},\infty\right]\right)$$

并且因为 0 测度集的可数并有测度 0, 可以看出 $\beta\in S$. 我们称 $\beta$ 为 $g$ 的本性上确界.

如果 $f$ 是 $X$ 上的复可测函数, 定义 $\|f\|_\infty$ 为 $|f|$ 的本性上确界, 并设 $L^\infty(\mu)$ 由所有满足 $\|f\|_\infty<\infty$ 的 $f$ 所组成. $L^\infty(\mu)$ 的元素有时称为 $X$ 上的本性有界可测函数.

从这个定义得出, 当且仅当 $\lambda\geq\|f\|_\infty$ 时, 不等式 $|f(x)|\leq\lambda$ 对几乎所有 $x$ 成立.

象定义 3.6 一样, $L^\infty(R^k)$ 表示所有的在 $R^k$ 上(关于 Lebesgue 测度)本性有界函数的类, $l^\infty(A)$ 是所有 $A$ 上有界函数的类. (因为这里每一个非空集具有正测度, 有界与本性有界的含义相同!)

**3.8 定理** 如果 $p$ 和 $q$ 是共轭指数，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$f\in L^p(\mu)$ 和 $g\in L^q(\mu)$，则 $fg\in L^1(\mu)$，并且

(1) $$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$$

成立.

**证明** 对于 $1<p<\infty$，(1)简单地说就是应用于 $|f|$ 和 $|g|$ 的 Hölder 不等式；$p=\infty$ 时，注意

(2) $$|f(x)g(x)|\leqslant\|f\|_\infty|g(x)|$$

对几乎所有 $x$ 成立. 积分(2)式，即得(1)式. 若 $p=1$，则 $q=\infty$，可以采用同样的推理.

**3.9 定理** 假定 $1\leqslant p\leqslant\infty$，并且 $f\in L^p(\mu)$，$g\in L^p(\mu)$. 则 $f+g\in L^p(\mu)$，且

(1) $$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$$

成立.

**证明** 因为 $$\int_X|f+g|^p d\mu\leqslant\int_X(|f|+|g|)^p d\mu$$

对 $1\leqslant p\leqslant\infty$，从 Minkowski 不等式得出(1). 对 $p=1$ 或 $p=\infty$，(1)是不等式 $|f+g|\leqslant|f|+|g|$ 的平凡的的推论.

**3.10 评注** 固定 $p$，$1\leqslant p\leqslant\infty$. 如果 $f\in L^p(\mu)$ 并且 $\alpha$ 是复数，显然 $\alpha f\in L^p(\mu)$. 事实上

(1) $$\|\alpha f\|_p=|\alpha|\,\|f\|_p$$

与定理 3.9 合起来说明 $L^p(\mu)$ 是一个复向量空间.

假定 $f$，$g$ 和 $h$ 都在 $L^p(\mu)$ 内，在定理 3.9 中用 $f-g$ 代替 $f$，用 $g-h$ 代替 $g$，得到

(2) $$\|f-h\|_p\leqslant\|f-g\|_p+\|g-h\|_p$$

这就启发我们，可以通过定义 $f$ 和 $g$ 之间的距离为 $\|f-g\|_p$，而在 $L^p(\mu)$ 内引进度量. 暂时称这个距离为 $d(f,g)$. 则 $0\leqslant d(f,g)<\infty$，$d(f,f)=0$，$d(g,f)=d(f,g)$，并且(2)式指出三角不等式

$d(f,h)\leqslant d(f,g)+d(g,h)$ 也成立．确定一个度量空间的 $d$ 所应该具备的最后一个性质是：$d(f,\ g)=0$ 应该蕴涵着 $f=g$．在我们现在的情况下，这一点并非如此；确切地说，当 $f(x)=g(x)$ 对几乎所有的 $x$ 成立时，就有 $d(f,g)=0$.

让我们记 $f\sim g$ 当且仅当 $d(f,g)=0$，显然这是一个在 $L^p(\mu)$ 内的等价关系，它把 $L^p(\mu)$ 分成各个等价类；每一类都由所有与给定的一个函数等价的那些函数组成．如果 $F$ 和 $G$ 是两个等价类，选取 $f\in F$ 和 $g\in G$，定义 $d(F,G)=d(f,g)$；注意 $f\sim f_1$ 和 $g\sim g_1$ 蕴涵着

$$d(f,g)=d(f_1,g_1)$$

所以 $d(F,G)$ 是完全确定的.

在这个定义下，等价类的集现在是一个度量空间．注意，因为 $f\sim f_1$ 和 $g\sim g_1$ 蕴涵着 $f+g\sim f_1+g_1$ 和 $\alpha f\sim\alpha f_1$，它也是一个向量空间.

当 $L^p(\mu)$ 被看作度量空间时，实际上所考虑的空间不是以函数为元素的空间，而是一个以函数的等价类为元素的空间．不过为了语言的简洁起见，习惯上把这种差别降低到心照不宣的地位，并且继续说 $L^p(\mu)$ 是一个函数空间．我们将遵循这种习惯.

如果 $\{f_n\}$ 是 $L^p(\mu)$ 的一个序列，$f\in L^p(\mu)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$，我们就说 $\{f_n\}$ 在 $L^p(\mu)$ 内收敛于 $f$（或 $\{f_n\}$ $p$ 次平均收敛于 $f$，或 $\{f_n\}$ 是 $L^p$-收敛于 $f$）．若对每一个 $\varepsilon>0$，都对应有一个整数 $N$，使得当 $n>N$、$m>N$ 时有 $\|f_m-f_n\|_p<\varepsilon$，我们就称 $\{f_n\}$ 是 $L^p(\mu)$ 内的 Cauchy 序列．这些定义完全象在任何一个度量空间中的定义一样.

一个极为重要的事实是，$L^p(\mu)$ 是一个完备的度量空间，即每一个 $L^p(\mu)$ 内的 Cauchy 序列收敛于 $L^p(\mu)$ 的一个元素.

**3.11 定理** 对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 和每一个正测度 $\mu$，$L^p(\mu)$ 是一个完备的度量空间.

**证明** 首先假定$1\leqslant p<\infty$. 设$\{f_n\}$是在$L^p(\mu)$内的一个Cauchy序列，则存在一个子序列$\{f_{n_i}\}$，$n_1<n_2<\cdots$，使得

$$\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\|<2^{-i}\qquad(i=1,2,3,\cdots)\tag{1}$$

令

$$g_k=\sum_{i=1}^{k}|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}|,\quad g=\sum_{i=1}^{\infty}|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}|\tag{2}$$

因为(1)成立，Minkowski不等式指出$\|g_k\|_p<1$，$k=1,2,3,\cdots$. 因此将Fatou引理应用于$\{g_k^p\}$，得出$\|g\|_p\leqslant 1$. 特别是$g(x)<\infty$ a. e. 成立，所以级数

$$f_{n_1}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x))\tag{3}$$

对几乎所有的$x\in X$是绝对收敛的. 对于在(3)式中收敛的那些点$x$，记(3)的和为$f(x)$，在余下的0测集上，令$f(x)=0$. 因为

$$f_{n_1}+\sum_{i=1}^{k-1}(f_{n_{i+1}}-f_{n_i})=f_{n_k}\tag{4}$$

看出

$$f(x)=\lim_{i\to\infty}f_{n_i}(x)\quad\text{a. e.}\tag{5}$$

在已经找到一个函数$f$，它是$\{f_{n_i}\}$a. e. 点态收敛的极限以后，现在还得证明这个$f$是$\{f_n\}$的$L^p$-极限. 选取$\varepsilon>0$，这时存在一个$N$，使得$n>N$、$m>N$时有$\|f_m-f_n\|_p<\varepsilon$成立. 于是Fatou引理指出对每一个$m>N$，

$$\int_X|f-f_m|^p d\mu\leqslant\liminf_{i\to\infty}\int_X|f_{n_i}-f_m|^p d\mu\leqslant\varepsilon^p\tag{6}$$

从(6)得出$f-f_m\in L^p(\mu)$. 因此$f\in L^p(\mu)$[因为$f=(f-f_m)+f_m$]. 最后，当$m\to\infty$时$\|f-f_m\|_p\to 0$. 这就完成了对$1\leqslant p<\infty$情况的证明.

在 $L^\infty(\mu)$ 中的证明容易得多. 假定 $\{f_n\}$ 是 $L^p(\mu)$ 内的Cauchy 序列, 设 $A_k$ 和 $B_{m,n}$ 是使 $|f_k(x)|>\|f_k\|_\infty$ 和 $|f_n(x)-f_m(x)|>\|f_n-f_m\|_\infty$ 的集, 并设 $E$ 是这些 $A_k$ 和 $B_{m,n}$ $k,m$, $n=1,2,3,\cdots$ 的并. 则 $\mu(E)=0$, 并且在 $E$ 的余集上序列 $\{f_n\}$ 一致收敛于有界函数 $f$. 对 $x\in E$, 定义 $f(x)=0$. 则 $f\in L^\infty(\mu)$ 且当 $n\to\infty$ 时 $\|f_n-f\|_\infty\to 0$.

上面的证明包含了一个足以单独叙述的有趣的结果:

**3.12 定理** 如果 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\{f_n\}$ 是在 $L^p(\mu)$ 内的 Cauchy 序列, 它的极限为 $f$, 则 $\{f_n\}$ 存在一个子序列, 它几乎处处点态收敛于 $f(x)$.

简单函数在 $L^p(\mu)$ 内起着一个有趣的作用:

**3.13 定理** 设 $S$ 是所有使得

$$\mu(\{x: s(x)\neq 0\})<\infty \tag{1}$$

的 $X$ 上的复可测简单函数 $s$ 的类. 如果 $1\leqslant p<\infty$, 则 $S$ 在 $L^p(\mu)$ 内是稠密的.

**证明** 首先, $S\subset L^p(\mu)$ 是很明显的. 假定 $f\geqslant 0$, $f\in L^p(\mu)$, 并设 $\{s_n\}$ 是与在定理 1.17 内一样的序列. 因为 $0\leqslant s_n\leqslant f$, 有 $s_n\in L^p(\mu)$, 因此 $s_n\in S$. 因为 $|f-s_n|^p\leqslant f^p$, 控制收敛定理表明当 $n\to\infty$ 时 $\|f-s_n\|_p\to 0$. 于是 $f$ 位于 $S$ 的 $L^p$-闭包内. 由此也可以得出一般($f$ 是复的)情况.

## 连续函数逼近

至此我们已经讨论了在任何测度空间上的 $L^p(\mu)$. 现在设 $X$ 是一个局部紧的 Hausdorff 空间, 并设 $\mu$ 是 $X$ 的 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 上的测度, 它具有定理 2.14 所述的性质. 例如 $X$ 可以是 $R^k$, $\mu$ 可以是 $R^k$ 上的 Lebesgue 测度.

在这些情况下, 我们有下列类似于定理 3.13 的结论:

**3.14 定理** 对 $1\leqslant p<\infty$, $C_c(X)$ 在 $L^p(\mu)$ 内稠密.

**证明** 象定理 3.13 一样定义 $S$. 若 $s\in S$ 且 $\varepsilon>0$, 则存在一个 $g\in C_c(X)$, 使得除开一个测度 $<\varepsilon$ 的集外 $g(x)=s(x)$ 都成立. 并且 $|g|\leqslant\|s\|_\infty$(Lusin 定理). 因此

$$(1)\qquad \|g-s\|_p\leqslant 2\varepsilon^{1/p}\|s\|_\infty$$

因为 $S$ 在 $L^p(\mu)$ 内稠密, 这就完成了证明.

**3.15 评注** 让我们稍微详细地讨论一下 $L^p(R^k)$ ($R^k$ 上的 Lebesgue 测度的 $L^p$-空间)和空间 $C_c(R^k)$ 之间的关系. 我们考虑一个固定的维数 $k$.

对于每一个 $p\in[1,\infty]$, 在 $C_c(R^k)$ 上有一个度量; $f$ 和 $g$ 之间的距离是 $\|f-g\|_p$. 注意这是一个真正的度量, 而不必通过等价类. 关键在于, 如果 $R^k$ 上的两个连续函数是不相等的, 则它们在某个非空开集 $V$ 上不同. 因为 $V$ 包含一个 $k$-胞腔, $m(V)>0$. 于是若 $C_c(R^k)$ 的两元素是 a. e. 相等的, 它们就是相等的. 注意到 $C_c(R^k)$ 的元素的本性上确界和真实的上确界相同也是有意思的: 对于 $f\in C_c(R^k)$

$$(1)\qquad \|f\|_\infty=\sup_{x\in R^k}|f(x)|$$

若 $1\leqslant p<\infty$, 定理 3.14 说明 $C_c(R^k)$ 在 $L^p(R^k)$ 内稠密, 定理 3.11 指出 $L^p(R^k)$ 是完备的. 于是 $L^p(R^k)$ 是赋予 $C_c(R^k)$ 以 $L^p$-距离所得的度量空间的完备化.

$p=1$ 和 $p=2$ 是最有兴趣的两种情况. 让我们再一次用不同的语言来叙述上面所说的当 $p=1$ 和 $k=1$ 时的结论; 这种说法表明 Lebesgue 积分确实是 Riemann 积分的"正确"的推广:

如果在 $R^1$ 内具有紧支集的两个连续函数 $f$ 和 $g$ 之间的距离定义为

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-g(t)|\,dt$$

则这样所得度量空间的完备化恰好由 $R^1$ 上的 Lebesgue 可积函数

所组成. 这里假定任何两个几乎处处相等的函数都看成是同一的.

当然, 每一个度量空间 $S$ 有一个完备化 $S^*$, 它的每一个元素可以抽象地看成是 $S$ 内的 Cauchy 序列的等价类 (见[26] p.71). 现在情况的重要之处在于 $C_c(R^k)$ 的各种 $L^p$-完备化再一次得出是 $R^k$ 上的函数空间.

在 $p=\infty$ 的情形与 $p<\infty$ 的情形不同. $C_c(R^k)$ 的 $L^\infty$-完备化不是 $L^\infty(R^k)$, 而是 $C_0(R^k)$, 即所有 $R^k$ 上"在无穷远点为 0"的连续函数的空间. 这个概念将在 3.16 节内定义. 因为(1)指出 $L^\infty$-范数与 $C_c(R^k)$上的上确界范数重合, 上面关于 $C_0(R^k)$的结论就是定理 3.17 的一个特殊情况.

**3.16 定义** 一个局部紧 Hausdorff 空间 $X$ 上的复函数 $f$, 如果对每一个 $\varepsilon>0$, 存在一个紧集 $K\subset X$, 使得对所有不在 $K$ 内的 $x$, $|f(x)|<\varepsilon$ 成立, 则称 $f$ 在无穷远点为 0.

所有在无穷远点为 0 的 $X$ 上的连续函数的类称为 $C_0(X)$.

显然 $C_c(X)\subset C_0(X)$, 并且若 $X$ 是紧的, 这两个类就是重合的. 在这种情况下对它们中的任何一个记以 $C(X)$.

**3.17 定理** 如果 $X$ 是一个局部紧Hausdorff 空间, 则 $C_0(X)$ 是 $C_c(X)$ 相对于由上确界范数

$$\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)| \tag{1}$$

所定义的度量的完备化.

**证明** 如果将 $f$ 和 $g$ 之间的距离取作 $\|f-g\|$, 初等的验证指出 $C_0(X)$满足度量空间的公理. 必须证明: $(a)$ $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 内稠密和 $(b)$ $C_0(X)$ 是完备的度量空间.

给定 $f\in C_0(X)$ 和 $\varepsilon>0$, 存在一个紧集 $K$ 使得在 $K$ 的外面 $|f(x)|<\varepsilon$, Urysohn 引理给出了一个 $g\in C_c(X)$, 使得 $0\leqslant g\leqslant 1$, 且在 $K$ 上 $g(x)=1$. 令 $h=f\cdot g$. 则 $h\in C_c(X)$ 且 $\|f-h\|<\varepsilon$. 这就证明

了$(a)$.

为了证明$(b)$，设$\{f_n\}$是$C_0(X)$内的Cauchy序列，即假定$\{f_n\}$一致收敛，则它的点态收敛的极限函数$f$是连续的. 给定$\varepsilon>0$，存在一个$n$，使得$\|f_n-f\|<\varepsilon/2$，并存在一个紧集$K$使得在$K$的外面$|f_n(x)|<\varepsilon/2$. 因此在$K$的外面$|f(x)|<\varepsilon$. 这就已经证明了$f$在无穷远点为0，于是$C_0(X)$是完备的.

## 习　题

1　证明任意一族$(a,b)$上的凸函数的上确界在$(a,b)$上是凸的，并证明凸函数序列的点态极限是凸的. 关于凸函数序列的上极限和下极限如何？

2　如果$\varphi$在$(a,b)$上是凸的，而$\psi$在$\varphi$的值域上是凸的且是不减的，证明$\psi\circ\varphi$在$(a,b)$上是凸的. 对于$\varphi>0$，证明$\log\varphi$的凸性蕴涵着$\varphi$的凸性，但反之不真.

3　假定$\varphi$是$(a,b)$上的连续实函数，使得

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\varphi(y)$$

对所有的$x$及$y\in(a,b)$成立. 证明$\varphi$是凸的（如果从假定中省略了连续性，这个结论就不能得到）.

4　假定$f$是$X$上的复可测函数，$\mu$是$X$上的正测度，并且

$$\varphi(p)=\int_X|f|^p d\mu=\|f\|_p^p\qquad(0<p<\infty)$$

设$E=\{p:\varphi(p)<\infty\}$. 假定$\|f\|_\infty>0$.

(a) 若$r<p<s$，$r\in E$，$s\in E$，证明$p\in E$.

(b) 证明$\log\varphi$在$E$的内部是凸的且$\varphi$是在$E$上连续的.

(c) 根据(a)，$E$是连通的. $E$一定是开的吗？一定是闭的吗？$E$能由单点组成吗？$E$能是$(0,\infty)$的任何连通子集吗？

(d) 若$r<p<s$，证明$\|f\|_p\leqslant\max(\|f\|_r,\|f\|_s)$. 指出这一结果蕴涵着$L^r(\mu)\cap L^s(\mu)\subset L^p(\mu)$.

(e) 假定对某个$r<\infty$，$\|f\|_r<\infty$成立. 证明当$p\to\infty$时，

$$\|f\|_p\to\|f\|_\infty$$

5　在习题4的假设中再加上假定

$$\mu(X)=1$$

(a) 证明，若 $0<r<s\leqslant\infty$，则 $\|f\|_r\leqslant\|f\|_s$.

(b) 在什么条件之下，会出现 $0<r<s\leqslant\infty$ 而 $\|f\|_r=\|f\|_s<\infty$ 的情况？

(c) 若 $0<r<s$，证明 $L^r(\mu)\supset L^s(\mu)$. 在什么样条件之下，这两个空间所包含的函数相同？

(d) 假定对某个 $r>0$，$\|f\|_r<\infty$. 若 $\exp\{-\infty\}$ 定义为 0，证明

$$\lim_{p\to 0}\|f\|_p=\exp\left\{\int_X\log|f|d\mu\right\}$$

6 设 $m$ 是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度，关于 $m$ 所确定的 $\|f\|_p$，找出使关系式

$$\Phi(\lim_{p\to 0}\|f\|_p)=\int_0^1(\Phi\circ f)\,dm$$

对每一个有界的可测正函数 $f$ 成立的所有在 $[0,\infty)$ 上的函数 $\Phi$. 首先证明

$$c\Phi(x)+(1-c)\Phi(1)=\Phi(x^c)\quad(x>0,\ 0\leqslant c\leqslant 1)$$

试与习题 5(d) 比较.

7 对某些测度，关系式 $r<s$ 蕴涵 $L^r(\mu)\subset L^s(\mu)$；对另一些测度这个包含关系相反；还存在一些测度，当 $r\neq s$ 时 $L^r(\mu)$ 不包含 $L^s(\mu)$. 试给出这些情形的例子，并找出使得这些情形将会出现的关于 $\mu$ 的条件.

8 若 $g$ 是在 $(0,1)$ 上的正函数，使得当 $x\to 0$ 时 $g(x)\to\infty$，则存在一个 $(0,1)$ 上的凸函数 $h$，使得 $h\leqslant g$ 且当 $x\to 0$ 时 $h(x)\to\infty$. 这对不对？若 $(0,1)$ 用 $(0,\infty)$ 代替，$x\to 0$ 用 $x\to\infty$ 代替，这个问题会变化吗？

9 假定 $f$ 是 $(0,1)$ 上的 Lebesgue 可测函数，并且不是本性有界的. 根据习题 4(e)，当 $p\to\infty$ 时，$\|f\|_p\to\infty$. $\|f\|_p$ 能任意缓慢地趋于 $\infty$ 吗？更确切地说，对在 $(0,\infty)$ 上每一个满足当 $p\to\infty$ 时 $\Phi(p)\to\infty$ 的正函数 $\Phi$，能找到一个 $f$，使得当 $p\to\infty$ 时 $\|f\|_p\to\infty$，但对所有充分大的 $p$，$\|f\|_p\leqslant\Phi(p)$ 成立. 这个结论正确吗？

10 假定 $f_n\in L^p(\mu)$，$n=1,2,3,\cdots$，当 $n\to\infty$ 时 $\|f_n-f\|_p\to 0$ 和 $f_n\to g$ a.e. 成立，问 $f$ 和 $g$ 之间存在什么关系？

11 假定 $\mu(\Omega)=1$，$f$ 和 $g$ 是 $\Omega$ 上的正可测函数，使得 $fg\geqslant 1$. 证明

$$\int_\Omega fd\mu\cdot\int_\Omega gd\mu\geqslant 1$$

12 假定 $\mu(\Omega)=1$，且 $h:\Omega\to[0,\infty]$ 是可测的. 若

$$A=\int_\Omega hd\mu$$

证明

$$\sqrt{1+A^2}\leqslant\int_{\Omega}\sqrt{1+h^2}\,d\mu\leqslant 1+A$$

如果 $\mu$ 是[0, 1]上的 Lebesgue 测度并且 $h$ 是连续的, $h=f'$, 则上面的不等式有一个简单的几何解释, 试从这点推测(对一般的 $\Omega$)关于 $h$ 在什么条件下, 上面不等式之一的等号能够成立, 并且证明你的推测.

13 关于 $f$ 和 $g$ 在什么条件下, 定理 3.8 和3.9 的结论中的等号能够成立? 你或许不得不分别处理 $p=1$ 和 $p=\infty$ 的情况.

14 假定 $1<p<\infty$, 就 Lebesgue 测度而言 $f\in L^p=L^p((0,\infty))$, 并且

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\qquad(0<x<\infty)$$

(*a*) 证明Hardy 不等式

$$\|F\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\|f\|_p$$

这表明映射 $f\to F$ 映 $L^p$ 到 $L^p$ 内.

(*b*) 证明仅当 $f=0$ a. e. 时, 等号成立.

(*c*) 证明常数 $p/(p-1)$ 不能用一个比它小的数代替.

(*d*) 若 $f>0$ 且 $f\in L^1$. 证明 $F\notin L^1$.

提示: (*a*)首先假定 $f\geqslant 0$ 且 $f\in C_c((0,\infty))$. 用分部积分给出

$$\int_0^\infty F^p(x)\,dx=-p\int_0^\infty F^{p-1}(x)xF'(x)\,dx$$

注意 $xF'=f-F$. 应用 Hölder 不等式于 $\int F^{p-1}f$, 然后导出一般情况. (*c*) 对于充分大的 $A$, 在[1, $A$]上取 $f(x)=x^{-1/p}$, 在其他点上取 $f(x)=0$.

15 假定$\{a_n\}$是正数序列. 当 $1<p<\infty$ 时证明

$$\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_n\right)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$$

提示: 若 $a_n\geqslant a_{n+1}$, 这个结果能从习题 14 得出. 这个特殊情况蕴涵着一般的情况.

16 证明 Egoroff 定理: 若 $\mu(X)<\infty$, $\{f_n\}$ 是一个复的可测函数序列, 它在 $X$ 的每一点上点态收敛, 并且如果 $\epsilon>0$, 则存在一个可测集 $E\subset X$, 具有 $\mu(X-E)<\epsilon$, 使得$\{f_n\}$ 在 $E$ 上一致收敛.

(这个结论是说通过在测度任意小的集上重新定义 $f_n$, 我们能使点态收

敛的序列转化为一致收敛序列；注意与 Lusin 定理的类似性.）

提示：令

$$S(n,k)=\bigcap_{i,j\geq n}\left\{x:|f_i(x)-f_j(x)|<\frac{1}{k}\right\}$$

证明当 $n\to\infty$ 时对每一个 $k$, $\mu(S(n,k))\to\mu(X)$，因此存在一个适当的递增的序列 $\{n_k\}$ 使得 $E=\bigcap S(n_k,k)$ 具有所要求的性质.

证明定理不能扩张到 $\sigma$-有限的空间.

证明定理不能（用同一证法）扩张到用函数族 $\{f_t\}$ 代替序列 $\{f_n\}$ 时的情况，这里 $t$ 在正实数内变化，并且这个假定是：对每一个 $x\in X$，当 $t\to\infty$ 时，$f_t(x)\to f(x)$.

17 (*a*) 如果 $0<p<\infty$，令 $\gamma_p=\max(1,2^{p-1})$，证明对任意的复数 $\alpha$ 和 $\beta$，

$$|\alpha-\beta|^p\leqslant\gamma_p(|\alpha|^p+|\beta|^p)$$

(*b*) 假定 $\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$0<p<\infty$，$f\in L^p(\mu)$，$f_n\in L^p(\mu)$. 当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)\to f(x)$ a.e.，并且 $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$. 通过完成略述如下的两个证明然后证明 $\lim\|f-f_n\|_p=0$.

(i) 根据 Egoroff 定理，作出 $X=A\cup B$，使得 $\int_A|f|^p<\varepsilon$，$\mu(B)<\infty$ 而 $f_n\to f$ 在 $B$ 上一致收敛，应用 Fatou 引理于 $\int_A|f_n|^p$ 上，得出

$$\limsup\int_A|f_n|^p d\mu\leqslant\varepsilon$$

(ii) 令 $h_n=\gamma_p(|f|^p+|f_n|^p)-|f-f_n|^p$，并且象在定理 1.34 的证明一样运用 Fatou 引理.

(*c*) 证明，若去掉 $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$ 的假设，那末甚至在 $\mu(X)<\infty$ 的情况下 (*b*) 的结论也不成立.

18 设 $\mu$ 是 $X$ 上的正测度. $X$ 上的复可测函数序列 $\{f_n\}$ 称为依测度收敛于可测函数 $f$，如果对每一个 $\varepsilon>0$，存在一个对应的 $N$，使得

$$\mu(\{x:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})<\varepsilon$$

对所有 $n>N$ 成立（这个概念在概率论中是很重要的）. 假定 $\mu(X)<\infty$，证明下列命题：

(*a*) 若 $f_n(x)\to f(x)$ a.e.，则 $f_n\xrightarrow{\text{依测度}}f$.

(b) 若 $f_n \in L^p(\mu)$，且 $\|f_n - f\|_p \to 0$，则 $f_n \xrightarrow{\text{依测度}} f$，这里 $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(c) 若 $f_n \xrightarrow{\text{依测度}} f$，则 $\{f_n\}$ 具有一个 a. e. 收敛于 $f$ 的子序列.

审查(a)和(b)的逆定理. 若 $\mu(X) = \infty$，比如，如果 $\mu$ 是 $R^1$ 上的 Lebesgue 测度，(a)(b)(c)会发生什么变化？

19 定义函数 $f \in L^\infty(\mu)$ 的本性值域为集合 $R_f$，它由所有使得

$$\mu(\{x: |f(x) - w| < \varepsilon\}) > 0$$

对每一个 $\varepsilon > 0$ 成立的复数 $w$ 所组成. 证明 $R_f$ 是紧的. 集 $R_f$ 和数 $\|f\|_\infty$ 之间存在什么关系？

设 $A_f$ 是所有平均值

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f d\mu$$

的集合，这里 $E \in \mathfrak{M}$ 且 $\mu(E) > 0$. $A_f$ 和 $R_f$ 之间存在什么关系？$A_f$ 总是闭的吗？是否存在这样的测度 $\mu$ 使得对每一个 $f \in L^\infty(\mu)$，$A_f$ 是凸集？是否存在这样的测度 $\mu$，使得对某一个 $f \in L^\infty(\mu)$，$A_f$ 不是凸集？

比如说，用 $L^1(\mu)$ 代替 $L^\infty(\mu)$，会怎样影响这些结论？

20 假定 $\varphi$ 是 $R^1$ 上的实函数，使得

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) < \int_0^1 \varphi(f)dx$$

对每一个实的有界可测函数 $f$ 成立. 证明 $\varphi$ 是凸的.

21 称度量空间 $Y$ 是度量空间 $X$ 的一个完备化，如果 $X$ 在 $Y$ 内稠密，且 $Y$ 是完备的. 在 3.15 节中曾经提到过度量空间的这种完备化. 试叙述并证明一个说明上面术语是合理的唯一性定理.

22 假定 $X$ 是一个度量空间，其中每一个 Cauchy 序列有收敛子序列. 能得出 $X$ 是完备的吗(见定理 3.11 的证明)？

23 假定 $\mu$ 是 $X$ 上的正测度，$\mu(X) < \infty$，$f \in L^\infty(\mu)$，$\|f\|_\infty > 0$，且

$$\alpha_n = \int_X |f|^n d\mu \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|f\|_\infty$$

24 假定 $\mu$ 是正测度、$f \in L^p(\mu)$，$g \in L^p(\mu)$.

(a) 若 $0 < p < 1$，证明

$$\int\left||f|^p-|g|^p\right|d\mu\leqslant\int|f-g|^p d\mu$$

并证明 $\Delta(f,g)=\int|f-g|^p d\mu$ 定义 $L^p(\mu)$ 上的一个距离。

(b) 若 $1\leqslant p<\infty$ 并且 $\|f\|_p\leqslant R$, $\|g\|_p\leqslant R$, 证明

$$\int\left||f|^p-|g|^p\right|d\mu\leqslant 2pR^{p-1}\|f-g\|_p$$

提示: 首先对 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, 证明

$$|x^p-y^p|\leqslant\begin{cases}|x-y|^p & 0<p<1\\ p|x-y|(x^{p-1}+y^{p-1}) & 1\leqslant p<\infty\end{cases}$$

注意(a)和(b)建立起映 $L^p(\mu)$ 入 $L^1(\mu)$ 的映射 $f\to|f|^p$ 的连续性.

# 第四章 Hilbert空间的初等理论

## 内积和线性泛函

**4.1 定义** 复向量空间$H$称为内积空间(或$U$空间)，如果向量$x$和$y\in H$的每个序对都对应一个复数$(x,y)$，即所谓$x$和$y$的内积(或纯量积)，使得下面的法则成立.

(*a*) $(y,x)=\overline{(x,y)}$(横线表示取共轭复数).

(*b*) 当$x,y$和$z\in H$时，$(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

(*c*) 当$x$和$y\in H$，$\alpha$是纯量时，$(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$.

(*d*) 对所有$x\in H$，$(x,x)\geqslant 0$.

(*e*) $(x,x)=0$当且仅当$x=0$.

下面列出这些公理的某些直接推论:

(*c*) 蕴涵着对所有的$y\in H$，$(0,y)=0$.

(*b*)和(*c*)可以合并为下述说法：对每个$y\in H$，映射$x\to(x,y)$是$H$上的一个线性泛函.

(*a*)和(*c*)表明$(x,\alpha y)=\bar{\alpha}(x,y)$.

(*a*)和(*b*)蕴涵着第二分配律:

$$(z,x+y)=(z,x)+(z,y)$$

由(*d*)，可以定义向量$x\in H$的范数$\|x\|$为$(x,x)$的非负平方根.这样

$$\text{(f)} \qquad \|x\|^2=(x,x)$$

**4.2 Schwarz不等式** 性质4.1(*a*)—(*d*)蕴涵着

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|$$

对所有$x,y\in H$成立.

**证明** 令 $A=\|x\|^2, B=|(x,y)|, C=\|y\|^2$. 存在一个复数 $\alpha$ 使得 $|\alpha|=1$ 而 $\alpha(y,x)=B$. 对任意实数 $r$, 便有

(1) $(x-r\alpha y,\ x-r\alpha y)=(x,x)-r\alpha(y,x)-r\bar{\alpha}(x,y)+r^2(y,y)$

(1)式的左边是实的和非负的. 因此, 对每个实数 $r$

(2) $$A-2Br+Cr^2\geqslant 0$$

如果 $C=0$, 则必有 $B=0$; 否则当 $r$ 是很大的正数时(2)式不成立. 如果 $C>0$, 在(2)式中取 $r=B/C$, 便得 $B^2\leqslant AC$.

**4.3 三角不等式** 对任意 $x$ 和 $y\in H$, 都有

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$$

**证明** 由 Schwarz 不等式

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)$$

$$\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$

**4.4 定义** 由三角不等式得

(1) $$\|x-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\| \qquad (x,y,z\in H)$$

如果我们定义 $x$ 与 $y$ 之间的距离为 $\|x-y\|$, 则度量空间的全部公理都能满足. 在这里, 我们第一次用上定义 4.1 的($e$).

这样, $H$ 就成了一个度量空间. 如果这个度量空间是完备的, 就是说, $H$ 中的每一个 Cauchy序列都收敛, 那末 $H$ 就称为 Hilbert 空间.

在本章的余下部分, 字母 $H$ 都表示 Hilbert 空间.

**4.5 例**

($a$)对任一固定的 $n$, 所有 $n$ 元序组

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

的集 $C^n$, 这里 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是复数. 当我们象通常一样按分量定义加法和纯量乘法, 并定义

$$(x, y)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\bar{\eta}_j \qquad (y=(\eta_1, \cdots, \eta_n))$$

就成为一个 Hilbert 空间.

(b)如果$\mu$是一个正测度,$L^2(\mu)$就是一个具有内积

$$(f, g)=\int_X f\bar{g}d\mu$$

的 Hilbert 空间. 这里右端的被积函数由定理 3.8,是属于$L^1(\mu)$的. 因此$(f, g)$有确定的意义. 注意

$$\|f\|=(f, f)^{1/2}=\left\{\int_X |f|^2 d\mu\right\}^{1/2}=\|f\|_2$$

$L^2(\mu)$的完备性(定理 3.11)表明$L^2(\mu)$的确是一个 Hilbert 空间 [要记住$L^2(\mu)$是看作函数的等价类的空间的; 比较 3.10 节的讨论.]

当$H=L^2(\mu)$时, 不等式 4.2 和 4.3 转化为 Hölder 和 Minkowski 不等式的特款.

注意,例(a)是例(b)的特殊情况. 在(a)中的测度是什么?

(c)[0,1]上全体连续复函数的向量空间是一个内积空间, 如果

$$(f, g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

但它不是 Hilbert 空间.

**4.6 定理** 对任意固定的$y\in H$, 映射

$$x\to(x, y), \quad x\to(y, x), \quad x\to\|x\|$$

都是$H$上的连续函数.

**证明** Schwarz 不等式蕴涵着

$$|(x_1, y)-(x_2, y)|=|(x_1-x_2, y)|\leqslant\|x_1-x_2\|\|y\|$$

这就证明了$x\to(x, y)$事实上是一致连续的. 对$x\to(y, x)$也一样是真确的. 由三角不等式$\|x_1\|\leqslant\|x_1-x_2\|+\|x_2\|$得出

$$\|x_1\|-\|x_2\|\leqslant\|x_1-x_2\|$$

若交换 $x_1$ 与 $x_2$，可以看出

$$|\|x_1\|-\|x_2\||\leqslant\|x_1-x_2\|$$

对所有 $x_1$ 和 $x_2\in H$ 成立．这样 $x\to\|x\|$ 也是一致连续的．

**4.7 子空间** 向量空间 $V$ 的一个子集 $M$ 称为 $V$ 的子空间，如果 $M$ 本身关于 $V$ 中所定义的加法和纯量乘法是一个向量空间．对于集 $M\subset V$ 成为一个子空间的充要条件是当 $x,y\in M$，$\alpha$ 是一个纯量时 $x+y\in M$，$\alpha x\in M$．

在谈及向量空间的时候，“子空间”一词将总是赋予上述的含义．有时为了强调，我们也可以用“线性子空间”一词来代替子空间．

例如，设 $V$ 为集 $S$ 上全体复函数的向量空间，$S$ 上全体有界复函数的集就是 $V$ 的一个子空间．但是所有那些 $f\in V$，使对每个 $x\in S$，$|f(x)|\leqslant 1$ 的函数的集则不是一个子空间．实向量空间 $R^3$ 有如下的子空间，而不再有其他的了：$(a)R^3$，$(b)$所有通过原点的平面，$(c)$所有通过原点的直线，$(d)\{0\}$．

$H$ 的一个闭子空间 $M$ 是这样的一个子空间，它相对于由 $H$ 的度量引出的拓扑是一个闭集．

**4.8 凸集** 向量空间 $V$ 中的集 $E$ 称为凸的，如果它有下面的几何性质：当 $x\in E$，$y\in E$，且 $0<t<1$ 时，点

$$z_t=(1-t)x+ty$$

也属于 $E$．当 $t$ 从 0 变到 1 时，我们可以设想点 $z_t$ 在 $V$ 中描出一条从 $x$ 到 $y$ 的直线段．凸性要求 $E$ 包含它的任意两点之间的线段．

显然，$V$ 的每个子空间都是凸的．

同样，如果 $E$ 是凸的，那末它的每一个平移

$$E+x=\{y+x;\ y\in E\}$$

也一定是凸的.

**4.9 正交性** 若对某个 $x$ 和 $y\in H$, $(x,y)=0$, 我们就说 $x$ 正交于 $y$, 有时记作 $x\perp y$. 由于 $(x,y)=0$ 蕴涵着 $(y,x)=0$, 关系"$\perp$"是对称的.

设 $x^{\perp}$ 表示所有正交于 $x$ 的 $y\in H$ 的集; 而当 $M$ 是 $H$ 的子空间时, 设 $M^{\perp}$ 是所有正交于每个 $x\in M$ 的那些 $y\in H$ 的集.

注意 $x^{\perp}$ 是 $H$ 的一个子空间, 因为 $x\perp y$ 和 $x\perp y'$ 蕴涵着 $x\perp(y+y')$ 和 $x\perp\alpha y$. $x^{\perp}$ 也恰好是那些使连续函数 $y\to(x,y)$ 等于 0 的那些点的集. 因此, $x^{\perp}$ 是 $H$ 的闭子空间. 由于

$$M^{\perp}=\bigcap_{x\in M}x^{\perp}$$

$M^{\perp}$ 是闭子空间的交, 于是得知 $M^{\perp}$ 是 $H$ 的闭子空间.

**4.10 定理** 在 Hilbert 空间 $H$ 中, 每一个非空闭凸集 $E$ 都包含唯一的一个具有最小范数的元素.

换句话说, 存在唯一的一个 $x_0\in E$, 使得对每个 $x\in E$, $\|x_0\|\leqslant\|x\|$.

**证明** 通过仅仅用到定义 4.1 所列举的性质的简单计算, 可得到恒等式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2\qquad(x,y\in H)\tag{1}$$

这就是熟知的平行四边形法则: 如果把 $\|x\|$ 解释为向量 $x$ 的长度, (1)式就等于说一个平行四边形对角线的平方和等于各边的平方和. 这是平面几何中一个熟悉的命题.

设 $\delta=\inf\{\|x\|: x\in E\}$. 对任意的 $x$ 和 $y\in E$, 应用(1)于 $\frac{1}{2}x$ 和 $\frac{1}{2}y$, 得到

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2=\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2\tag{2}$$

因为$E$是凸的，$(x+y)/2\in E$. 因此

(3) $$\|x-y\|^2\leqslant 2\|x\|^2+2\|y\|^2-4\delta^2 \qquad (x,y\in E)$$

如果还有$\|x\|=\|y\|=\delta$，则(3)蕴涵着$x=y$，这就证明了定理的唯一性断言.

$\delta$的定义表明$E$中存在一个序列$\{y_n\}$，使$n\to\infty$时，$\|y_n\|\to\delta$. 在(3)中用$y_n$和$y_m$代替$x$和$y$，那末，当$n\to\infty$和$m\to\infty$时，(3)的右边趋于0. 这表明$\{y_n\}$是Cauchy序列. 由于$H$是完备的，存在$x_0\in H$，使得当$n\to\infty$时，$y_n\to x_0$，即$\|y_n-x_0\|\to 0$. 因$y_n\in E$而$E$是闭的，$x_0\in E$. 由于范数是$H$上的连续函数(定理4.6)，故有

$$\|x_0\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=\delta$$

**4.11 定理** 设$M$是$H$的闭子空间，则存在唯一的一对映射$P$和$Q$，使得$P$映$H$到$M$内，$Q$映$H$到$M^\perp$内，且对所有的$x\in H$，

(1) $$x=Px+Qx$$

这些映射有下列进一步的性质：

(2) 如果$x\in M$，则$Px=x$，$Qx=0$；如果$x\in M^\perp$，则$Px=0$，$Qx=x$.

(3) 如果$x\in H$，则$\|x-Px\|=\inf\{\|x-y\|: y\in M\}$.

(4) $$\|x\|^2=\|Px\|^2+\|Qx\|^2$$

(5) $P$和$Q$都是线性映射.

**系** 如果$M\neq H$，则存在$y\in H$，$y\neq 0$使得$y\perp M$.

$P$和$Q$称为$H$到$M$上和$M^\perp$上的正交射影.

**证明** 对任意的$x\in H$，集$x+M=\{x+y: y\in M\}$是闭的和凸的. 定义$Qx$为$x+M$中具有最小范数的那个唯一的元素. 根据定理4.10，它是存在的. 定义$Px=x-Qx$，则式(1)成立. 因为$Qx\in x+M$，很明显$Px\in M$，于是$P$将$H$映入$M$内.

其次我们必须证明对所有的$y\in M$，$(Qx,y)=0$. 不失一般性，假定$\|y\|=1$，而令$z=Qx$. $Qx$的极小性质表明对每个纯量$\alpha$，

$$(z,z)=\|z\|^2\leqslant\|z-\alpha y\|^2=(z-\alpha y, z-\alpha y)$$

简化之，得

$$0\leqslant-\alpha(y,z)-\bar{\alpha}(z,y)+|\alpha|^2$$

令 $\alpha=(z,y)$，即给出 $0\leqslant-|(z,y)|^2$. 从而 $(z,y)=0$. 这样，$Q$ 就映 $H$ 入 $M^\perp$ 内.

现在，若 $x=x_0+x_1$，其中 $x_0\in M$，$x_1\in M^\perp$，那末

$$x_0-Px=Qx-x_1$$

因为 $x_0-Px\in M$，$Qx-x_1\in M^\perp$，且 $M\cap M^\perp=\{0\}$[$(x,x)=0$ 蕴涵着 $x=0$ 这一事实的一个直接推论]，我们有 $x_0=Px$，$x_1=Qx$. 这就证明了唯一性的论断.

$P$ 和 $Q$ 的线性可类似地证明：将(1)式应用于 $x$，$y$ 和 $\alpha x+\beta y$，我们得到

$$P(\alpha x+\beta y)-\alpha Px-\beta Py=\alpha Qx+\beta Qy-Q(\alpha x+\beta y)$$

左边属于 $M$，右边属于 $M^\perp$；因此二者都是 0. 于是 $P$ 和 $Q$ 都是线性的.

性质(2)由(1)得到；(3)用来定义 $P$；因为 $(Px,Qx)=0$，而(4)从(1)得到. 要证明系，因为 $x\neq Px$，$y\neq 0$，只须取 $x\in H$，$x\notin M$，并令 $y=Qx$ 即可.

我们已经观察到对每个 $y\in H$，$x\to(x,y)$ 是 $H$ 上的一个连续的线性泛函. 一个极为重要的事实是：$H$ 上所有的连续线性泛函都是这种形式.

**4.12 定理** 如果 $L$ 是 $H$ 上的一个连续线性泛函，则存在唯一的一个 $y\in H$，使得

(1) $$Lx=(x,y)\qquad(x\in H)$$

**证明** 如果对所有 $x$ 有 $Lx=0$，则取 $y=0$；否则的话，定义

(2) $$M=\{x: Lx=0\}$$

$L$ 的线性表明 $M$ 是个子空间. $L$ 的连续性表明 $M$ 是闭的. 因为存在 $x\in H$，$Lx\neq 0$. 定理 4.11 表明 $M^\perp$ 并不由单独一个 0 组成.

因此，存在 $z\in M^{\perp}$, $\|z\|=1$. 令

$$u=(Lx)z-(Lz)x \tag{3}$$

由于 $Lu=(Lx)(Lz)-(Lz)(Lx)=0$, 便有 $u\in M$. 于是$(u,z)=0$, 这就给出

$$Lx=(Lx)(z,z)=(Lz)(x,z) \tag{4}$$

取 $\bar{\alpha}=Lz$, $y=\alpha z$, 则(1)就成立了.

$y$ 的唯一性是容易证明的. 因为，如果对所有 $x\in H$, $(x,y)=(x,y')$, 令 $z=y-y'$, 则对所有 $x\in H$, $(x,z)=0$, 特别$(z,z)=0$. 因而 $z=0$.

## 规范正交集

**4.13 定义** 如果 $V$ 是一个向量空间, $x_1,\cdots,x_k\in V$, 而 $c_1,\cdots,c_k$ 是纯量，则 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k$ 称为 $x_1,\cdots,x_k$ 的一个线性组合. 集$\{x_1,\cdots,x_k\}$称为独立的，如果 $c_1x_1+\cdots+c_kx_k=0$ 蕴涵着 $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$. 集 $S\subset V$ 是独立的，如果 $S$ 的每个有限子集都是独立的. 由 $S$ 的所有有限子集的所有的线性组合所成的集$[S]$(也称为 $S$ 的元素的全体有限线性组合的集)，很清楚是一个向量空间. $[S]$是 $V$ 中包含 $S$ 的最小的子空间; $[S]$ 称为 $S$ 的张成空间，或称由 $S$ 张成的空间.

Hilbert 空间中向量 $u_\alpha$ 组成的集，这里 $\alpha$ 跑遍某个指标集 $A$, 称为规范正交的，如果对所有的 $\alpha\in A$, $\beta\in A$, $\alpha\neq\beta$ 都满足正交性关系$(u_\alpha,u_\beta)=0$, 并且它被规范化，使得对每个 $\alpha\in A$, $\|u_\alpha\|=1$. 换句话说，$\{u_\alpha\}$是规范正交的，即规定

$$(u_\alpha,u_\beta)=\begin{cases}1 & \alpha=\beta\\ 0 & \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{1}$$

如果$\{u_\alpha:\alpha\in A\}$是规范正交的，对于每个 $x\in H$, 我们都对应于指标 $A$ 上的一个复函数 $\hat{x}$, 它定义为

(2) $$\hat{x}(\alpha)=(x,x_\alpha) \qquad (\alpha\in A)$$

有时，称这些数 $\hat{x}(\alpha)$ 为关于集 $\{u_\alpha\}$ 的 Fourier 系数.

**4.14 定理** 如果 $u_1,\cdots,u_k$ 是规范正交集，而 $x=\sum_{n=1}^{k}c_nu_n$，则

(1) $$c_n=(x,u_n) \qquad (1\leqslant n\leqslant k)$$

(2) $$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{k}|c_n|^2$$

**证明** 应用 4.13 的关系(1).

**系** 每个规范正交集都是独立的.

**证明** 从(2)式即可得出.

**4.15 一个逼近问题** 设 $v_1,\cdots,v_k$ 是 $H$ 中一个独立向量集，假定 $x\in H$. 问题是找出一种当 $c_1,\cdots,c_k$ 取遍所有纯量时计算出

(1) $$\|x-\sum_{j=1}^{k}c_jv_j\|$$

的最小值、并确定出相应的 $c_1,\cdots,c_k$ 的值的方法.

设 $M$ 是 $v_1,\cdots,v_k$ 的张成空间. 假如我们知道 $M$ 是闭的，就能应用定理 4.11，并推出唯一的极小化元素 $x_0=Px$ 的存在性，这里

(2) $$x_0=\sum_{j=1}^{k}c_jv_j$$

同时也具有 $x-x_0\in M^\perp$ 的性质. 这些事实因此可以用来获得关于(2)中的系数 $c_1,\cdots,c_k$ 的信息.

因为 $M$ 是向量的有限集的张成空间，$M$ 是闭的这一点看来是明显的. 观察到 $\{0\}$ 肯定是闭的，并且借助于下面的引理，我们可以通过归纳法来证明它.

如果 $V$ 是 $H$ 的一个闭子空间，$y\in H$，$y\notin V$，而 $V^*$ 是由 $V$ 和 $y$ 张成的空间，则 $V^*$ 是闭的.

为证明这一点，假定 $z$ 是 $V^*$ 的极限点. 则

$$z=\lim_{n\to\infty}(x_n+\lambda_n y)$$

这里 $x_n\in V$，而 $\lambda_n$ 是纯量. 因为度量空间中的收敛序列是有界的，故存在 $\eta<\infty$，使得 $\|x_n+\lambda_n y\|<\eta$ 对 $n=1,2,3,\cdots$ 都成立. 假如 $|\lambda_n|\to\infty$ 的话，我们应当有

$$\|\lambda_n^{-1}x_n+y\|<\frac{\eta}{|\lambda_n|}\longrightarrow 0.$$

因为 $V$ 是闭的，于是 $-y\in V$. 但 $y\notin V$，因此 $\{\lambda_n\}$ 有一个收敛于某个 $\lambda$ 的子序列 $\{\lambda_{n_i}\}$. 从而，作为两个 Cauchy 序列之差的 $\{x_{n_i}\}$ 本身也是 $H$ 中的一个 Cauchy 序列，并且收敛于某个 $x\in V$. 所以 $z=x+\lambda y$. 这就证明 $V^*$ 包含了它所有的极限点.

现在回到我们的问题. 设

$$a_{ij}=(v_j,v_i),\ b_i=(x,v_i) \tag{3}$$

那末，如果由(2)给出的 $x_0$ 是极小化元素，就一定有

$$(x-x_0,v_i)=0$$

对 $i=1,2,\cdots,k$ 成立. 这个式子引出一组未知数 $c_1,\cdots,c_k$ 的 $k$ 个线性方程

$$\sum_{j=1}^{k}a_{ij}c_j=b_i \qquad (1\leqslant i\leqslant k) \tag{4}$$

从定理 4.11 我们知道 $x_0$ 存在且是唯一的. 因此 $a_{ij}$ 的行列式不为 0，而 $c_j$ 可以从(4)算出.

其次，设 $\delta$ 是 (1) 的极小值. 由于 $(x-x_0,\ v_i)=0$，有 $(x-x_0,x_0)=0$；因此，

$$\delta^2=(x-x_0,x-x_0)=(x,x-x_0)=(x,x-\sum_{j=1}^{k}c_jv_j)$$

从而

$$(5)\qquad \delta^2=\|x\|^2-\sum_{j=1}^{k}\bar{c}_j b_j$$

这样，利用(3)中诸量就解决了我们的问题.

现在转向一个特殊情况：用一个规范正交集 $u_1,\cdots,u_k$ 来代替 $v_1,\cdots,v_k$. 于是，当 $i=j$ 时 $a_{ij}=1$，而 $i\neq j$ 时 $a_{ij}=0$. 因而(4)给出 $c_i=b_i$. 而(5)变成为

$$(6)\qquad \delta^2=\|x\|^2-\sum_{j=1}^{k}|b_j|^2$$

我们可以总结如下：

**4.16 定理** 设 $u_1,\cdots,u_k$ 是 $H$ 中的一个规范正交集，$x\in H$. 则

$$(1)\qquad \left\|x-\sum_{j=1}^{k}(x,u_j)u_j\right\|\leqslant\left\|x-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j u_j\right\|$$

对所有纯量 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 成立. (1)中的等号当且仅当对 $1\leqslant j\leqslant k$，$\lambda_j=(x,u_j)$ 时才成立. 向量

$$(2)\qquad \sum_{j=1}^{k}(x,u_j)u_j$$

是 $x$ 到子空间 $[u_1,\cdots,u_k]$ 内的正射影. 并且，若 $\delta$ 是 $x$ 到这个子空间的距离，则

$$(3)\qquad \sum_{j=1}^{k}|(x,u_j)|^2=\|x\|^2-\delta^2$$

**系（Bessel 不等式）** 如果 $\{u_\alpha,\alpha\in A\}$ 是 $H$ 的任意规范正交集，$x\in H$，且 $\hat{x}(\alpha)=(x,u_\alpha)$，则

$$(4)\qquad \sum_{\alpha\in A}|\hat{x}(\alpha)|^2\leqslant\|x\|^2$$

这个系需要作一些注释. 集 $A$ 是任意的指标集，甚至可能是不可数的，但完全没有安排顺序. 在这些条件之下，(4)式左边的

和意味着什么呢？我们定义如下：如果对每个$\alpha\in A$，$0\leqslant\varphi(\alpha)\leqslant\infty$，符号

$$(5)\qquad \sum_{\alpha\in A}\varphi(\alpha)$$

表示所有有限和$\varphi(\alpha_1)+\cdots+\varphi(\alpha_k)$的集的上确界，这里$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是$A$中不同元素。在这种约定之下，很清楚(4)可由(3)得出。

从矩的观点看，和式(5)恰好是$\varphi$关于$A$上的计数测度的Lebesgue积分。设$l^2(A)$是关于$A$上计数测度的$L^2$-空间。那末(4)断言$\hat{x}\in l^2(A)$并且$\|\hat{x}\|_2\leqslant\|x\|$。

(4)的一个直接推论应当明确地提出来：

对每个$x\in H$和$H$中的任意一个规范正交集$\{u_\alpha\}$，所有使$\hat{x}(\alpha)\neq 0$的$\alpha$的集至多是可数的。

设$F$是将每个$x\in H$对应于$A$上的函数$\hat{x}$的映射，对每个$\alpha\in A$，$x\to(x,u_\alpha)$是一个线性泛函。因此$F$是$H$到$l^2(A)$内的线性变换（见定义2.1）。由于$\|\hat{x}-\hat{y}\|_2\leqslant\|x-y\|$，故$F$也不会增加距离。特别，$F$是连续的。

我们现在将要看到：$H$的完备性蕴涵着$F$映$H$到$l^2(A)$上，以及在关于$\{u_\alpha\}$的一定的条件下$F$确实是一个等距，即对所有$x\in H$，$\|\hat{x}\|_2=\|x\|$。从而$F$当然是一一的。

**4.17 Riesz-Fischer定理** 设$\{u_\alpha:\ \alpha\in A\}$是$H$中的一个规范正交集。假设$\varphi\in l^2(A)$。则存在$x\in H$，$\varphi=\hat{x}$。

**证明** 对$n=1,2,3,\cdots$，设$A_n=\left\{\alpha:\ |\varphi(\alpha)|>\frac{1}{n}\right\}$。每个$A_n$都是一个有限集（事实上，容易验证$A_n$至多有$n^2\|\varphi\|_2^2$个元素）。令

$$(1)\qquad x_n=\sum_{\alpha\in A_n}\varphi(\alpha)u_\alpha\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

则$\hat{x}_n=\varphi\cdot\chi_{A_n}$，于是对每个$\alpha\in A$，$\hat{x}_n(\alpha)\to\varphi(\alpha)$，且$|\varphi-\hat{x}_n|^2\leqslant$

$|\varphi|^2$. 因此，由控制收敛定理的初等形式知道$\|\varphi-\hat{x}_n\|_2\to 0$. 于是得知$\{\hat{x}_n\}$是$l^2(A)$中的 Cauchy 序列. 由于集$A_n$有限，定理 4.14 表明$\|x_n-x_m\|=\|\hat{x}_n-\hat{x}_m\|_2$，于是$\{x_n\}$是$H$中的 Cauchy 序列，并由$H$的完备性，存在$x=\lim_{n\to\infty}x_n\in H$. 对任何$\alpha\in A$都有

$$\hat{x}(\alpha)=(x,u_\alpha)=\lim_{n\to\infty}(x_n,u_\alpha)=\lim_{n\to\infty}\hat{x}_n(\alpha)=\varphi(\alpha)$$

这就完成了证明.

**4.18 定理** 设$\{u_\alpha:\ \alpha\in A\}$是$H$中的规范正交集. 下面关于$\{u_\alpha\}$的四个条件中的每一个都蕴涵着另外三个:

(*a*) $\{u_\alpha\}$是$H$的极大规范正交集.

(*b*) $\{u_\alpha\}$的全体有限线性组合$S$在$H$中稠密.

(*c*) 对每个$x\in H$，有$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|\hat{x}(\alpha)|^2$.

(*d*) 若$x\in H$, $y\in H$，则$(x,y)=\sum_{\alpha\in A}\hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)}$.

最后一个公式就是熟知的 Parseval 恒等式. 注意$\hat{x}\in l^2(A)$, $\hat{y}\in l^2(A)$，所以$\hat{x}\bar{\hat{y}}\in l^1(A)$. 从而(*d*)中的和式的意义是明确的. 当然，(*c*)是(*d*)当$x=y$时的特款. 极大规范正交集通常叫做完备规范正交集或者规范正交基.

**证明** 简单说来，$\{u_\alpha\}$是极大的就是意味着$H$中再也没有向量能附加到$\{u_\alpha\}$上，使所得到的集还是规范正交的. 当$H$中不存在$x\neq 0$能与每个$u_\alpha$都正交时，上述情况确实是会出现的.

我们将证明$(a)\to(b)\to(c)\to(d)\to(a)$.

设$M$是$S$的闭包. 因为$S$是子空间，故$M$也是子空间($x_n\to x$和$y_n\to y$蕴涵着$x_n+y_n\to x+y$, $\lambda x_n\to\lambda x$)；且当$S$在$H$中不稠密时，$M\neq H$，由定理 4.11，$M^\perp$包含有一个非 0 向量. 这样，当$S$不稠密时，$\{u_\alpha\}$就不是极大的，于是$(a)\to(b)$.

假设($b$)成立．固定 $x\in H$，$\varepsilon>0$．由于 $S$ 稠密，存在有限集 $u_{\alpha_1}, \cdots, u_{\alpha_k}$ 使这些向量的某个线性组合和 $x$ 的距离小于 $\varepsilon$．由定理 4.16，这个逼近式只有在取 $u_{\alpha_j}$ 的系数为 $\hat{x}(\alpha_j)$时才能获得改善．这样，当

(1) $$z=\hat{x}(\alpha_1)u_{\alpha_1}+\cdots+\hat{x}(\alpha_k)u_{\alpha_k}$$

时，我们有 $\|x-z\|<\varepsilon$，因此 $\|x\|\leqslant\|z\|+\varepsilon$．而定理 4.14 给出

(2) $$(\|x\|-\varepsilon)^2<\|z\|^2=|\hat{x}(\alpha_1)|^2+\cdots+|\hat{x}(\alpha_k)|^2 \leqslant\sum_{\alpha\in A}|\hat{x}(\alpha)|^2$$

因为 $\varepsilon$ 是任意的，($c$)便可以从(2)式及 Bessel 不等式得出。

($c$)中的方程式也可以写成形式

(3) $$(x, x)=(\hat{x}, \hat{x})$$

右边的内积是象例 4.5($b$) 一样的 Hilbert 空间 $l^2(A)$中的内积．固定 $x\in H, y\in H$．如果($c$)式成立，则对每个纯量 $\lambda$

(4) $$(x+\lambda y, x+\lambda y)=(\hat{x}+\lambda\hat{y}, \hat{x}+\lambda\hat{y})$$

因此

(5) $$\bar{\lambda}(x, y)+\lambda(y, x)=\bar{\lambda}(\hat{x}, \hat{y})+\lambda(\hat{y}, \hat{x})$$

取 $\lambda=1$ 和 $\lambda=i$，那末(5)式表明$(x, y)$与$(\hat{x}, \hat{y})$有相同的实部和虚部，因而是相等的．于是($c$)蕴涵着($d$)．

最后，若($a$)不真，则在 $H$ 内存在 $u\neq0$，使 $(u, u_\alpha)=0$ 对所有的 $\alpha\in A$ 成立．若 $x=y=u$，则 $(x, y)=\|u\|^2\neq0$．然而对所有的 $\alpha\in A$，$\hat{x}(\alpha)=0$，所以($d$)也不成立．从而($d$)蕴涵着($a$)．证明完毕．

**4.19 同构** 非正式地说，两个具有相同性质的代数系统被认为是同构的，意思是指存在从一个系统到另一系统上的一一映射，它保持全部有关性质．比如说，我们可以问两个群是不是同构，或者两个域是不是同构．两个向量空间是同构的，如果有一个从一个空间到另一个空间上的一一的线性映射．线性映射是那种保持

向量空间的有关概念，即加法和纯量乘法的映射。

同样地，两个 Hilbert 空间是同构的，如果存在一个从 $H_1$ 到 $H_2$ 上的一一线性映射 $\Lambda$，使它同时也保持内积：对所有的 $x$ 与 $y\in H$，$(\Lambda x, \Lambda y)=(x,y)$成立。这样的一个 $\Lambda$ 就是 $H_1$ 到 $H_2$ 上的一个同构(或者更确切地说，一个 Hilbert 空间同构)。利用这一术语，定理 4.17 和 4.18 可以得出下列命题。

如果$\{u_\alpha: \alpha\in A\}$是 Hilbert 空间 $H$ 中的极大规范正交集，$\hat{x}(\alpha)=(x,u_\alpha)$，则映射 $x\to\hat{x}$ 是 $H$ 到 $l^2(A)$ 上的 Hilbert 空间同构。

可以证明(我们予以省略)，$l^2(A)$与 $l^2(B)$当且仅当 $A$ 与 $B$ 有相同的基数时才是同构的。然而，我们将证明每一个非平凡的Hilbert空间(这意味着空间并非由单独一个 0 组成)都有一个极大规范正交集(定理4.22)，从而每一个这样的空间都同构于某个$l^2(A)$。这一证明有赖于半序集的一个性质，该性质与选择公理等价。

**4.20 半序集** 集$\mathscr{P}$称为由二元关系“$\leqslant$”所半序化，如果

(*a*) $a\leqslant b$ 和 $b\leqslant c$ 蕴涵着 $a\leqslant c$。

(*b*) 对每个 $a\in\mathscr{P}$，$a\leqslant a$。

(*c*) $a\leqslant b$ 和 $b\leqslant a$ 蕴涵着 $a=b$。

半序集$\mathscr{P}$的子集$\mathscr{Q}$称为全序的(或线性序的)，如果每一对 $a$, $b\in\mathscr{Q}$或者满足 $a\leqslant b$、或者 $b\leqslant a$。

例如，一个给定集的每一个子集族由包含关系“$\subset$”所半序化。

为给出一个更特殊的例子，设$\mathscr{P}$是平面全体开集族，由集的包含关系所半序化。而设$\mathscr{Q}$是所有中心在原点的开圆盘族。则$\mathscr{Q}\subset\mathscr{P}$。$\mathscr{Q}$由“$\subset$”全序化，并且$\mathscr{Q}$是$\mathscr{P}$的一个极大的全序子集。这意味着当把不属于$\mathscr{Q}$的任意一个$\mathscr{P}$的元加到$\mathscr{Q}$中以后，所得到的集族就再不能由“$\subset$”全序化了。

**4.21 Hausdorff 极大性定理** 每一个非空半序集都含有极大的全序子集。

这是选择公理的一个推论，并且事实上也是等价于选择公理的。它的另一种(很相似)形式是所谓 Zorn 引理。我们将在附录中给出证明。

现在设$H$是一个非平凡的Hilbert空间，则存在$u\in H$，$\|u\|=1$。因而$H$存在非空的规范正交集。极大规范正交集的存在性就成了下述定理的一个推论。

**4.22 定理** Hilbert空间$H$中的每一个规范正交集$B$都包含在$H$的一个极大规范正交集中。

**证明** 设$\mathscr{D}$是$H$的包含给定集$B$的全体规范正交集的类。由集的包含关系将$\mathscr{D}$半序化。因为$B\in\mathscr{D}$，$\mathscr{D}\neq\varnothing$。因此$\mathscr{D}$包含一个极大全序类$\Omega$。设$S$是全体$\Omega$的元素之并。显然$B\subset S$。我们断言$S$是极大规范正交集：

如果$u_1$和$u_2\in S$，则存在$A_1$和$A_2\in\Omega$，$u_1\in A_1$，$u_2\in A_2$。因为$\Omega$是全序的，$A_1\subset A_2$(或$A_2\subset A_1$)，故$u_1\in A_2$且$u_2\in A_2$。因为$A_2$是规范正交的，当$u_1\neq u_2$时，$(u_1,u_2)=0$，当$u_1=u_2$时$(u_1,u_2)=1$。于是$S$是规范正交集。

假设$S$不是极大。则$S$是一个规范正交集$S^*$的真子集。显然$S^*\notin\Omega$，且$S^*$包含$\Omega$的每个元素。因此我们可以把$S^*$加到$\Omega$中而仍然保持全序。这却与$\Omega$的极大性相矛盾。

## 三角级数

**4.23 定义** 设$T$是复平面上单位圆周，即所有绝对值为1的复数集。如果$F$是$T$上任意一个函数，而$f$在$R^1$上由

(1) $$f(t)=F(e^{it})$$

所定义，则$f$是一个周期为$2\pi$的周期函数。这表示对所有的$t$，$f(t+2\pi)=f(t)$。反之，如果$f$是$R^1$上的周期为$2\pi$的函数，则存在一个$T$上的函数$F$使(1)式成立。这样一来，就可以把$T$上的

函数与 $R^1$ 上周期为 $2\pi$ 的函数看作同一回事；并且我们尽管考虑 $f$ 是定义在 $T$ 上的，为了记号的简单，我们有时候宁愿写 $f(t)$ 而不写 $f(e^{it})$.

记住了这个约定以后，对于 $1\leqslant p<\infty$ 定义 $L^p(T)$ 为所有 $R^1$ 上的、Lebesgue 可测的、周期为 $2\pi$ 的，并使得范数

(2) $$\|f\|_p=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\right\}^{1/p}$$

为有限的复函数类.

换言之，我们考察的是 $L^p(\mu)$，这里的 $\mu$ 是 $[0,2\pi]$ 上（或 $T$ 上）的 Lebesgue 测度除以 $2\pi$. $L^\infty(T)$ 是所有 $L^\infty(R^1)$ 中的周期为 $2\pi$ 的元素的类，以其本性上确界为范数. 而 $C(T)$ 由 $T$ 上全体连续复函数组成（或者，等价地，由全体 $R^1$ 上的周期为 $2\pi$ 的连续复函数组成），并具有范数

(3) $$\|f\|_\infty=\sup_t|f(t)|$$

(2) 式中的因子 $\frac{1}{2\pi}$ 简化了我们讨论时所涉及的形式. 例如，常数函数 1 的 $L^p$-范数是 1.

三角多项式是形如

(4) $$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\quad t\in R^1$$

的有限和式，这里 $a_0, a_1, \cdots, a_N$ 和 $b_1, \cdots, b_N$ 是复数. 根据 Euler 恒等式，(4)也可以写成

(5) $$f(t)=\sum_{n=-N}^{N}c_n e^{int}$$

的形式，这对大多数目的来说显得更方便些. 很清楚，每一个三角多项式都有周期 $2\pi$.

我们用 $Z$ 表示全体整数（正数、零和负数）的集，并且令

$$(6) \qquad u_n(t) = e^{int} \quad (n \in Z)$$

如果在 $L^2(T)$ 中用

$$(7) \qquad (f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

来定义内积，[注意，这与(2)是相协调的]. 那末，简单的计算表明

$$(8) \qquad (u_n, u_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)t} dt = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

这样，$\{u_n;\ n \in Z\}$ 是 $L^2(T)$ 的一个规范正交集，通常称之为三角函数系. 现在我们来证明这个系是极大的，并从而导出原先在Hilbert 空间那一部分所得出的抽象定理的具体形式.

**4.24 三角函数系的完备性** 定理 4.18 表明，一旦能证明全体三角多项式在 $L^2(T)$ 中稠密，就立刻可以证明三角函数系的极大性(或完备性). 因为由定理 3.14(注意 $T$ 是紧的)，$C(T)$ 在 $L^2(T)$ 内是稠密的，所以只须证明对每个 $f \in C(T)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个三角多项式 $P$ 使 $\|f-P\|_2 < \varepsilon$. 因为对每个 $g \in C(T)$，$\|g\|_2 \leqslant \|g\|_\infty$，估值 $\|f-P\|_2 < \varepsilon$ 可由 $\|f-P\|_\infty < \varepsilon$ 得到. 而这一估值就是我们要证明的.

假设我们有具有下列性质的三角多项式 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$

(a) 当 $t \in R^1$ 时，$Q_k(t) \geqslant 0$.

$$(b) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)dt = 1$$

(c) 若 $\eta_k(\delta) = \sup\{Q_k(t):\ \delta \leqslant |t| \leqslant \pi\}$，则对每个 $\delta > 0$，

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k(\delta) = 0$$

(c) 的另一种说法是：对每个 $\delta > 0$，$Q_k(t)$ 在 $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ 上一致地趋于 0.

对每个 $f\in C(T)$，我们对应一个由

(1) $$P_k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t-s)Q_k(s)ds \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

定义的函数 $P_k$. 如果我们用 $-s$ 代换 $s$、然后再用 $s-t$ 代换，这时 $f$ 和 $Q_k$ 的周期性表明积分值将不会改变. 因此

(2) $$P_k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)Q_k(t-s)ds \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

因为每个 $Q_k$ 是三角多项式，$Q_k$ 形如

(3) $$Q_k(t)=\sum_{n=-N_k}^{N_k}a_{n,k}e^{int}$$

如果用 $t-s$ 代换(3)式中的 $t$，并且代入(2)，我们即可看出每个 $P_k$ 都是三角多项式.

给定 $\varepsilon>0$，由于 $f$ 在 $T$ 上一致连续，存在 $\delta>0$，当 $|t-s|<\delta$ 时，$|f(t)-f(s)|<\varepsilon$. 由($b$)，有

$$P_k(t)-f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(t-s)-f(t)\}Q_k(s)ds$$

而($a$)蕴涵着对所有 $t$，

$$|P_k(t)-f(t)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t-s)-f(t)|Q_k(s)ds$$
$$=A_1+A_2$$

这里 $A_1$ 是$[-\delta,\delta]$上的积分而 $A_2$ 是$[-\pi,\ -\delta]\cup[\delta,\ \pi]$上的积分. 在 $A_1$ 中，被积函数小于 $\varepsilon Q_k(s)$，故由($b$)得 $A_1<\varepsilon$. 在 $A_2$ 中，有 $Q_k(s)\leqslant\eta_k(\delta)$，故由($c$)，对充分大的 $k$

(4) $$A_2\leqslant 2\|f\|_\infty\cdot\eta_k(\delta)<\varepsilon$$

因为这些估值与 $t$ 无关，我们便证明了

(5) $$\lim_{k\to\infty}\|f-P_k\|_\infty=0$$

剩下来我们就是构造 $Q_k$ 了. 这可由多种方法作出. 下面是简单的一种. 令

(6) $$Q_k(t)=c_k\left\{\frac{1+\cos t}{2}\right\}^k$$

这里 $c_k$ 选得使(*b*)成立. 由于(*a*)是明显的,我们只须证明(*c*). 因为 $Q_k$ 是偶函数,(*b*)表明

$$1=\frac{c_k}{\pi}\int_0^\pi\left\{\frac{1+\cos t}{2}\right\}^k dt>\frac{c_k}{\pi}\int_0^\pi\left\{\frac{1+\cos t}{2}\right\}^k \sin t\,dt=\frac{2c_k}{\pi(k+1)}$$

因为 $Q_k$ 在$[0,\pi]$上递减,于是

(7) $$Q_k(t)\leqslant Q_k(\delta)\leqslant\frac{\pi(k+1)}{2}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k$$

$$(0<\delta\leqslant|t|\leqslant\pi)$$

由于 $0<\delta\leqslant\pi$ 时,$1+\cos\delta<2$,这就蕴涵了(*c*).

我们便已经证明了如下的重要结果:

**4.25 定理** 如果$f\in C(T)$且$\varepsilon>0$,则存在一个三角多项式$P$,对每个实的 $t$,有

$$|f(t)-P(t)|<\varepsilon$$

一个更为精细的结果曾由 Fejér(1904)所证得: 任何 $f\in C(T)$ 的 Fourier 级数部分和的算术平均值都一致收敛于 $f$. [26]的定理 8.15 中可看到一个(十分类似于上述证法)证明.

**4.26 Fourier 级数** 对任意 $f\in L^1(T)$,我们用公式

(1) $$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt\qquad(n\in Z)$$

定义 $f$ 的 Fourier 系数,记住,这里的 $Z$ 是全体整数的集. 这样对每个 $f\in L^1(T)$,都对应了 $Z$ 上的一个函数 $\hat{f}$. $f$ 的 Fourier 级数就是

(2) $$\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int}$$

而它的部分和是

(3) $$s_N(t)=\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{int}\qquad(N=0,1,2,\cdots)$$

因为 $L^2(T)\subset L^1(T)$，(1)也可以应用于每个 $f\in L^2(T)$. 比较 4.23 节及 4.13 节的定义，现在可以用具体的语言重新叙述定理 4.17 和 4.18:

Riesz-Ficsher 定理断言：当$\{c_n\}$是一个复数序列，使

(4) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2<\infty$$

时，则存在一个 $f\in L^2(T)$ 使

(5) $$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt\qquad(n\in Z)$$

Parseval 定理断言：当 $f\in L^2(T)$ 和 $g\in L^2(T)$ 时，

(6) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\overline{g(t)}dt$$

(6)式的左边的级数绝对收敛，并且若 $s_N$ 象(3)中一样，那末

(7) $$\lim_{N\to\infty}\|f-s_N\|_2=0$$

由(6)的一个特殊场合，有

(8) $$\|f-s_N\|_2^2=\sum_{|n|>N}|\hat{f}(n)|^2$$

注意，(7)式说明每个 $f\in L^2(T)$ 都是它的 Fourier 级数部分和的 $L^2$-极限；也就是说 $f$ 的 Fourier 级数在 $L^2$ 意义下收敛于$f$. 如象第五章将要见到的那样，点态收敛提出了一个更加带有技巧性的问题.

Riesz-Fischer 定理和 Parseval 定理可以通过指明映射 $f\to\hat{f}$ 是 $L^2(T)$ 到 $l^2(Z)$ 上的 Hilbert 空间的同构而予以综合.

在其他函数空间(例如，在 $L^1(T)$ 中)的 Fourier 级数的理论，

比在 $L^2(T)$ 中更加困难，而我们仅将在少数的几方面碰到它.

注意到在 Riesz-Fischer 定理的证明中，关键部分是这样一个事实，即 $L^2$ 是完备的. 下面一点要牢牢记住，即对那些断言 $L^2$ 或者甚至任何 $L^p$ 的完备性的定理，有时也冠以"Riesz-Fischer 定理"这一名称.

## 习 题

在这一组习题中，$H$ 总是表示一个 Hilbert 空间.

1 如果 $M$ 是 $H$ 的一个闭子空间，证明 $M=(M^{\perp})^{\perp}$. 对于不一定闭的子空间 $M$，有没有一个与之类似的正确的命题？

2 对 $n=1,2,3,\cdots$，$\{v_n\}$ 是 $H$ 中一个独立的向量集. 试给出由它生成一个规范正交集 $\{u_n\}$ 的构造过程，使 $u_n$ 是 $v_1,\cdots,v_n$ 的线性组合. 注意，这可导致一个关于可分 Hilbert 空间中极大规范正交集存在的证明. 它不必借助于 Hausdorff 极大原理. (一个空间是可分的，如果它包含可数稠密子集.)

3 证明 $1\leqslant p<\infty$ 时，$L^p(T)$ 是可分的，但 $L^\infty(T)$ 不是可分的.

4 证明 $H$ 是可分的，当且仅当 $H$ 包含一个至多是可数的极大规范正交集.

5 若 $M=\{x:Lx=0\}$，这里 $L$ 是 $H$ 上的一个连续线性泛函. 证明 $M^{\perp}$ 是一个维数为 1 的向量空间(除非 $M=H$).

6 设 $\{u_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是 $H$ 中的规范正交集. 说明这是一个有界闭集而非紧的例子. 设 $Q$ 是 $H$ 中所有形如

$$x=\sum_1^\infty c_n u_n \qquad \left(\text{这里} |c_n|\leqslant\frac{1}{n}\right)$$

的 $x$ 的集. 证明 $Q$ 是紧的($Q$ 称为 Hilbert 方体).

更一般地，设 $\{\delta_n\}$ 是一个正数的序列而 $S$ 是 $H$ 中所有形如

$$x=\sum_1^\infty c_n u_n \qquad (\text{这里} |c_n|\leqslant\delta_n)$$

的 $x$ 的集. 证明当且仅当 $\sum_1^\infty \delta_n^2<\infty$ 时 $S$ 是紧的.

证明$H$不是局部紧的.

7　设$\{a_n\}$是一个正数的序列,对$b_n\geqslant 0$且$\sum b_n^2<\infty$时有$\sum a_n b_n<\infty$. 求证$\sum a_n^2<\infty$.

8　若$H_1$和$H_2$是两个 Hilbert 空间. 证明其中的一个一定同构于另一个的某个子空间.（注意, Hilbert 空间的每个闭子空间仍是 Hilbert 空间.）

9　若$A\subset[0,2\pi]$而$A$是可测的,证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \cos nx dx=\lim_{n\to\infty}\int_A \sin nx dx=0$$

10　设$n_1<n_2<n_3<\cdots$是些正整数,而$E$是所有的使$\{\sin n_k x\}$收敛的点$x\in[0,2\pi]$的集. 证明$m(E)=0$. 提示: $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$, 因此由习题 9, 在$E$上几乎处处有$\sin n_k x\to\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

11　证明恒等式

$$4(x,y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2$$

在每个内积空间中都成立. 并说明它证实了定理 4.18 中的蕴涵关系$(c)\to(d)$.

12　在 4.22 节中已指出常数$c_k$使$k^{-1}c_k$保持有界. 更精确地估计相应的积分值并证明

$$0<\lim_{k\to\infty}k^{-1/2}c_k<\infty$$

13　设$f$是$R^1$上的连续函数,周期为 1. 证明

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n\alpha)=\int_0^1 f(t)dt$$

对每个实无理数都成立. 提示: 首先对

$$f(t)=\exp(2\pi ikt),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

来做这个习题.

14　计算

$$\min_{a,b,c}\int_{-1}^{1}|x^3-a-bx-cx^2|^2dx$$

并求出

$$\max\int_{-1}^{1}x^3g(x)dx$$

这里 $g$ 满足下列限制

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx=\int_{-1}^{1} xg(x)dx=\int_{-1}^{1} x^2 g(x)dx=0;$$

$$\int_{-1}^{1} |g(x)|^2 dx=1$$

15 计算

$$\min_{a,b,c}\int_{0}^{\infty} |x^3-a-bx-cx^2|^2 e^{-x}dx$$

如习题14那样，叙述并解相应的极大值问题.

16 如果 $x_0\in H$ 而 $M$ 是 $H$ 的闭线性子空间，证明

$$\min\{\|x-x_0\|:x\in M\}=\max\{|(x_0,y)|:y\in M^{\perp},\|y\|=1\}$$

17 证明存在一个从 $[0,1]$ 到 $H$ 中的一一映射 $\gamma$，使得当 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant 1$ 时，$\gamma(b)-\gamma(a)$ 与 $\gamma(d)-\gamma(c)$ 正交（$\gamma$ 可以称为“具有正交增量的曲线”）. 提示：取 $H=L^2$，并考虑 $[0,1]$ 的某些子集的特征函数.

18 给出定理 4.16 的一个直接的证明，即不依赖于 4.15 节的更一般的考虑的证明.

19 对所有 $s\in R^1$, $t\in R^1$，定义 $u_s(t)=e^{ist}$. 设 $X$ 是这些函数 $u_s$ 的全体有限线性组合所组成的复向量空间. 如果 $f\in X$, $g\in X$，证明

$$(f,g)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} f(t)\overline{g(t)}dt$$

存在. 说明这个内积使 $X$ 成为一个 $U$ 空间，其完备化 $H$ 是一个不可分的 Hilbert 空间. 并证明 $\{u_s: s\in R^1\}$ 是 $H$ 的一个极大规范正交集.

# 第五章　Banach 空间技巧的例

## Banach 空间

**5.1**　在前一章中我们看到，关于三角级数的一些分析方面的结论，是怎样地通过一般 Hilbert 空间的实质上是几何方面的考虑，包括凸性，子空间，正交性，完备性等概念显示出来的. 在分析中也有许多问题，当我们把它们放到一个适当选择的，抽象的格局中讨论时，解决起来就变得很容易. 由于正交性是一种颇为特殊的东西，Hilbert 空间理论因而并不总是合适的. 全体 Banach 空间组成的类却提供了更大的灵活性. 这一章我们将探讨 Banach 空间的一些基本性质，并且将通过它对具体问题的应用来阐述它们.

**5.2**　**定义**　一个复向量空间 $X$ 称为赋范线性空间，如果对每个 $x\in X$，对应一个非负实数 $\|x\|$，称为 $x$ 的范数，使得

(*a*) 对所有的 $x$ 和 $y\in X$，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

(*b*) 若 $x\in X$ 而 $\alpha$ 为纯量，则 $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$，

(*c*) $\|x\|=0$ 蕴涵着 $x=0$.

由(*a*)，三角不等式

$$\|x-y\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\| \qquad (x,y,z\in X)$$

成立. 再把(*b*)(取 $\alpha=0,\alpha=-1$)(*c*)结合起来，就表明每个赋范线性空间都可以看成一个度量空间. $x$ 和 $y$ 之间的距离是 $\|x-y\|$.

Banach 空间就是一个赋范线性空间，它在由其范数所定义的度量下是完备的.

例如，每个 Hilbert 空间都是一个 Banach 空间. 同样对 $1\leqslant$

$p\leqslant\infty$，每个 $L^p(\mu)$ 以 $\|f\|_p$ 为范数时（假定 a.e. 相等的函数看作是同一的），以及 $C_0(X)$ 取上确界范数时，也都是 Banach 空间. 最简单的 Banach 空间当然就是取范数 $\|x\|=|x|$ 时的复数域本身.

我们可以同样地讨论实的 Banach 空间；除了所有的纯量都约定是实数之外，其定义刚好是相同的.

**5.3 定义** 考虑一个从赋范线性空间 $X$ 到赋范线性空间 $Y$ 的线性变换 $\Lambda$. 定义它的范数为

$$\|\Lambda\|=\sup\left\{\frac{\|\Lambda x\|}{\|x\|}:x\in X,\ x\neq 0\right\} \tag{1}$$

若 $\|\Lambda\|<\infty$，则 $\Lambda$ 称为有界线性变换.

在(1)中，$\|x\|$ 是 $X$ 中的 $x$ 的范数，$\|\Lambda x\|$ 是 $Y$ 中的 $\Lambda x$ 的范数；经常会发生几种范数同时出现的情况，我们从上下文将能搞清楚究竟指的是那一种.

我们发现，在(1)中可以限于考虑单位向量 $x$，即 $\|x\|=1$ 的那些 $x$ 而不致于改变上确界，因为

$$\|\Lambda(\alpha x)\|=\|\alpha\Lambda(x)\|=|\alpha|\,\|\Lambda x\| \tag{2}$$

同时可以发现，$\|\Lambda\|$ 是使不等式

$$\|\Lambda x\|\leqslant\|\Lambda\|\,\|x\| \tag{3}$$

对每个 $x\in X$ 成立的最小的数.

下面的几何解释是有帮助的：$\Lambda$ 将 $X$ 中的闭单位球，即集

$$\{x\in X:\ \|x\|\leqslant 1\} \tag{4}$$

映到 $Y$ 中的以 0 为中心，半径为 $\|\Lambda\|$ 的闭球之内.

取 $Y$ 为复数域，我们得到一个重要的特款；在这种情况下，我们称之为有界线性泛函.

**5.4 定理** 对于从一个赋范线性空间 $X$ 到赋范线性空间 $Y$ 内的一个线性变换 $\Lambda$，下面三个条件的每一个都蕴涵着另外两个：

(*a*) $\Lambda$ 是有界的.

(b) $\Lambda$是连续的。

(c) $\Lambda$在$X$的某个点连续。

**证明** 由于$\|\Lambda(x_1-x_2)\|\leqslant\|\Lambda\|\|x_1-x_2\|$，显然(a)蕴涵着(b)，而(b)蕴涵着(c)是不足道的. 假设 $\Lambda$ 在 $x_0$ 连续. 则对每个 $\varepsilon>0$，可以找到一个 $\delta>0$，使$\|x-x_0\|<\delta$ 蕴涵着$\|\Lambda x-\Lambda x_0\|<\varepsilon$. 换言之，$\|x\|<\delta$ 蕴涵着

$$\|\Lambda(x_0+x)-\Lambda x_0\|<\varepsilon$$

然而 $\Lambda$ 的线性表明$\|\Lambda x\|<\varepsilon$. 因而$\|\Lambda\|\leqslant\varepsilon/\delta$，故(c)蕴涵着(a).

## Baire 定理的推论

**5.5** 对于 Banach 空间的完备性这一性质，通常所采用的方式与下面的一个关于完备度量空间的定理有关，这个定理在数学的其他领域也有很多应用. 它蕴涵着使 Banach 空间成为分析中的有用工具的三个最重要的定理中的两个：Banach-Steinhaus定理和开映射定理. 第三个是 Hahn-Banach 开拓定理，在这个定理中，完备性不起作用.

**5.6 Baire 定理** 如果$X$是完备度量空间，则每个由$X$的稠密开子集组成的可数族，其交在$X$中稠密.

特别(除在平凡的场合 $X=\varnothing$ 之外)，这个交是不空的. 这通常就是本定理的主要意义.

**证明** 假设$V_1, V_2, V_3, \cdots$是$X$中的稠密开集. 设$W$是$X$的任一开集. 我们必须证明，当$W\neq\varnothing$ 时，$\bigcap V_n$ 在$W$中有一点.

设$\rho$ 是$X$的度量；我们记

$$S(x,r)=\{y\in X:\ \rho(x,y)<r\} \tag{1}$$

并设 $\bar{S}(x,r)$是$S(x,r)$的闭包. [注：存在这样一种情况，$\bar{S}(x,r)$并不包含所有使 $\rho(x,y)\leqslant r$ 的点 $y$.]

由$V_1$稠密，$W\cap V_1$是非空开集，因此我们可以找出$x_1$和$r_1$使

(2) $$\bar{S}(x_1, r_1) \subset W \cap V_1, \text{且 } 0 < r_1 < 1$$

如果 $n \geqslant 2$ 且 $x_{n-1}$ 和 $r_{n-1}$ 都已选出，则 $V_n$ 的稠密性表明 $V_n \cap S(x_{n-1}, r_{n-1})$ 是不空的，因此我们可以找出 $x_n$ 和 $r_n$ 使

(3) $$\bar{S}(x_n, r_n) \subset V_n \cap S(x_{n-1}, r_{n-1}) \quad \text{且 } 0 < r_n < \frac{1}{n}$$

由归纳法，这个过程产生出 $X$ 中的一个序列 $\{x_n\}$. 当 $i > n$ 和 $j > n$ 时，构造方式表明 $x_i$ 和 $x_j$ 同在 $S(x_n, r_n)$ 内，故 $\rho(x_i, x_j) < 2r_n < 2/n$，从而 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 序列. 因为 $X$ 是完备的，便存在点 $x \in X$ 使 $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

因为当 $i > n$ 时，$x_i$ 都在闭集 $\bar{S}(x_n, r_n)$ 内，于是得知 $x$ 位于每个 $\bar{S}(x_n, r_n)$ 内. 而(3)式表明 $x$ 位于每个 $V_n$ 内. 由(2)，$x \in W$. 这就完成了证明.

**系** 在完备度量空间中，任意可数个稠密的 $G_\delta$ 集之交还是稠密的 $G_\delta$ 集.

因为每个 $G_\delta$ 集是可数个开集之交，而可数多个可数集之并是可数的，从本定理即可得出系的结论.

**5.7** Baire 定理有时也因为下述理由而称为类型定理.

集 $E \subset X$ 称为无处稠密，如果它的闭包 $\bar{E}$ 不包含 $X$ 的非空开集. 无处稠密集的任意一个可数并称之为第一类型集；而 $X$ 的其他的集就称为第二类型的(Baire 的说法). 定理 5.6 等价于说没有一个完备度量空间是第一类型的. 要看出这一点，只须在定理5.6的说法中取余集就够了.

**5.8 Banach-Steinhaus 定理** 假设 $X$ 是 Banach 空间，$Y$ 是赋范线性空间，而 $\{\Lambda_\alpha\}$ 是 $X$ 到 $Y$ 的一族有界线性变换，这里 $\alpha$ 取值于某个指标集 $A$ 上，那末，或者存在 $M < \infty$，使对每个 $\alpha \in A$，

(1) $$\|\Lambda_\alpha\| \leqslant M$$

或者对所有属于 $X$ 的某个稠密 $G_\delta$ 集的 $x$

(2) $$\sup\|\Lambda_\alpha x\|=\infty$$

用几何语言来说，这一命题另一种叙述如下：或者 $Y$ 中有一个球 $B$（半径为 $M$ 而中心为0）使每个 $\Lambda_\alpha$ 映 $X$ 的单位球到 $B$ 内，或者存在 $x\in X$（事实上是它们的整个稠密的 $G_\delta$ 集）使 $Y$ 中没有一个球能包含所有的 $\Lambda_\alpha x$.

这一定理有时也称为一致有界性原理.

**证明** 令

(3) $$\varphi(x)=\sup_{\alpha\in A}\|\Lambda_\alpha x\| \qquad (x\in X)$$

并令

(4) $$V_n=\{x:\varphi(x)>n\} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

因为每个 $\Lambda_\alpha$ 都是连续的，并且 $Y$ 的范数是 $Y$ 上的连续函数（就象定理 4.6 的证明一样，它是三角不等式的一个直接推论），每个函数 $x\to\|\Lambda_\alpha x\|$ 在 $X$ 上连续. 因此 $\varphi$ 是下半连续的，并且 $V_n$ 是开集.

如果这些集中的一个，比如说 $V_N$ 不稠密于 $X$，则存在一个 $x_0\in X$ 和 $r>0$，使 $\|x\|\leqslant r$ 蕴涵着 $x_0+x\notin V_N$；这就意味着 $\varphi(x_0+x)\leqslant N$，或

(5) $$\|\Lambda_\alpha(x_0+x)\|\leqslant N$$

对所有 $\alpha\in A$ 和满足 $\|x\|\leqslant r$ 的所有 $x$ 都成立. 由 $x=(x_0+x)-x_0$，于是有

(6) $$\|\Lambda_\alpha x\|\leqslant\|\Lambda_\alpha(x_0+x)\|+\|\Lambda_\alpha x_0\|\leqslant 2N$$

并且得到(1)式对 $M=2N/r$ 成立.

另一种可能性是每个 $V_n$ 在 $X$ 中稠密. 在这种情况下，由 Baire 定理，$\cap V_n$ 是 $X$ 中一个稠密 $G_\delta$ 集. 由于对每个 $x\in\cap V_n$，$\varphi(x)=\infty$. 证明完毕.

**5.9 开映射定理** 设 $U$ 和 $V$ 是Banach 空间 $X$ 和 $Y$ 的开单位

球. 对 $X$ 到 $Y$ 上的每一个有界线性变换 $\Lambda$, 相应地有一个 $\delta>0$, 使

(1) $$\Lambda(U)\supset\delta V$$

请注意假设中"到 $Y$ 上"这个词! 符号 $\delta V$ 表示集 $\{\delta y: y\in V\}$, 即所有 $\|y\|<\delta$ 的 $y\in Y$ 的集.

从(1)及 $\Lambda$ 的线性得知, $X$ 的每一个中心为 $x_0$ 的开球的象都包含 $Y$ 内一个中心在 $\Lambda x_0$ 的开球. 因此, 每个开集的象都是开的. 这就解释了本定理的名称.

下面是(1)的另一种说法: 对每个 $y$, $\|y\|<\delta$, 都对应有一个 $x$ 满足 $\|x\|<1$, 使 $\Lambda x=y$.

**证明** 给定 $y\in Y$. 存在 $x\in X$ 使 $\Lambda x=y$; 若 $\|x\|<k$, 便有 $y\in\Lambda(kU)$. 因此 $Y$ 是集 $\Lambda(kU)$ 当 $k=1, 2, 3, \cdots$ 时的并. 因为 $Y$ 是完备的, Baire 定理蕴涵着存在一个非空开集 $W$ 位于某个 $\Lambda(kU)$ 的闭包内. 这意味着 $W$ 的每个点都是一个序列 $\{\Lambda x_i\}$ 的极限点, 此处 $x_i\in kU$. 从现在起, $k$ 和 $W$ 都固定下来.

选取 $y_0\in W$ 和 $\eta>0$, 使得当 $\|y\|<\eta$ 时, $y_0+y\in W$. 对任一个这样的 $y$ 都有 $kU$ 中的序列 $\{x'_i\}$, $\{x''_i\}$ 使

(2) $$\Lambda x'_i\to y_0,\quad \Lambda x''_i\to y_0+y\qquad (i\to\infty)$$

取 $x_i=x''_i-x'_i$, 我们有 $\|x_i\|<2k$ 和 $\Lambda x_i\to y$. 因为这对每一个 $\|y\|<\eta$ 的 $y$ 成立, $\Lambda$ 的线性表明当 $\delta=\eta/2k$ 时, 下述命题是真确的:

对每个 $y\in Y$ 和每个 $\varepsilon>0$, 都对应一个 $x\in X$ 使

(3) $$\|x\|\leqslant\delta^{-1}\|y\|\quad 及\quad \|y-\Lambda x\|<\varepsilon$$

象在我们证明开始之前所说的一样, 除了在那里我们要求 $\varepsilon=0$ 之外, 这几乎就是我们所要的结论.

固定 $y\in\delta V$ 和 $\varepsilon>0$. 由(3)存在 $x_1$, 使 $\|x_1\|<1$, 且

(4) $$\|y-\Lambda x_1\|<\frac{1}{2}\delta\varepsilon$$

设 $x_1, \cdots, x_n$ 已选好, 使

$$(5) \qquad \|y - \Lambda x_1 - \cdots - \Lambda x_n\| < 2^{-n}\delta\varepsilon$$

利用(3)并以(5)式左边的向量代替其中的 $y$，就得到一个 $x_{n+1}$，使 $n+1$ 代替 $n$ 时，(5)式成立，且

$$(6) \qquad \|x_{n+1}\| < 2^{-n}\varepsilon \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

如果令$s_n = x_1 + \cdots + x_n$，(6)式表明$\{s_n\}$是$X$中的Cauchy序列. 由 $X$ 完备，存在 $x \in X$ 使 $s_n \to x$. 不等式$\|x_1\| < 1$ 和(6)式一道保证了$\|x\| < 1+\varepsilon$. 由 $\Lambda$ 连续，$\Lambda s_n \to \Lambda x$. 由(5)，$\Lambda s_n \to y$. 因此

$$\Lambda x = y.$$

现在我们已经证明了，对每个 $\varepsilon > 0$，

$$(7) \qquad \Lambda((1+\varepsilon)U) \supset \delta V$$

或者

$$(8) \qquad \Lambda(U) \supset (1+\varepsilon)^{-1}\delta V$$

当取遍所有 $\varepsilon > 0$ 时，(8) 式右边的这些集的并就是 $\delta V$. 这就证明了(1).

**5.10 定理** 如果$X$和$Y$都是 Banach 空间. $\Lambda$ 是$X$到$Y$上的一一的有界线性变换，则存在 $\delta > 0$，使

$$(1) \qquad \|\Lambda x\| \geqslant \delta\|x\| \qquad (x \in X)$$

换句话说，$\Lambda^{-1}$ 是 $Y$ 到 $X$ 上的一个有界线性变换.

**证明** 如果 $\delta$ 象定理 5.9 的叙述中那样选择，那末，该定理的结论和 $\Lambda$ 是一一的这一事实结合起来就表明，$\|\Lambda x\| < \delta$ 蕴涵着 $\|x\| < 1$. 因此，$\|x\| \geqslant 1$ 蕴涵着$\|\Lambda x\| \geqslant \delta$，于是(1)式得证.

变换 $\Lambda^{-1}$ 在 $Y$ 上可以这样定义：若 $y = \Lambda x$ 时，则 $\Lambda^{-1}y = x$. 容易验证 $\Lambda^{-1}$ 是线性的，而(1)则蕴涵着$\|\Lambda^{-1}\| \leqslant 1/\delta$.

## 连续函数的 Fourier 级数

**5.11 一个收敛问题** 对每个 $f \in C(T)$，$f$ 的 Fourier 级数在每一点 $x$ 都收敛于$f(x)$，对吗？

让我们回忆一下，$f$ 的 Fourier 级数在点 $x$ 的第 $n$ 个部分和由

(1) $$s_n(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)\,dt \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

给出，这里

(2) $$D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}$$

这直接从公式 4.26(1) 和 4.26(3) 得出.

问题在于判定

(3) $$\lim_{n\to\infty}s_n(f;x)=f(x)$$

是否对每个 $f\in C(T)$ 和每个实数 $x$ 成立. 我们在 4.26 一节看到部分和按 $L^2$ 范数收敛于 $f$，因此定理 3.12 蕴涵着每个 $f\in L^2(T)$ [从而对每个 $f\in C(T)$ 亦然]都是整个部分和序列的某个子序列的 a. e. 点态极限. 但这并没有回答现在提出的问题.

我们将会看到，Banach-Steinhaus 定理否定地回答了这个问题. 令

(4) $$s^*(f;x)=\sup_n|s_n(f;x)|$$

开始取 $x=0$，并定义

(5) $$\Lambda_n f=s_n(f;0) \qquad (f\in C(T);n=1,2,3,\cdots)$$

我们知道 $C(T)$ 对于上确界范数 $\|f\|_\infty$ 是一个 Banach 空间. 从(1)得知，每个 $\Lambda_n$ 都是 $C(T)$ 上的有界线性泛函，其范数

(6) $$\|\Lambda_n\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt=\|D_n\|_1$$

我们断言

(7) $$\text{当 } n\to\infty \text{ 时，} \|\Lambda_n\|\to\infty$$

这可以通过指出(6)式中等式成立，以及

(8) $$\text{当 } n\to\infty \text{ 时，} \|D_n\|_1\to\infty$$

而予以证明.

将(2)式分别乘以 $e^{it/2}$ 和 $e^{-it/2}$,并从所得的两个等式中的一个减去另一个,得到

$$D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin(t/2)} \tag{9}$$

因为对所有实数 $x$, $|\sin x|\leqslant|x|$,(9)式指出

$$\|D_n\|_1>\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|\frac{dt}{t}=\frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi}|\sin t|\frac{dt}{t}$$

$$>\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\,dt=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to\infty$$

这就证明了(8).

其次,固定 $n$,并且若 $D_n(t)\geqslant0$,令 $g(t)=1$;若 $D_n(t)<0$,令 $g(t)=-1$. 存在 $f_j\in C(T)$ 使 $-1\leqslant f_j\leqslant1$,且当 $j\to\infty$ 时,对每个 $t$,$f_j(t)\to g(t)$. 由控制收敛定理,

$$\lim_{j\to\infty}\Lambda_n(f_j)=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_j(-t)D_n(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(-t)D_n(t)dt=\|D_n\|_1$$

这样,(6)式中的等式成立,并且证明了(7)式.

由(7)成立,Banach-Steinhaus 定理现在就断言 $s^*(f;0)=\infty$ 对 $C(T)$ 中某个稠密 $G_\delta$ 集中的每个 $f$ 成立.

我们选 $x=0$ 只是为了方便. 很明显,同样的结论对每个 $x$ 都是成立的.

对每个实数 $x$ 都对应一个集 $E_x\subset C(T)$,它是 $C(T)$ 中一个稠密 $G_\delta$ 集,使每个 $f\in E_x$, $s^*(f;x)=\infty$.

特别,每个 $f\in E_x$ 的 Fourier 级数在 $x$ 是发散的. 因此得到了我们提出的那个问题的否定回答.

注意到下述之点是很有趣的,即上面的结论还可以通过 Baire

定理的另外一个应用而得到强化．假如我们取可数多个点 $x_i$，并且令 $E$ 为相应的集

$$E_{x_i}\subset C(T)$$

的交．由 Baire 定理，$E$ 是 $C(T)$ 中的一个稠密 $G_\delta$ 集．对于每个 $f\in E$，在每个点 $x_i$ 都有

$$s^*(f;x_i)=\infty$$

对每个 $f$，$s^*(f;x)$ 是 $x$ 的下半连续函数．这是因为(4)式表示了它是一族连续函数的上确界．因此对每个 $f$，$\{x:s^*(f;x)=\infty\}$ 是 $R^1$ 中的 $G_\delta$ 集．如果取上述点 $x_i$ 使它们的并在$(-\pi,\ \pi)$上稠密．我们便得如下结果：

**5.12　定理**　存在一个集 $E\subset C(T)$，它在 $C(T)$ 中是稠密的 $G_\delta$ 集，并具有下列性质：对每个 $f\in E$，集

$$Q_f=\{x:s^*(f;x)=\infty\}$$

是 $R^1$ 上的稠密 $G_\delta$ 集．

如果我们证实了 $E$ 以及每个 $Q_f$ 都是不可数集，那将是很有趣的．

**5.13　定理**　在不存在孤立点的完备度量空间中，没有一个可数稠密集是 $G_\delta$ 集．

**证明**　设 $x_k$ 是 $X$ 的可数稠密集 $E$ 的点．假定 $E$ 是 $G_\delta$ 集．那末，$E=\bigcap V_n$，这里 $V_n$ 是稠密的开集．设

$$W_n=V_n-\bigcup_{k=1}^{n}\{x_k\}$$

则每个 $W_n$ 还是稠密开集．但 $\bigcap W_n=\varnothing$．这与 Baire 定理矛盾．

注：稍微修改一下 Baire 定理的证明，就可证明当 $X$ 如上假设时，其每一个稠密 $G_\delta$ 集都包含一个完全集．

## $L^1$-函数的 Fourier 系数

**5.14**　象 4.26 节一样，对每个 $f\in L^1(T)$ 我们对应 $Z$ 上的一个

函数 $\hat{f}$,由

(1) $$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt \qquad (n\in Z)$$

定义. 容易证明,对每个 $f\in L^1$,当 $|n|\to\infty$ 时,$\hat{f}(n)\to 0$. 因为我们知道 $C(T)$ 是稠于 $L^1(T)$(定理 3.14)而三角多项式是稠于 $C(T)$ 的(定理 4.25). 这就是说如果 $\varepsilon>0, f\in L^1(T)$,就存在 $g\in C(T)$ 和三角多项式 $P$,使 $\|f-g\|_1<\varepsilon$ 和 $\|g-P\|_\infty<\varepsilon$.
由于

$$\|g-P\|_1\leqslant\|g-P\|_\infty$$

便得到 $\|f-P\|_1<2\varepsilon$,而当 $|n|$ 足够大(依赖于 $P$)时,

(2) $$|\hat{f}(n)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(t)-P(t)\}e^{-int}dt\right|\leqslant\|f-P\|_1<2\varepsilon$$

这样,当 $n\to\pm\infty$ 时, $\hat{f}(n)\to 0$. 此即所谓的 Riemann-Lebesgue 引理.

我们想提出的问题是,它的逆命题是否是正确呢? 也就是说,如果 $\{a_n\}$ 是一个复数序列,当 $n\to\pm\infty$ 时,$a_n\to 0$,那末,有没有一个 $f\in L^1(T)$,使得对所有 $n\in Z$, $\hat{f}(n)=a_n$? 换言之,有没有一个类似于Riesz-Fischer 定理的结论在现在的情况下保持正确?

借助于开映射定理容易对此作出(否定的)回答.

设 $\varphi$ 是使得 $n\to+\infty$ 时 $\varphi(n)\to 0$ 的 $Z$ 上的复函数,$c_0$ 是由全体这样的 $\varphi$ 所组成的空间,并赋予上确界范数

(3) $$\|\varphi\|_\infty=\sup\{|\varphi(n)|:n\in Z\}$$

则容易看出 $c_0$ 是一个 Banach 空间. 事实上,如果我们规定 $Z$ 的每个子集都是开集,那末,$Z$ 是一个局部紧 Hausdorff 空间,而 $c_0$ 就是 $C_0(Z)$.

下述定理包含了我们的问题的答案:

**5.15 定理** 映射 $f\to\hat{f}$ 是 $L^1(T)$ 到 $c_0$ 内(不是到上)的一个

一一有界线性变换.

**证明** 用 $\Lambda f=\hat{f}$ 定义 $\Lambda$. $\Lambda$ 显然是线性的. 我们刚才已证明了 $\Lambda$ 映 $L^1(T)$ 到 $c_0$ 内, 而公式 5.14(1) 表明 $|\hat{f}(n)|\leqslant\|f\|_1$, 所以 $\|\Lambda\|\leqslant 1$(实际上, $\|\Lambda\|=1$, 这只须取 $f=1$ 即可看出). 现在我们来证明 $\Lambda$ 是一一的. 假设 $f\in L^1(T)$, 而对每个 $n\in Z$, $\hat{f}(n)=0$. 那末, 当 $g$ 是任意一个三角多项式时,

(1) $$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt=0$$

由定理 4.25 和控制收敛定理, 对每个 $g\in C(T)$, (1)式也成立. 与 Lusin 定理的系联系起来, 再一次应用控制收敛定理, 得出(1)式对 $T$ 中任意可测集的特征函数 $g$ 也成立的结论. 现在, 定理1.39 (b) 表明 $f=0$ a.e.

假如 $\Lambda$ 的值域是整个 $c_0$. 定理 5.10 将蕴涵着存在一个$\delta>0$, 使对每个 $f\in L^1(T)$

(2) $$\|\hat{f}\|_\infty\geqslant\delta\|f\|_1$$

但是, 若 $D_n(t)$ 如 5.11 节一样定义, 这时, 对$n=1,2,3,\cdots$, $D_n\in L^1(T)$, $\|\hat{D}_n\|_\infty=1$. 而 $n\to\infty$ 时, $\|D_n\|_1\to\infty$. 因此不存在 $\delta>0$ 使不等式

(3) $$\|\hat{D}_n\|_\infty\geqslant\delta\|D_n\|_1$$

对每个 $n$ 成立.

定理证毕.

## Hahn-Banach 定理

**5.16 定理** 如果$M$是赋范线性空间$X$的一个子空间, 而$f$是$M$上的一个有界线性泛函, 则$f$可以开拓为$X$上的一个有界线性泛函$F$, 使$\|F\|=\|f\|$.

注意, $M$不一定要是闭的.

在着手证明之前，看来要作些说明．首先，我们说 $F$ 是 $f$ 的一个开拓（在最一般的情况下）是指 $F$ 的定义域包含了 $f$ 的定义域，而且对于属于 $f$ 的定义域的所有 $x$，$F(x)=f(x)$．其次，范数 $\|F\|$ 和 $\|f\|$ 是各自按 $F$ 和 $f$ 的定义域来计算的；显然

$$\|f\|=\sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|}:x\in M\right\},\qquad \|F\|=\sup\left\{\frac{|F(x)|}{\|x\|}:x\in X\right\}$$

第三点说明是与纯量域有关的．迄今，所有的内容都是就复数域来讲的，但完全可以用实数域取代复数域而不必改变陈述和证明．Hahn-Banach 定理在两种场合都正确；不过，它主要是以"实"形式的定理出现．当 Banach 写出他的经典著作"Opérations Linéares"时对复的情况没有证明，其主要原因可能是在他的著作中只考虑实数情况．

在这里引进一些临时性的名词术语是有益的．回忆一下，$V$ 是一个复（实）向量空间，如果当 $x$ 和 $y\in V$ 时 $x+y\in V$，且对所有复（实）数 $\alpha$，$\alpha x\in V$．很明显，每个复向量空间同时也是一个实向量空间．复向量空间 $V$ 上的复函数 $\varphi$ 是复线性泛函，如果对所有 $x$ 和 $y\in V$ 及所有复数 $\alpha$，

(1) $$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)\quad 和\quad \varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$$

成立．在复（实）向量空间 $V$ 上的一个实值函数 $\varphi$ 是一个实线性泛函，如果(1)式对所有实数 $\alpha$ 成立．

如果 $u$ 是复线性泛函 $f$ 的实部，即如果对所有 $x\in V$，$u(x)$ 是复数 $f(x)$ 的实部，则容易看出 $u$ 是一个实线性泛函．下述 $f$ 与 $u$ 之间的关系是成立的：

**5.17 命题** 设 $V$ 是复向量空间．

(a) 如果 $u$ 是 $V$ 上的复线性泛函 $f$ 的实部，则

(1) $$f(x)=u(x)-iu(ix)\qquad (x\in V)$$

(b) 如果 $u$ 是 $V$ 上的一个实线性泛函，而 $f$ 由(1)式定义，则

$f$ 是$V$上的一个复线性泛函.

(c) 如果$V$是赋范线性空间，而$f$与$u$有(1)式的关系，则 $\|f\|=\|u\|$.

**证明** 若$\alpha$与$\beta$是实数而$z=\alpha+i\beta$,则$iz$的实部是$-\beta$. 对所有复数$z$这就得出了等式

$$(2)\qquad z=\mathrm{Re}z-i\mathrm{Re}(iz)$$

因为

$$(3)\qquad \mathrm{Re}(if(x))=\mathrm{Re}f(ix)=u(ix)$$

令$z=f(x)$,(1)便由(2)式得出.

在(b)的假设下，显然,$f(x+y)=f(x)+f(y)$,且对所有的实数$\alpha$,$f(\alpha x)=\alpha f(x)$. 但同样也有

$$(4)\qquad f(ix)=u(ix)-iu(-x)=u(ix)+iu(x)=if(x)$$

这就证明了$f$是复线性的.

由于$|u(x)|\leqslant|f(x)|$，我们有$\|u\|\leqslant\|f\|$. 另一方面,对每个$x\in V$都对应有一个复数$\alpha$，$|\alpha|=1$,使$\alpha f(x)=|f(x)|$. 因此,

$$(5)\qquad |f(x)|=f(\alpha x)=u(\alpha x)\leqslant\|u\|\cdot\|\alpha x\|=\|u\|\cdot\|x\|$$

这就证明了$\|f\|\leqslant\|u\|$.

**5.18 定理5.16的证明** 我们首先假定$X$是实赋范线性空间,从而$f$是$M$上的一个实有界线性泛函. 若$\|f\|=0$,则所求的开拓就是$F=0$. 去掉这种情况,不失一般性，可假定$\|f\|=1$.

选$x_0\in X$,$x_0\notin M$,并设$M_1$是由$M$和$x_0$张成的向量空间，于是$M_1$由所有形如$x+\lambda x_0$的向量组成,这里$x\in M$而$\lambda$是实数. 如果定义$f_1(x+\lambda x_0)=f(x)+\lambda\alpha$，这里$\alpha$是任意固定的一个实数、容易验证，这样得到从$f$到$M_1$上的一个线性泛函开拓. 问题是要选择$\alpha$使开拓后的线性泛函仍然有范数1. 这也就是要求

$$(1)\qquad |f(x+\lambda x_0)|\leqslant\|x+\lambda x_0\|\qquad (x\in M,\lambda\text{ 是实数})$$

用$-\lambda x$代替$x$，并以$|\lambda|$除(1)式的两边. 这个要求于是变为

(2) $$|f(x)-\alpha|\leqslant\|x-x_0\| \qquad (x\in M)$$
即，对所有 $x\in M$，$A_x\leqslant\alpha\leqslant B_x$，这里

(3) $$A_x=f(x)-\|x-x_0\| \quad 而 \quad B_x=f(x)+\|x-x_0\|$$
这样的 $\alpha$ 当且仅当所有的区间$[A_x,B_x]$有公共点，也就是说，当且仅当对所有的 $x$ 和 $y\in M$，

(4) $$A_x\leqslant B_y$$
时才会存在. 但是

(5) $$f(x)-f(y)=f(x-y)\leqslant\|x-y\|\leqslant\|x-x_0\|+\|y-x_0\|$$
因此由(3)可得出(4).

现在我们已经证明了存在一个 $f$ 的到 $M_1$ 上的保范开拓 $f_1$.

设 $\mathscr{P}$ 是全体序对$(M',f')$的集族，其中 $M'$ 是$X$中的包含$M$的一个子空间，而 $f'$ 是 $f$ 的到 $M'$ 上的实线性开拓，具有$\|f'\|=1$. 我们声称$(M',f')\leqslant(M'',f'')$意味着 $M'\subset M''$，且对所有的 $x\in M'$，$f'(x)=f''(x)$，而将 $\mathscr{P}$ 半序化. 关于半序的公理显然是满足的. 由于 $\mathscr{P}$ 包含$(M,f)$，所以不是空集，于是 Hausdorff 极大性定理断言 $\mathscr{P}$ 有一个极大的全序子集族 $\Omega$.

设 $\Phi$ 是使$(M',f')\in\Omega$ 的所有 $M'$ 的集族. 那末，按照集的包含关系，$\Phi$是全序的. 因此$\Phi$ 的所有元素之并 $\widetilde{M}$ 是$X$的一个子空间.（注意，一般地说两个子空间之并不是一个子空间. $R^3$中两个通过原点的平面就是一例.）如果 $x\in\widetilde{M}$，则对某个 $M'\in\Phi$，有 $x\in M'$；定义 $F(x)=f'(x)$，这里 $f'$ 是序对$(M',f')\in\Omega$ 中相应的函数. $\Omega$ 中半序的定义表明，只要 $M'$ 包含 $x'$，究竟选择那一个 $M'$ 去确定 $F(x)$是无关紧要的.

现在容易验证$F$是 $\widetilde{M}$ 上的线性泛函，且$\|F\|=1$. 假如 $\widetilde{M}$ 是$X$的一个真子空间，证明的第一部分就给出一个$F$的进一步的开拓，这将与 $\Omega$ 的极大性矛盾. 因此，$\widetilde{M}=X$. 这就完成了实纯量场合的证明.

现在，如果 $f$ 是复赋范线性空间 $X$ 的子空间 $M$ 上的一个复线性泛函，设 $u$ 是 $f$ 的实部. 运用实 Hahn-Banach 定理将 $u$ 开拓为 $X$ 上的实线性泛函 $U$，使 $\|U\|=\|u\|$，并定义

$$F(x)=U(x)-iU(ix) \qquad (x\in X) \tag{6}$$

由命题 5.17，$F$ 是 $f$ 的一个复线性开拓，且

$$\|F\|=\|U\|=\|u\|=\|f\|$$

这就完成了证明.

让我们提出 Hahn-Banach 定理的两个重要的推论：

**5.19 定理** 设 $M$ 是赋范线性空间 $X$ 的一个线性子空间，$x_0\in X$. 则 $x_0$ 属于 $M$ 的闭包 $\overline{M}$，当且仅当不存在 $X$ 上的有界线性泛函 $f$ 使所有 $x\in M$，$f(x)=0$ 而 $f(x_0)\neq 0$.

**证明** 如果 $x_0\in\overline{M}$，$f$ 是 $X$ 上的有界线性泛函，且对所有 $x\in M$，$f(x)=0$. 则 $f$ 的连续性表明同样有 $f(x_0)=0$.

反之，设 $x_0\notin\overline{M}$. 则存在 $\delta>0$，使所有 $x\in M$，$\|x-x_0\|>\delta$. 设 $M'$ 是由 $M$ 和 $x_0$ 生成的子空间，并且，当 $x\in M$，$\lambda$ 是纯量时，定义 $f(x+\lambda x_0)=\lambda$. 因为

$$\delta|\lambda|\leqslant|\lambda|\,\|x_0+\lambda^{-1}x\|=\|\lambda x_0+x\|$$

可以看出 $f$ 是 $M'$ 上的线性泛函，其范数至多是 $\delta^{-1}$. 同时在 $M$ 上，$f(x)=0$，$f(x_0)=1$. Hahn-Banach 定理允许我们将这个 $f$ 从 $M'$ 开拓到 $X$ 上.

**5.20 定理** 如果 $X$ 是一个赋范线性空间，且 $x_0\in X$，$x_0\neq 0$，则存在一个 $X$ 上的范数为 1 的有界线性泛函 $f$ 使 $f(x_0)=\|x_0\|$.

**证明** 设 $M=\{\lambda x_0\}$，并定义 $f(\lambda x_0)=\lambda\|x_0\|$. 则 $f$ 是 $M$ 上的范数为 1 的线性泛函. 这时可以再次应用 Hahn-Banach 定理.

**5.21 评注** 如果 $X$ 是一个赋范线性空间，设 $X^*$ 是 $X$ 上全体有界线性泛函的集族. 如果线性泛函的加法和纯量乘法以明显的方式予以定义，容易看出 $X^*$ 仍是一个赋范线性空间. 事实上，$X^*$

是一个 Banach 空间. 这只要从纯量域是一个完备度量空间这一事实就可以得出. 我们把 $X^*$的这些性质的验证留作习题.

定理 5.20 的推论之一是, 当 $X$ 是非平凡的向量空间(即 $X$ 有非 0 向量)时, $X^*$也是非平凡的. 事实上, $X^*$在 $X$ 上是分离两点的. 这意味着, 如果在 $X$ 中 $x_1 \neq x_2$, 则存在一个 $f \in X^*$ 使 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 为了证明这点, 只须在定理 5.20 中取 $x_0 = x_2 - x_1$.

另外一个推论是, 对 $x \in X$,

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}$$

因此, 对固定的 $x \in X$, 映射 $f \to f(x)$ 是 $X^*$ 上的一个范数为 $\|x\|$ 的有界线性泛函.

$X$ 与 $X^*$(所谓 $X$ 的"对偶空间")之间的这一相互对应, 构成了人们熟知的泛函分析这一数学分支的一个很大部分的基础.

## Poisson 积分的一种抽象处理

**5.22** 要将 Hahn-Banach 定理成功地应用于具体问题, 当然有赖于所论及的赋范线性空间上的有界线性泛函的知识. 迄今为止, 我们还只是确定了一个 Hilbert 空间上的有界线性泛函. (在那种情况下, Hahn-Banach 定理的一种更简单的证明方法是存在的, 参看习题 6), 同时我们也知道 $C_c(X)$ 上的正线性泛函.

现在我们将描述一种一般场合, 在这种场合下, 前面提到的那种泛函很自然地就会出现.

设 $K$ 是一个紧 Hausdorff 空间, $H$ 是 $K$ 的紧子集, 并设 $A$ 是 $C(K)$ 的一个子空间, 使 $1 \in A$(1 表示对每个 $x \in X$ 对应于数 1 的函数), 并且使

(1) $$\|f\|_K = \|f\|_H \qquad (f \in A)$$

这里我们采用记号

(2) $$\|f\|_E = \sup\{|f(x)| : x \in E\}$$

由于 5.23 节讨论过的例子，$H$ 有时称为对应于空间 $A$ 的 $K$ 的边界.

如果 $f\in A, x\in K$，(1)说明

$$(3)\qquad |f(x)|\leqslant\|f\|_H$$

特别，对每个 $y\in H$，若 $f(y)=0$，则对所有 $x\in K, f(x)=0$. 因此，若 $f_1, f_2\in A$，且对每个 $y\in H, f_1(y)=f_2(y)$，则 $f_1=f_2$. 要看出这点，只须取 $f=f_1-f_2$ 即可.

设 $M$ 是 $H$ 上的，由所有的 $A$ 的元素限制在 $H$ 上而成的函数的集. 显然，$M$ 是 $C(H)$ 的一个子空间. 前面的评注表明 $M$ 的每一个元素都有唯一的一个开拓使它是 $A$ 的一个元素. 这样我们就得到 $M$ 和 $A$ 之间的一个自然的一一对应，而且由(1)，它是保范的. 因此，当我们用同一字母来表示 $A$ 的元素以及它在 $H$ 上的限制时，是决不会发生混淆的.

固定一点 $x\in K$. 不等式(3)表明映射 $f\to f(x)$ 是 $M$ 上的范数为 1 的有界线性泛函[因为 $f=1$ 时(3)式成为等式]. 由 Hahn-Banach 定理，存在一个 $C(H)$ 上的，范数为 1 的线性泛函 $\Lambda$，使

$$(4)\qquad \Lambda f=f(x)\qquad (f\in M)$$

我们断言性质

$$(5)\qquad \Lambda 1=1,\quad \|\Lambda\|=1$$

蕴涵着 $\Lambda$ 是 $C(H)$ 上的正线性泛函.

为了证明这一点，假设 $f\in C(H)$，$0\leqslant f\leqslant 1$. 令 $g=2f-1$ 并令 $\Lambda g=\alpha+i\beta$. 这里 $\alpha,\beta$ 是实数. 注意 $-1\leqslant g\leqslant 1$，故 $|g+ir|^2\leqslant 1+r^2$ 对每个实常数 $r$ 成立. 因此(5)蕴涵着

$$(6)\qquad (\beta+r)^2\leqslant|\alpha+i(\beta+r)|^2=|\Lambda(g+ir)|^2\leqslant 1+r^2$$

这样，对每个 $r$ 有 $\beta^2+2r\beta\leqslant 1$，从而必然有 $\beta=0$. 因为 $\|g\|_H\leqslant 1$，我们便有 $|\alpha|\leqslant 1$；所以

(7) $$\Lambda f=\frac{1}{2}\Lambda(1+g)=\frac{1}{2}(1+\alpha)\geqslant 0$$

现在可以应用定理 2.14. 它表明在$H$上存在一个正则的、正的 Borel 测度 $\mu_x$, 使

(8) $$\Lambda f=\int_H f d\mu_x \qquad (f\in C(H))$$

特别, 我们得到表示式

(9) $$f(x)=\int_H f d\mu_x \qquad (f\in A)$$

这样, 我们已经证明了, 对每个 $x\in K$, 在"边界"$H$上都有一个正的测度 $\mu_x$, 它在(9)式对每个 $f\in A$ 都成立这种意义下"表示"了 $x$.

注意, $\Lambda$ 唯一地决定了 $\mu_x$; 然而没有理由期望 Hahn-Banach 开拓是唯一的. 因此一般说来, 关于这个表示测度的唯一性, 我们没有更多的话可说. 但是, 象即将看到的那样, 在某种特殊的场合下是能够得出唯一性的.

**5.23** 为了看出前面那种场合的例子, 设$U=\{z:|z|<1\}$是复平面上的开单位圆盘. 令 $K=\bar{U}$(闭单位圆盘), 并取$H$为$U$的边界$T$. 我们断言每个多项式 $f$, 即每个形如

(1) $$f(z)=\sum_{n=0}^{N}a_n z^n$$

的函数, 这里 $a_0,\cdots,a_N$ 是复数, 都满足关系式

(2) $$\|f\|_U=\|f\|_T$$

(注意, $f$ 的连续性表明$|f|$在$U$上的上确界与在$\bar{U}$上的上确界相同.)

因为$\bar{U}$是紧的, 存在 $z_0\in\bar{U}$ 使$|f(z_0)|\geqslant|f(z)|$对所有的 $z\in\bar{U}$ 成立. 假设 $z_0\in U$, 于是

(3) $$f(z)=\sum_{n=0}^{N}b_n(z-z_0)^n$$

且当 $0<r<1-|z_0|$ 时，我们得到

$$\sum_{n=0}^{N}|b_n|^2r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|^2d\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(z_0)|^2d\theta=|b_0|^2$$

从而 $b_1=b_2=\cdots=b_N=0$；即 $f$ 是常数．这样，对每个非常数的多项式 $f$，$z_0\in T$．这就证明了(2)．

（我们刚才证明了最大模定理的一种特殊情况；稍后我们将看到这是所有全纯函数的一个重要性质．）

**5.24 Poisson 积分** 设 $A$ 是 $C(\overline{U})$（象上面一样，这里的 $\overline{U}$ 是闭单位圆盘）的任意一个子空间，使 $A$ 包含全体多项式，并且使得

(1) $$\|f\|_{\overline{U}}=\|f\|_T$$

对每个 $f\in A$ 成立．我们并不排除 $A$ 刚好由多项式组成的可能性，但 $A$ 也可以更大一些．

将 5.22 节的所得的一般结论应用于 $A$，证明对每个 $z\in U$，都对应于 $T$ 上的正 Borel 测度 $\mu_z$，使得

(2) $$f(z)=\int_T fd\mu_z \qquad (f\in A)$$

（对于 $z\in T$ 也同样成立，但这是平凡的：$\mu_z$ 简单地说就是集中于点 $z$ 的单位质量．）

现在我们固定 $z\in U$，并记 $z=re^{i\theta}$，$0\leqslant r<1$，$\theta$ 是实数．

若对 $n=0, 1, 2, \cdots$，$u_n(w)=w^n$，则 $u_n\in A$．因此(2)表明

(3) $$r^ne^{in\theta}=\int_T u_nd\mu_z \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

因为在 $T$ 上 $u_{-n}=\overline{u}_n$，(3)式导出

(4) $$\int_T u_n d\mu_z = r^{|n|}e^{in\theta} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

这就提示我们注意实函数

(5) $$P_r(\theta-t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(\theta-t)} \qquad (t\text{ 是实数})$$

因此

(6) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,e^{int}dt = r^{|n|}e^{in\theta} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

注意, 级数(5)由收敛的几何级数 $\sum r^{|n|}$ 所控制, 所以将该级数代入(6)并且逐项积分以给出(6), 这是合法的. 比较(4)和(6), 当 $f=u_n$ 时, 给出

(7) $$\int_T f d\mu_z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_r(\theta-t)dt$$

因此对每个三角多项式 $f$ 也成立. 现在定理 4.25 蕴涵着(7)式对每个 $f\in C(T)$ 成立. [这表明 $\mu_z$ 是由(2)式唯一决定的, 为什么?]

特别, 当 $f\in A$ 时(7)式成立. 因此(2)式也给出表达式

(8) $$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_r(\theta-t)dt \qquad (f\in A)$$

级数(5)明显地可以求和, 因为它是

$$1+2\sum_{1}^{\infty}(ze^{-it})^n = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{1-r^2+2ir\sin(\theta-t)}{|1-ze^{-it}|^2}$$

的实部. 这样

(9) $$P_r(\theta-t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$$

这就是所谓的"Poisson 核". 注意, 当 $0\leqslant r<1$ 时 $P_r(\theta-t)\geqslant 0$.

现在对所证明的予以总结:

**5.25 定理** 假设 $A$ 是闭单位圆盘 $\overline{U}$ 上的连续复函数的一个向量空间. 如果 $A$ 包含全体多项式, 并且对每个 $f\in A$

(1) $$\sup_{z\in U}|f(z)|=\sup_{z\in T}|f(z)|$$

(这里 $T$ 是单位圆周，即 $U$ 的边界)，则 Poisson 积分表达式

(2) $$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}f(e^{it})dt \qquad (z=re^{i\theta})$$

对每个 $f\in A$, $z\in U$ 都真确.

## 习　题

1　设 $X$ 由 $a$ 和 $b$ 两个点组成，令 $\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=\frac{1}{2}$，并设 $L^p(\mu)$ 是所得的实 $L^p$ 空间．指定 $X$ 上的每个实函数恒等于平面中的点 $(f(a), f(b))$，并对 $0<p\leq\infty$ 画出 $L^p(\mu)$ 的单位球的草图．注意，当且仅当 $1\leq p\leq\infty$ 时它们是凸的．对哪个 $p$ 其单位球是一个正方形？是一个圆形？如果 $\mu(\{a\})\neq\mu(\{b\})$，这时的情况与前者有何不同？

2　证明在每个赋范线性空间中的(开或闭)单位球都是凸的.

3　如果 $1<p<\infty$，证明 $L^p(\mu)$ 的单位球是严格凸的；这表示当

$$\|f\|_p=\|g\|_p=1,\ f\neq g,\ h=\frac{1}{2}(f+g)$$

时，$\|h\|_p<1$．(从几何角度看，这个球的表面决不包含直线.)说明这对每一个 $L^1(\mu)$, $L^\infty(\mu)$ 和 $C(X)$ 是不成立的．(除开仅由一点组成的空间之类的不足道的场合.)

4　假设 $C$ 是 $[0,1]$ 上全体连续函数的空间，赋以上确界范数．设 $M$ 由所有使

$$\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt=1$$

的 $f\in C$ 组成．证明 $M$ 是 $C$ 的一个闭凸子集．它不包含最小范数的元素.

5　设 $M$ 是所有就 Lebesgue 测度而言的，使得

$$\int_0^1 f(t)dt=1$$

的 $f\in L^1([0,1])$ 的集．证明 $M$ 是 $L^1([0,1])$ 的闭凸子集．它包含无限多个最小范数的元素．(试与习题 4 以及定理 4.10 相比较.)

6　设 $f$ 是 Hilbert 空间 $H$ 的子空间 $M$ 上的有界线性泛函．证明 $f$ 有一

个到$H$上的有界线性泛函的唯一的保范开拓，而且这个开拓在 $M^{\perp}$ 上等于零.

7 在某个$L^1(\mu)$的某个子空间上构造一个有界线性泛函，使它有两个(从而是无限多个)不同的到$L^1(\mu)$的保范线性开拓.

8 设$X$是一个赋范线性空间，如在5.21节中那样，$X^*$是它的对偶空间，具有范数

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|:\|x\|\leqslant 1\}$$

(*a*) 证明$X^*$是Banach空间.

(*b*) 证明映射$f\to f(x)$对每个$x\in X$都是$X^*$上的有界线性泛函，其范数为$\|x\|$. (这给出了一个$X$到它的"第二对偶"$X^{**}$，即$X^*$的对偶空间的一个自然的嵌入.)

(*c*) 当$\{x_n\}$是$X$中的一个序列，使对每个$f\in X^*$，$\{f(x_n)\}$都有界时，证明$\{\|x_n\|\}$也是有界的.

9 设$c_0$, $l^1$, $l^\infty$是全体复数序列$x=\{\xi_i\}$, $i=1, 2, 3, \cdots$，组成的Banach空间，定义如下：

$$x\in l^1 \text{ 当且仅当 } \|x\|_1=\Sigma|\xi_i|<\infty.$$

$$x\in l^\infty \text{ 当且仅当 } \|x\|_\infty=\sup|\xi_i|<\infty.$$

$c_0$是使$i\to\infty$时$\xi_i\to 0$的所有$x\in l^\infty$组成的$l^\infty$的子空间.

证明下列四个命题.

(*a*) 如果$y=\{\eta_i\}\in l^1$，而对每个$x\in c_0$, $\Lambda x=\Sigma\xi_i\eta_i$. 则$\Lambda$是$c_0$上的一个有界线性泛函，并且$\|\Lambda\|=\|y\|_1$. 进而言之，每个$\Lambda\in(c_0)^*$都可用此法得到. 简略地说，$(c_0)^*=l^1$.

(说得更精确些，这两个空间并不是相等的；前面的命题只是给出了它们之间的一个等距的向量空间的同构.)

(*b*) 在同一意义下，$(l^1)^*=l^\infty$.

(*c*) 每个$y\in l^1$都象(*a*)中一样引出一个$l^\infty$上的有界线性泛函. 然而这并没有给出$(l^\infty)^*$的全部. 因为$(l^\infty)^*$还包含有在整个$c_0$上为零的非平凡泛函.

(*d*) $c_0$和$l^1$是可分的，但$l^\infty$不是.

10 如果$\Sigma\alpha_i\xi_i$对每个当$i\to\infty$时$\xi_i\to 0$的序列$\{\xi_i\}$都收敛. 证明$\Sigma|\alpha_i|<\infty$.

11 对$0<\alpha\leqslant 1$，设Lip$\alpha$表示所有$[a, b]$上使

$$M_f=\sup_{s\neq t}\frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|^{\alpha}}<\infty$$

的复函数组成的空间.

证明当取$\|f\|=|f(a)|+M_f$时, Lip$\alpha$ 是一个 Banach 空间; 如果取

$$\|f\|=M_f+\sup_x|f(x)|$$

时, 结论也是一样.

(我们说 Lip$\alpha$ 的元素满足 $\alpha$ 阶 Lipschitz 条件.)

12 设$K$是平面上的一个三角形 (二维图形), $H$是由$K$的顶点组成的集. $A$是$K$上的形如

$$f(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma \quad (\alpha,\beta \text{ 和 } \gamma \text{ 是实数})$$

的全体实函数的集.

证明对于每个$(x_0,y_0)\in K$都对应$H$上的唯一一个测度$\mu$, 使

$$f(x_0,y_0)=\int_H f d\mu$$

(与 5.22节相比较.)

用正方形取代 $K$, $H$ 还表示其顶点的集. $A$仍同上假设. 证明对$K$的每个点仍然存在一个$H$上的测度, 它具有上述性质. 不过现在却失去了唯一性.

你能不能推广成为一个更广泛的定理? (考虑其它的图形, 高维空间.)

13 设$\{f_n\}$是(非空)完备度量空间$X$上的连续复函数序列, 使$f(x)=\lim f_n(x)$(作为一个复数)对每个$x\in X$都存在.

(a) 证明存在一个开集$V\neq\varnothing$ 和一个数 $M<\infty$, 对所有的$x\in V$及$n=1,2,3,\cdots$, $|f_n(x)|<M$.

(b) 若 $\varepsilon>0$, 证明存在一个开集 $V\neq\varnothing$ 和一个整数 $N$, 当 $x\in V$ 及 $n\geq N$ 时, $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

(b) 的提示: 对 $N=1,2,3,\cdots$, 令

$$A_N=\{x: |f_m(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon, \text{ 当 } m\geq N \text{ 和 } n\geq N \text{ 时}\}$$

因为 $X=\bigcup A_N$, 于是某个 $A_N$ 有非空内部.

14 设$C$是$I=[0,1]$上全体实连续函数的空间, 赋以上确界范数. 设$X_n$是由$f$组成的$C$的子集, 对这些$f$都存在一个 $t\in I$, 使对所有的 $s\in I$, $|f(s)-f(t)|\leq n|s-t|$ 成立. 固定$n$并证明$C$的每个开集都包含一个与$X_n$不相交的开集. (每个 $f\in C$ 都可以由一个斜率非常大的锯齿形函数 $g$ 一

致逼近，并且当$\|g-h\|$很小时，$h\notin X_n$.）说明这蕴涵着在$C$中存在一个完全由无处可微的函数组成的稠密的$G_\delta$集.

15　设$A=(a_{ij})$是以复数作为元素的无限矩阵，$i, j=0,1,2,\cdots$. $A$将每个序列$\{s_j\}$对应于一个序列$\{\sigma_i\}$. 它定义为

$$\sigma_i=\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}s_j \qquad (i=1,2,3,\cdots)$$

假定这些级数都是收敛的.

证明当且仅当下列条件

(a) $$\lim_{i\to\infty}a_{ij}=0 \quad \text{对每个 } j,$$

(b) $$\sup\sum_{j=0}^{\infty}|a_{ij}|<\infty$$

(c) $$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=1$$

满足时，$A$将每个收敛序列$\{s_j\}$变为收敛于同一极限的序列$\{\sigma_i\}$.

由$\{s_j\}$过渡到$\{\sigma_i\}$的过程称为求和法. 两个例子是

$$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{i+1}, & \text{当 } 0\leqslant j\leqslant i \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } i<j \text{ 时}\end{cases}$$

及
$$a_{ij}=(1-r_i)r_i^j \quad 0<r_i<1,\ \ r_i\to1$$

证明其中的每一个都能将某个发散序列（甚至某个无界序列）$\{s_j\}$ 变换成收敛序列$\{\sigma_i\}$.

16　设$X$和$Y$是Banach空间，而$\Lambda$是$X$到$Y$内的一个线性映射，具有如下性质：对$X$中的每一个序列$\{x_n\}$，当$x=\lim x_n$及 $y=\lim\Lambda x_n$存在时，$y=\Lambda x$成立. 证明$\Lambda$是连续的.

这就是所谓的"闭图象定理". 提示：设$X\oplus Y$是$x\in X$、$y\in Y$的全部有序对$(x,y)$的集. 赋以按分量进行运算而定义的加法和纯量乘法. 当$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$时，证明$X\oplus Y$是一个Banach空间. $\Lambda$的图象$G$是$X\oplus Y$中由序对$(x,\Lambda x)$ $x\in X$组成的子集. 注意，我们的假设说明$G$是闭的，因此$G$是一个Banach空间. 注意$(x,\Lambda x)\to x$是连续的，一一的，而且是线性的并将$G$映到$X$上.

可以看到存在非线性映射（例如$R^1$到$R^1$上的），其图象虽然是闭的，但它

们并不是连续的；若 $x\neq 0$, $f(x)=1/x$, $x=0$ 时, $f(0)=0$.

17 如果 $\mu$ 是一个正测度，每个 $f\in L^\infty(\mu)$ 都定义了一个 $L^2(\mu)$ 到 $L^2(\mu)$ 内的乘法算子 $M_f$，使 $M_f(g)=fg$. 证明 $\|M_f\|\leqslant\|f\|_\infty$. 哪些测度 $\mu$ 能使所有的 $f\in L^\infty(\mu)$ 都有 $\|M_f\|=\|f\|_\infty$ 呢？哪些 $f\in L^\infty(\mu)$ 能使 $M_f$ 将 $L^2(\mu)$ 映到 $L^2(\mu)$ 上？

18 设 $\{\Lambda_n\}$ 是一个赋范线性空间 $X$ 到 Banach 空间 $Y$ 的有界线性变换的序列. 对所有 $n$, $\|\Lambda_n\|\leqslant M<\infty$, 并设有一个稠密集 $E\subset X$, 对每个 $x\in E$, $\{\Lambda_n x\}$ 都收敛. 证明对每个 $x\in E$, $\{\Lambda_n x\}$ 收敛.

19 如果 $s_n$ 是函数 $f\in C(T)$ 的 Fourier 级数的前 $n$ 项部分和，证明当 $n\to\infty$ 时，对每个 $f\in C(T)$, $s_n/\log n$ 一致地趋于 0. 也就是说，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|s_n\|_\infty}{\log n}=0$$

另一方面，如果 $\lambda_n/\log n\to 0$, 证明存在一个 $f\in C(T)$, 使序列 $\{s_n(f;0)/\lambda_n\}$ 成为无界的. 提示：应用习题 18 及5.11节的推理，不过要用一个比原来采用的更好一些的 $\|D_n\|_1$ 的估值.

20 第 4.15 节的引理是否对每个 Banach 空间都真确？对每个赋范空间呢？

21 (a) 有没有 $R^1$ 上一个连续正函数 $f_n$ 的序列，使 $\{f_n(x)\}$ 当且仅当 $x$ 是有理数时是无界的？

(b) 在 (a) 中以"无理数"代替"有理数"，回答所提出的问题.

(c) 以"当 $n\to\infty$ 时 $f_n(x)\to\infty$"代替"$\{f_n(x)\}$ 无界"，回答所产生的与 (a), (b) 相类似的问题.

# 第六章 复 测 度

## 全 变 差

**6.1 引言** 设$\mathfrak{M}$是集$X$内的$\sigma$-代数. $\mathfrak{M}$的元素的可数集族$\{E_i\}$称为$E$的一个划分，若$E=\bigcup E_i$，且当$i\neq j$时，$E_i\cap E_j=\varnothing$. $\mathfrak{M}$上的复测度$\mu$是$\mathfrak{M}$上的一个复函数，使得

(1)
$$\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\qquad(E\in\mathfrak{M})$$

对$E$的每一个划分$\{E_i\}$成立.

注意，级数(1)的收敛性现在是必需条件的一部分.（不象对正测度那样，在那里级数或者收敛或者发散于$\infty$）. 因为若下标改变顺序，集$E_i$的并不变，所以级数(1)的每个重新排列也必须收敛. 因此([26]，定理3.56)级数实际上绝对收敛.

我们考虑找一个正测度$\lambda$的问题，这个$\lambda$在$|\mu(E)|<\lambda(E)$对每一个$E\in\mathfrak{M}$成立的意义下，控制$\mathfrak{M}$上给定的复测度$\mu$，并且试图使$\lambda$保持尽可能地小. 我们问题的每一个解(要是它肯定存在)，对任一个$E\in\mathfrak{M}$的每一个划分，都必须满足

(2)
$$\lambda(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(E_i)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)|$$

因此，$\lambda(E)$至少要等于(2)右边的和式对$E$所有的划分所取的上确界. 这启发我们定义$\mathfrak{M}$上的一个集函数$|\mu|$为

(3)
$$|\mu|(E)=\sup\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)|\qquad E\in\mathfrak{M}$$

这里的上确界是对$E$的所有的划分$\{E_i\}$取的．这个记号也许不是最好的，但它是习惯的用法．注意，$|\mu|(E) \geqslant |\mu(E)|$但$|\mu|(E)$一般地不等于$|\mu(E)|$．

这表明，如下面将要证明的那样，$|\mu|$确实是一个测度．这样我们的问题就有了一个解．导出(3)式所作的讨论清楚地表明，在任一其他解$\lambda$都具有性质"对所有$E \in \mathfrak{M}$，$\lambda(E) \geqslant |\mu|(E)$"这个意义下，$|\mu|$是最小的解．

集函数$|\mu|$称为$\mu$的全变差，有时为避免误解，称为全变差测度．"$\mu$的全变差"一词也经常用于表示数$|\mu|(X)$．

如果$\mu$是正测度，自然$|\mu| = \mu$．

$|\mu|$除了是一个测度之外，还有另一个意料不到的性质．$|\mu|(X) < \infty$．因为$|\mu(E)| \leqslant |\mu|(E) \leqslant |\mu|(X)$，这蕴涵了任一$\sigma$-代数上的每一个复测度是有界的：如果$\mu$的值域在复平面内，则它实际是在某一个有限半径的圆盘内．这个性质(在定理6.4证明)有时用$\mu$是有界变差的这种说法来表达．

**6.2　定理**　$\mathfrak{M}$上的复测度$\mu$的全变差$|\mu|$是$\mathfrak{M}$上的一个正测度．

**证明**　设$\{E_i\}$是$E \in \mathfrak{M}$的一个划分，$t_i$是使得$t_i < |\mu|(E_i)$的实数．则每一个$E_i$有一个划分$\{A_{ij}\}$，使得

$$(1)\qquad \sum_j |\mu(A_{ij})| > t_i \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

由$\{A_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, 3, \cdots)$是$E$的划分，得出

$$(2)\qquad \sum_i t_i \leqslant \sum_{i,j} |\mu(A_{ij})| \leqslant |\mu|(E)$$

(2)的左边对$\{t_i\}$的所有允许的选择取上确界，我们看出

$$(3)\qquad \sum_i |\mu|(E_i) \leqslant |\mu|(E)$$

为了证明相反的不等式，设$\{A_j\}$是$E$的任一划分．则对任一

固定的 $j$，$\{A_j\cap E_i\}$是 $A_j$ 的一个划分．并且对于任一固定的 $i$，$\{A_j\cap E_i\}$是 $E_i$ 的一个划分．因此

$$(4)\qquad \sum_j|\mu(A_j)|=\sum_j\left|\sum_i\mu(A_j\cap E_i)\right| \leqslant\sum_j\sum_i|\mu(A_j\cap E_i)| =\sum_i\sum_j|\mu(A_j\cap E_i)| \leqslant\sum_i|\mu|(E_i)$$

因为(4)对$E$的每一个划分$\{A_j\}$成立，故有

$$(5)\qquad |\mu|(E)\leqslant\sum_i|\mu|(E_i)$$

根据(3)和(5)，$|\mu|$是可数可加的．

注意，在(2)和(4)内用到了定理 1.27 的系．

$|\mu|$不恒等于$\infty$是定理 6.4 的平凡的推论，但因为$|\mu|(\varnothing)=0$，现在也能看出这个结论是对的．

**6.3 引理** 如果$z_1,z_2,\cdots,z_n$是复数，则存在$\{1,\cdots,n\}$的子集$S$，使得

$$(1)\qquad \left|\sum_{j\in S}z_j\right|\geqslant\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}|z_j|$$

**证明** 令 $w=|z_1|+\cdots+|z_n|$．复平面是用直线 $y=\pm x$ 所围成的四个闭象限的并，且这些象限中至少有一个$Q$(不失一般性，假定由$|y|\leqslant x$ 所确定的那个)具有性质：$z_j\in Q$ 的那些$|z_j|$的和至少是 $w/4$．对于 $z\in Q$，有

$$\mathrm{Re}\,z\geqslant|z|/\sqrt{2}$$

若$S$是所有使得 $z_j\in Q$ 的 $j$ 的集，便有

$$\left|\sum_{j\in S} z_j\right| \geqslant \sum_{j\in S} \operatorname{Re} z_j \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j\in S} |z_j| \geqslant \frac{w}{4\sqrt{2}} > \frac{w}{6}$$

**6.4 定理** 如果 $\mu$ 是 $X$ 上的复测度，则

(1)
$$|\mu|(X) < \infty$$

**证明** 首先指出：如果 $E\in\mathfrak{M}$，$|\mu|(E)=\infty$，则 $E=A\cup B$，这里 $A$ 和 $B\in\mathfrak{M}$，$A\cap B=\varnothing$，且

(2)
$$|\mu(A)|>1,\ |\mu|(B)=\infty$$

事实上，$|\mu|$ 的定义表明，对每一个 $t<\infty$，对应有一个 $E$ 的划分 $\{E_j\}$，使得 $\Sigma|\mu(E_j)|>t$。我们取 $t=6(1+|\mu(E)|)$，则

(3)
$$\sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)| > t$$

对某一个 $n$ 成立；对于 $z_j=\mu(E_j)$，应用引理 6.3，且令

(4)
$$A=\bigcup_{j\in S} E_j$$

得出，$A\subset E$，且 $|\mu(A)|>\frac{t}{6}\geqslant 1$。如果 $B=E-A$，则

(5)
$$|\mu(B)|=|\mu(E)-\mu(A)|\geqslant|\mu(A)|-|\mu(E)|$$
$$>\frac{t}{6}-|\mu(E)|=1$$

因为根据定理 6.2，$|\mu|(E)=|\mu|(A)+|\mu|(B)$，我们有 $|\mu|(A)=\infty$ 或 $|\mu|(B)=\infty$（或两个同时成立）。如有必要的话，通过交换 $A$ 和 $B$，我们就得出(2)。

现在假定 $|\mu|(X)=\infty$。令 $B_0=X$。假定 $n\geqslant 0$。选择 $B_n$，使得 $|\mu|(B_n)=\infty$。则用 $B_n$ 代替 $E$ 而应用(2)，看出 $B_n$ 是两个不相交的集 $A_{n+1}$ 和 $B_{n+1}$ 的并，使得 $|\mu(A_{n+1})|>1$，$|\mu|(B_{n+1})=\infty$。于是归纳地得出，不相交集 $A_1, A_2, A_3, \cdots$，具有 $|\mu(A_n)|>1$。若 $C=\bigcup A_n$，$\mu$ 的可数可加性指出，

$$\mu(C)=\sum_{1}^{\infty}\mu(A_n) \tag{6}$$

但是这个级数不能收敛，因为当$n\to\infty$时，$\mu(A_n)$不趋于0．这个矛盾证明了(1)必须成立．

**6.5** 如果$\mu$和$\lambda$是同一个$\sigma$-代数$\mathfrak{M}$上的复测度．依通常的方式用

$$(1)\qquad \begin{aligned}(\mu+\lambda)E&=\mu(E)+\lambda(E)\\(c\mu)E&=c\mu(E)\end{aligned}\qquad (E\in\mathfrak{M})$$

定义$\mu+\lambda$和对任一纯量$c$定义$c\mu$．容易验证$\mu+\lambda$和$c\mu$均是复测度，于是所有$\mathfrak{M}$上的复测度的集族是一个向量空间．若令

$$\|\mu\|=|\mu|(X) \tag{2}$$

容易验证赋范线性空间的全部公理均满足．

**6.6** **正变差和负变差** 现在我们特地考虑一个$\sigma$-代数$\mathfrak{M}$上的实测度(这样的测度经常被称为广义测度)．象前面一样定义$|\mu|$．并定义

$$\mu^+=\frac{1}{2}(|\mu|+\mu),\quad \mu^-=\frac{1}{2}(|\mu|-\mu) \tag{1}$$

则$\mu^+$和$\mu^-$均是$\mathfrak{M}$上的正测度．根据定理6.4，它们是有界的，同时

$$\mu=\mu^+-\mu^-,\quad |\mu|=\mu^++\mu^- \tag{2}$$

测度$\mu^+$和$\mu^-$分别称为$\mu$的正变差和负变差．$\mu$表示为正测度$\mu^+$和$\mu^-$的差是著名的$\mu$的Jordan分解．在所有将$\mu$分为两个正测度之差的表示中，Jordan分解有一种最小性质，它将作为定理6.14的系而确定下来．

## 绝对连续性

**6.7** **定义** 设$\mu$是$\sigma$-代数$\mathfrak{M}$上的正测度，$\lambda$是$\mathfrak{M}$上的一个

任意测度，$\lambda$ 可以是正测度或复测度(记住复测度以复平面为其值域，但"正测度"一词在我们的用法中包含了$\infty$作为其允许值. 这样正测度并不能构成复测度的子类).

如果 $\lambda(E)=0$ 对每一个 $\mu(E)=0$ 的 $E\in\mathfrak{M}$ 成立，我们就说 $\lambda$ 关于$\mu$ 绝对连续，记作

(1) $$\lambda\ll\mu$$

如果存在一个集 $A\in\mathfrak{M}$，使得 $\lambda(E)=\lambda(A\cap E)$ 对每一个 $E\in\mathfrak{M}$ 成立. 我们就说 $\lambda$ 集中于 $A$ 上. 这等价于假定当 $E\cap A=\varnothing$ 时 $\lambda(E)=0$.

假定 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 都是 $\mathfrak{M}$ 上的测度，且假定存在一对不相交的集 $A$ 和 $B$，使得 $\lambda_1$ 集中于 $A$ 上而 $\lambda_2$ 集中于 $B$ 上，则我们说 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是互相奇异的. 记为

(2) $$\lambda_1\perp\lambda_2$$

这些概念的一些初等性质列述如下:

**6.8 命题** 假定 $\mu,\lambda,\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 都是 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 上的测度，且 $\mu$ 是正测度.

(*a*) 若 $\lambda$ 集中于 $A$ 上，则 $|\lambda|$ 也是如此.

(*b*) 若 $\lambda_1\perp\lambda_2$，则 $|\lambda_1|\perp|\lambda_2|$.

(*c*) 若 $\lambda_1\perp\mu,\lambda_2\perp\mu$，则 $\lambda_1+\lambda_2\perp\mu$.

(*d*) 若 $\lambda_1\ll\mu,\lambda_2\ll\mu$，则 $\lambda_1+\lambda_2\ll\mu$.

(*e*) 若 $\lambda\ll\mu$，则 $|\lambda|\ll\mu$.

(*f*) 若 $\lambda_1\ll\mu,\lambda_2\perp\mu$，则 $\lambda_1\perp\lambda_2$.

(*g*) 若 $\lambda\ll\mu,\lambda\perp\mu$，则 $\lambda=0$.

**证明**

(*a*) 若 $E\cap A=\varnothing$，且 $\{E_j\}$ 是 $E$ 的任一划分，则对所有的 $j$，$\lambda(E_j)=0$. 因此，$|\lambda|(E)=0$.

(*b*) 从(*a*)直接得出.

(c) 存在不相交的集 $A_1$ 和 $B_1$，使得 $\lambda_1$ 集中于 $A_1$ 上，$\mu$ 集中于 $B_1$ 上，并存在不相交集 $A_2$ 和 $B_2$，使得 $\lambda_2$ 集中于 $A_2$ 上，$\mu$ 集中于 $B_2$ 上. 因此 $\lambda_1+\lambda_2$ 集中于 $A=A_1\cup A_2$ 上，$\mu$ 集中于 $B=B_1\cap B_2$ 上，且 $A\cap B=\varnothing$.

(d) 这是显然的.

(e) 假定 $\mu(E)=0$，$\{E_j\}$是$E$的一个划分. 则 $\mu(E_j)=0$；因为 $\lambda\ll\mu$，$\lambda(E_j)=0$对所有的 $j$ 成立，因此，$\Sigma|\lambda(E_j)|=0$. 这蕴涵着$|\lambda|(E)=0$.

(f) 因为 $\lambda_2\perp\mu$，存在一个具有 $\mu(A)=0$的集 $A$，$\lambda_2$ 集中于 $A$ 上. 因为 $\lambda_1\ll\mu$，故 $\lambda_1(E)=0$ 对每一个 $E\subset A$ 成立. 所以 $\lambda_1$ 集中在 $A$ 的补集上.

(g) 根据(f)，(g)的假定蕴涵着 $\lambda\perp\lambda$，这显然迫使 $\lambda=0$.

现在转到与绝对连续有关的主要定理. 事实上，它可能是测度论中最主要的定理. 我们首先对正的有限测度来叙述它.

**6.9 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理** 设 $\mu$，$\lambda$ 是集$X$的 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 上的正有界测度.

(a) 在 $\mathfrak{M}$ 上存在唯一的一对测度 $\lambda_a$ 和 $\lambda_s$，使得

(1)
$$\lambda=\lambda_a+\lambda_s,\quad \lambda_a\ll\mu,\quad \lambda_s\perp\mu$$

这些测度都是正的，且 $\lambda_a\perp\lambda_s$.

(b) 存在唯一的一个 $h\in L^1(\mu)$，使得

(2)
$$\lambda_a(E)=\int_E h\,d\mu \qquad (E\in\mathfrak{M})$$

这对$(\lambda_a,\lambda_s)$ 称为 $\lambda$ 关于 $\mu$ 的 Lebesgue 分解. 这个分解的唯一性是容易看出的. 因为若$(\lambda'_a,\lambda'_s)$是满足(1)的另一对，则

(3)
$$\lambda'_a-\lambda_a=\lambda_s-\lambda'_s$$

$\lambda'_a-\lambda_a\ll\mu$，且 $\lambda_s-\lambda'_s\perp\mu$，因此(3)的两边均是 0；在这里我们已经用到了 6.8(c)，6.8(d)，和 6.8(g).

这个分解的存在性是(a)的重要的部分.

断言(b)是著名的 Radon-Nikodym 定理. 再者, $h$ 的唯一性从定理 1.39(b)立即得出. 同时,若 $h$ 是 $L^1(\mu)$的任一元素,(2)的积分定义 $\mathfrak{M}$ 上的一个测度(定理 1.29), 显然它关于 $\mu$ 绝对连续. Radon-Nikodym 定理的重点是逆命题: 每一个 $\lambda \ll \mu$(在这种情况下, $\lambda_a=\lambda$)都能用这种方式得到.

(2)中出现的函数 $h$ 被称为 $\lambda_a$ 关于 $\mu$ 的 Radon-Nikodym 导数. 象定理 1.29 后面的注一样, 我们可以用 $d\lambda_a=hd\mu$ 的形式表示(2), 或甚至用 $h=d\lambda_a/d\mu$ 的形式表示(2).

下面的一举同时产生出(a)和(b)的证明方法, 其思想是 Von Neumann 提出的.

**证明** 令 $\phi=\lambda+\mu$, 则 $\phi$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的正有界测度. 两个测度和的定义指出, 对 $f=\chi_E$,

(4) $$\int_X f d\phi=\int_X f d\lambda+\int_X f d\mu$$

因此对简单函数 $f$, 进而对非负的可测函数 $f$ 也成立. 如果 $f\in L^2(\phi)$, Schwarz 不等式给出

$$\left|\int_X f d\lambda\right|\leqslant\int_X |f| d\lambda\leqslant\int_X |f| d\phi\leqslant\left\{\int_X |f|^2 d\phi\right\}^{1/2}\left\{\phi(X)\right\}^{1/2}$$

因为 $\phi(X)<\infty$, 映射

(5) $$f\to\int_X f d\lambda$$

可看成是 $L^2(\phi)$上的一个有界线性泛函.

我们知道在 Hilbert 空间 $H$ 上的每一个有界线性泛函可以用与 $H$ 的某个元素的内积给出来. 因此存在一个 $g\in L^2(\phi)$, 使得

(6) $$\int_X f d\lambda=\int_X fg d\phi \qquad (f\in L^2(\phi))$$

要注意, $L^2(\phi)$的完备性怎样用来保证函数 $g$ 的存在性. 同时

要注意，虽然 $g$ 作为 $L^2(\phi)$ 的元素唯一地确定，但作为 $X$ 的点函数只是 a. e. $[\phi]$ 确定的.

在(6)中对任一具有 $\phi(E)>0$ 的 $E\in\mathfrak{M}$，令 $f=\chi_E$. 那末(6)的左边就是 $\lambda(E)$；因为 $0\leqslant\lambda\leqslant\phi$，我们有

(7) $$0\leqslant\frac{1}{\phi(E)}\int_E g\,d\phi\leqslant 1$$

所以根据定理 1.40，$g(x)\in[0,1]$（关于 $\phi$）对几乎所有的 $x$ 成立. 因此可以假定对每一个 $x\in X$，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$ 而不致影响(6). 把(6)重新写成

(8) $$\int_X (1-g)f\,d\lambda=\int_X fg\,d\mu \qquad (f\in L^2(\phi))$$

的形式. 令

(9) $$A=\{x: 0\leqslant g(x)<1\},\quad B=\{x: g(x)=1\}$$

并且定义

(10) $$\lambda_a(E)=\lambda(A\cap E),\ \lambda_s(E)=\lambda(B\cap E) \qquad (E\in\mathfrak{M})$$

如果在(8)中取 $f=\chi_B$，可看出 $\mu(B)=0$. 于是 $\lambda_s\perp\mu$. 因为 $g$ 是有界的，若对 $n=1,2,3,\cdots$，$E\in\mathfrak{M}$ 用

$$(1+g+\cdots+g^n)\chi_E$$

代替 $f$，(8)式也成立. 因此有

(11) $$\int_E (1-g^{n+1})\,d\lambda=\int_E g(1+g+\cdots+g^n)\,d\mu$$

在 $B$ 的每一点，$g(x)=1$，因此 $1-g^{n+1}(x)=0$. 在 $A$ 的每一点上，$g^{n+1}(x)$ 单调地趋于 0，所以(11)的左边当 $n\to\infty$ 时，收敛于 $\lambda(A\cap E)=\lambda_a(E)$.

(11)式右边的被积函数单调增加趋于一个非负的可测的极限函数 $h$. 单调收敛定理指出，当 $n\to\infty$ 时，(11)的右边趋于 $\int_E h\,d\mu$.

于是我们证明了(2)对每一个$E\in\mathfrak{M}$成立. 取 $E=X$, 由 $\lambda_a(X)<\infty$, 看出$h\in L^1(\mu)$.

最后,(2)表明 $\lambda_a\ll\mu$. 证明完毕.

**6.10 定理6.9的推广** 定理6.9的证明强烈地依赖于$\phi(X)<\infty$的假定,即$\mu$和$\lambda$同时是有界测度.

如果$\mu$是$\sigma$-有限的,则(根据定义)$X$是使得$\mu(X_n)<\infty$的可数多个$X_n$的并. 我们可以假定$X_n$是不相交的; 倘若不然, 我们就用$\{Y_n\}$代替$\{X_n\}$, 这里$Y_1=X_1$,并且对$n\geq 2$,

$$Y_n=X_n-(Y_1\cup\cdots\cup Y_{n-1})$$

现在若$\lambda(X)<\infty$,对每一个$X_n$就能应用定理6.9. 测度$\lambda(E\cap X_n)$的 Lebesgue 分解的总和是$\lambda$的 Lebesgue 分解. 在$X_n$上得出$h_n$,当$x\in X_n$时,令$h(x)=h_n(x)$,通过它们定义出一个$X$上的函数$h$;因为$\lambda(X)<\infty$, 容易得出$h\in L^1(\mu)$.

其次, 如果保持$\mu$为$\sigma$-有限的假定而设$\lambda$是$\mathfrak{M}$上的复测度,则$\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$, $\lambda_1$, $\lambda_2$是实的,并且能够应用上面的结果于$\lambda_1$和$\lambda_2$的正变差和负变差(见6.6节).

我们可以总结如下:

如果$\mu$是$\mathfrak{M}$上的正的$\sigma$-有限测度, $\lambda$是$\mathfrak{M}$上的复测度, 则 Lebesgue 分解定理和 Radom-Nikodym 定理也都是正确的.

如果$\mu$和$\lambda$都是正的和$\sigma$-有限的,定理6.9的大部分依然正确. 现在我们可以记$X=\bigcup X_n$. 这里对$n=1,2,3,\cdots\mu(X_n)<\infty$. 并且$\lambda(X_n)<\infty$. 测度$\lambda(E\cap X_n)$的 Lebesgue 分解继续给出一个$\lambda$的 Lebesgue 分解, 并继续得出满足方程6.9(2)的函数$h$. 尽管$h$是"局部地在$L^1$内"即$\int_{X_n}h\,d\mu<\infty$对每一个$n$成立, 然而$h\in L^1(\mu)$不再正确了.

最后,如果超出$\sigma$-有限性的范围, 我们就会遇到所考虑的两

个定理确实不成立的情况。例如，设$\mu$是$(0,1)$上的 Lebesgue 测度，并设$\lambda$是$(0,1)$内所有 Lebesgue 可测集的$\sigma$-代数上的计数测度. 则$\lambda$没有关于$\mu$的 Lebesgue 分解，并且尽管$\mu \ll \lambda$和$\mu$是有界的，也不存在$h \in L^1(\lambda)$，使得$d\mu = h d\lambda$. 我们省略这个容易的证明.

下面的定理可以说明，在论及$\lambda \ll \mu$这个关系时，为什么采用“连续”这个词[也可见习题 9($b$)].

**6.11 定理** 假定$\mu$和$\lambda$是$\sigma$-代数$\mathfrak{M}$上的测度，$\mu$是正的，且$\lambda$是复的，则下面两个条件是等价的:

($a$) $\lambda \ll \mu$.

($b$) 对每一个$\varepsilon > 0$，对应有一个$\delta > 0$，对于所有的$E \in \mathfrak{M}$，$\mu(E) < \delta$时，有$|\lambda(E)| < \varepsilon$.

性质($b$)有时用作绝对连续的定义. 然而当$\lambda$是一个正的无界测度时，($a$)并不蕴涵($b$). 例如：设$\mu$是$(0,1)$上的 Lebesgue 测度，且对于每一个 Lebesgue 可测集$E \subset (0,1)$，令

$$\lambda(E) = \int_E t^{-1} dt$$

**证明** 假定($b$)成立. 若$\mu(E) = 0$，则对每一个$\delta > 0$，$\mu(E) < \delta$，因此对每一个$\varepsilon > 0$，$|\lambda(E)| < \varepsilon$. 所以$\lambda(E) = 0$. 于是($b$)蕴涵着($a$).

假定($b$)不成立. 则存在一个$\varepsilon > 0$，并且存在集$E_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$，使得$\mu(E_n) < 2^{-n}$但$|\lambda(E_n)| \geq \varepsilon$. 因此$|\lambda|(E_n) \geq \varepsilon$，令

$$(1) \qquad A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i, \qquad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

则$\mu(A_n) < 2^{-n+1}$，$A_n \supset A_{n+1}$，所以定理 1.19($e$)指出$\mu(A) = 0$，并且由$|\lambda|(A_n) \geq |\lambda|(E_n)$，得

$$|\lambda|(A) = \lim_{n \to \infty} |\lambda|(A_n) \geq \varepsilon > 0$$

于是得出$|\lambda|\ll\mu$不成立. 因此根据命题6.8(e), (a)不成立.

## Radon-Nikodym 定理的推论

**6.12 定理** 设$\mu$是$X$的$\sigma$-代数$\mathfrak{M}$上的复测度, 则存在一个可测函数$h$, 使得$|h(x)|=1$对所有的$x\in X$成立, 并且使得

(1) $$d\mu=hd|\mu|$$

与表示一个复数为它的绝对值和一个绝对值为1的乘积类比, 方程(1)有时叫做$\mu$的极表示(或极分解).

**证明** $\mu\ll|\mu|$是明显的, 所以Radon-Nikodym定理保证了满足(1)的某个$h\in L^1(|\mu|)$的存在性.

设$A_r=\{x: |h(x)|<r\}$, 这里$r$是某个正数. 设$\{E_j\}$是$A_r$的一个划分, 则

$$\sum_j|\mu(E_j)|=\sum_j\left|\int_{E_j}hd|\mu|\right|\leqslant\sum_j r|\mu|(E_j)=r|\mu|(A_r)$$

所以$|\mu|(A_r)\leqslant r|\mu|(A_r)$. 若$r<1$, 这迫使$|\mu|(A_r)=0$, 于是$|h|\geqslant1$a. e.

另一方面, 若$|\mu|(E)>0$, (1)指出

$$\left|\frac{1}{|\mu|(E)}\int_E hd|\mu|\right|=\frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)}\leqslant1$$

现在应用定理1.40(用闭单位圆盘代替$S$), 便得出$|h|\leqslant1$a. e. 成立.

设$B=\{x\in X: |h(x)|\neq1\}$, 我们已经证明$|\mu|(B)=0$. 若在$B$上重新定义$h$, 使$h(x)=1$在$B$上成立. 我们就获得一个具有所要求的性质的函数.

**6.13 定理** 假定$\mu$是$\mathfrak{M}$上的正测度, $g\in L^1(\mu)$, 且

(1) $$\lambda(E)=\int_E gd\mu\qquad(E\in\mathfrak{M})$$

则

(2) $$|\lambda|(E)=\int_E |g|d\mu \qquad (E\in\mathfrak{M})$$

**证明** 根据定理 6.12, 存在一个绝对值为 1 的函数 $h$, 使得 $d\lambda=hd|\lambda|$. 根据假定, $d\lambda=gd\mu$. 因此

$$hd|\lambda|=gd\mu$$

这给出 $d|\lambda|=\bar{h}gd\mu$ (与定理 1.29 比较).

因为 $|\lambda|\geqslant 0$, 且 $\mu\geqslant 0$, 所以 $\bar{h}g\geqslant 0$, a. e. $[\mu]$. 于是 $\bar{h}g=|g|$, a. e. $[\mu]$.

**6.14 Hahn 分解定理** 设 $\mu$ 是集 $X$ 的 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 上的实测度, 则存在集 $A$ 和 $B\in\mathfrak{M}$, 使得 $A\cup B=X$, $A\cap B=\varnothing$, 并且使 $\mu$ 的正变差 $\mu^+$ 和负变差 $\mu^-$ 满足

(1) $$\mu^+(E)=\mu(A\cap E), \quad \mu^-(E)=-\mu(B\cap E) \qquad (E\in\mathfrak{M})$$

换句话说, $X$ 是两个不相交的可测集 $A$ 和 $B$ 的并, 使得"$A$ 携带 $\mu$ 的全部正质量."[因为若 $E\subset A$, (1)蕴涵了 $\mu(E)\geqslant 0$]. 并且"$B$ 携带 $\mu$ 的全部负质量."[因为当 $E\subset B$ 时, $\mu(E)\leqslant 0$]. 这对 $(A, B)$ 称为由 $\mu$ 所诱导的 $X$ 的 Hahn 分解.

**证明** 根据定理 6.12, $d\mu=hd|\mu|$, 这里 $|h|=1$. 因为 $\mu$ 是实的, 得出 $h$ 是实的(a. e., 并且通过在零测集上重新予以定义, 所以是处处). 因此, $h=\pm 1$. 令

(2) $$A=\{x: h(x)=1\}, \qquad B=\{x: h=-1\}$$

因为 $\mu^+=\frac{1}{2}(|\mu|+\mu)$, 并且因为

(3) $$\frac{1}{2}(1+h)=\begin{cases} h & 在 A 上, \\ 0 & 在 B 上, \end{cases}$$

所以对任何 $E\in\mathfrak{M}$, 有

(4) $$\mu^+(E)=\frac{1}{2}\int_E (1+h)d|\mu|=\int_{E\cap A} hd|\mu|=\mu(E\cap A)$$

因为 $\mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap B)$ 和 $\mu=\mu^+-\mu^-$，(1)的后一半从前一半得出.

**系** 如果 $\mu=\lambda_1-\lambda_2$，这里 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是正测度. 则 $\lambda_1\geqslant\mu^+$ 和 $\lambda_2\geqslant\mu^-$.

这就是在 6.6 节所提及的 Jordan 分解的最小性质.

**证明** 因为 $\mu\leqslant\lambda_1$，故有

$$\mu^+(E)=\mu(E\cap A)\leqslant\lambda_1(E\cap A)\leqslant\lambda_1(E)$$

## $L^p$ 上的有界线性泛函

**6.15** 设 $\mu$ 是一个正测度，假定 $1\leqslant p\leqslant\infty$. 并设 $q$ 是共轭于 $p$ 的指数. Hölder 不等式(定理 3.8)指出，若 $g\in L^q(\mu)$，$\Phi_g$ 由

$$\Phi_g(f)=\int_X fg\,d\mu \tag{1}$$

定义，则 $\Phi_g$ 是 $L^p(\mu)$ 上范数不超过 $\|g\|_q$ 的有界线性泛函. 自然会提出这样的问题：所有的 $L^p(\mu)$ 上的有界线性泛函是否都具有这种形式，并且这样的表示是否唯一?

对于 $p=\infty$，回答是否定的. $L^1(\mu)$ 不能提供所有的 $L^\infty(\mu)$ 上有界线性泛函. 对于 $1<p<\infty$，回答则是肯定的. 假定测度论某些病态被排除的话，对 $p=1$ 的回答也是肯定的. 对于 $\sigma$-有限的测度空间，不会出现麻烦. 我们将只限于讨论这种情况.

**6.16 定理** 假定 $1\leqslant p<\infty$，$\mu$ 是 $X$ 上 $\sigma$-有限的正测度，并且 $\Phi$ 是 $L^p(\mu)$ 上的有界线性泛函. 则存在一个唯一的 $g\in L^q(\mu)$，使得

$$\Phi(f)=\int_X fg\,d\mu \qquad (f\in L^p(\mu)) \tag{1}$$

这里 $q$ 是共轭于 $p$ 的指数. 而且，如果 $\Phi$ 和 $g$ 是(1)内所述及的函数，则有

(2) $$\|\Phi\| = \|g\|_q$$

换句话说，在所述条件下，$L^q(\mu)$是等距地同构于$L^p(\mu)$的对偶空间.

**证明** $g$的唯一性是显然的. 因为若$g$和$g'$满足(1)，则$g-g'$在任何有限测度的可测集$E$上的积分是0(如把$f$取作$\chi_E$时所看出的结果一样). 因此$\mu$的$\sigma$-有限性蕴涵着$g-g'=0$ a.e. 成立.

其次，若(1)成立，Hölder 不等式蕴涵着

(3) $$\|\Phi\| \leqslant \|g\|_q$$

所以，只剩下证明$g$存在和在(3)内等号成立. 若$\|\Phi\|=0$，则取$g=0$时，(1)和(2)成立. 所以假定$\|\Phi\|>0$.

首先考虑$\mu(X)<\infty$的情况.

对于任一可测集$E\subset X$，定义

$$\lambda(E)=\Phi(\chi_E)$$

因为$\Phi$是线性的，当$A$和$B$不相交时$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$，所以$\lambda$是可加的. 为证明可数可加性，假定$E$是可数个不相交的可测集$E_i$的并，令$A_k=E_1\cup\cdots\cup E_k$，并且注意到

(4) $$\|\chi_E-\chi_{A_k}\|_p=[\mu(E-A_k)]^{1/p}\to 0 \quad (k\to\infty)$$

$\Phi$的连续性指出$\lambda(A_k)\to\lambda(E)$. 所以$\lambda$是复测度. [在(4)中，用到$p<\infty$的假定.] 当$\mu(E)=0$时，因为$\|\chi_E\|_p=0$，显然$\lambda(E)=0$，于是$\lambda\ll\mu$，并且 Radon-Nikodym 定理保证，存在一个函数$g\in L^1(\mu)$，使得对每一个可测集$E\subset X$，有

(5) $$\Phi(\chi_E)=\int_E g\,d\mu=\int_X \chi_E g\,d\mu$$

根据线性，得出

(6) $$\Phi(f)=\int_X fg\,d\mu$$

对每一个简单函数$f$成立. 因为每一个$f\in L^\infty(\mu)$是简单函数$f_i$的一致极限，所以对每一个$f\in L^\infty(\mu)$成立. 注意到$f_i$一致收敛

于 $f$ 蕴涵着 $\|f_i-f\|_p\to 0$. 因此当 $i\to\infty$ 时, $\Phi(f_i)\to\Phi(f)$.

要得出 $g\in L^q(\mu)$ 和(2)成立, 最好分成两种情况讨论.

情况 1 $p=1$. 此时(5)指出

$$\left|\int_E g d\mu\right|\leqslant\|\Phi\|\cdot\|\chi_E\|_1=\|\Phi\|\cdot\mu(E)$$

对每一个 $E\in\mathfrak{M}$ 成立. 根据定理 1.40, $|g(x)|\leqslant\|\Phi\|$ a.e. 所以 $\|g\|_\infty\leqslant\|\Phi\|$.

情况 2 $1<p<\infty$. 存在一个可测函数 $\alpha$, $|\alpha|=1$, 使得 $\alpha g=|g|$[命题 1.9(e)]. 设 $E_n=\{x: |g(x)|\leqslant n\}$, 定义 $f=\chi_{E_n}|g|^{q-1}\alpha$. 则在 $E_n$ 上 $|f|^p=|g|^q$, $f\in L^\infty(\mu)$, 并且(6)给出

$$\int_E|g|^q d\mu=\int_X fg d\mu=\Phi(f)\leqslant\|\Phi\|\cdot\left\{\int_{E_n}|g|^q\right\}^{1/p}$$

所以

$$\int_X\chi_{E_n}|g|^q d\mu\leqslant\|\Phi\|^q\qquad(n=1,2,3,\cdots)\tag{7}$$

若应用单调收敛定理于(7), 便得 $\|g\|_q\leqslant\|\Phi\|$.

于是(2)成立且 $g\in L^q(\mu)$. 由此得出(6)式两边都是 $L^p(\mu)$ 上的连续函数. 它们在 $L^p(\mu)$ 的稠密子集 $L^\infty(\mu)$ 上是一致的; 因此在 $L^p(\mu)$ 的全体上一致. 这就完成了 $\mu(X)<\infty$ 时的证明.

若 $\mu(X)=\infty$, 但 $\mu$ 是 $\sigma$-有限的. 这时 $X$ 是可数个不相交集 $X_n$ 的并, 其中 $0<\mu(X_n)<\infty$. 当 $x\in X_n$ 时, 用

$$h(x)=\frac{1}{n^2}\mu(X_n)\tag{8}$$

定义 $h: X\to(0,\infty)$. 则 $h\in L^1(\mu)$; 并且

$$\tilde{\mu}(E)=\int_E h d\mu\qquad(E\in\mathfrak{M})\tag{9}$$

定义了一个有限测度 $\tilde{\mu}$. 注意到 $F\to h^{1/p}F$ 是一个 $L^p(\tilde{\mu})$ 到 $L^p(\mu)$ 上的线性等距映射, 因此

$$\Psi(F)=\Phi(h^{1/p}F)\tag{10}$$

定义了 $L^p(\tilde{\mu})$ 上的一个有界线性泛函 $\Psi$，具有 $\|\Psi\|=\|\Phi\|$.

证明的第一部分指出，存在 $G\in L^q(\tilde{\mu})$，使得

$$(11)\qquad \Psi(F)=\int_X FGd\tilde{\mu}\qquad (F\in L^p(\tilde{\mu}))$$

令 $g=h^{1/q}G$，(若 $p=1$，$g=G$)，则 $p>1$ 时，

$$(12)\qquad \int_X |g|^q d\tilde{\mu}=\int_X |G|^q d\tilde{\mu}=\|\Psi\|^q=\|\Phi\|^q$$

而 $p=1$ 时，$\|g\|_\infty=\|G\|_\infty=\|\Psi\|=\|\Phi\|$. 于是(2)成立，并且因为 $Gd\tilde{\mu}=h^{1/p}gd\mu$，最后得出

$$(13)\qquad \Phi(f)=\Psi(h^{-\frac{1}{p}}f)=\int_X h^{-\frac{1}{p}}fGd\tilde{\mu}=\int_X fgd\mu$$

对每一个 $f\in L^p(\mu)$ 成立.

**6.17 评注** 我们已经碰到过定理 6.16 当 $p=q=2$ 时的特殊情况. 事实上，一般情况的证明，是以这个特殊情况为基础的，因为在 Radon-Nikodym 定理的证明中，用到了 $L^2(\mu)$ 上的有界线性泛函的知识，而后者是定理 6.16 的证明的关键. $p=2$ 的特殊情况本身又依赖于 $L^2(\mu)$ 的完备性，依赖于 $L^2(\mu)$ 因此是一个 Hilbert 空间的事实，并且依赖于 Hilbert 空间上的有界线性泛函由内积给定的事实.

我们现在转向定理 2.14 的复形式.

## Riesz 表示定理

**6.18** 设 $X$ 是一个局部紧的 Hausdorff 空间. 定理 2.14 刻画了 $C_c(X)$ 上正的线性泛函. 现在我们有可能来刻画 $C_c(X)$ 上的有界线性泛函 $\Phi$ 了. 因为 $C_c(X)$ 是 $C_0(X)$ 关于上确界范数的稠密子空间，每一个这样的 $\Phi$ 有唯一一个到 $C_0(X)$ 上的有界线性泛函的开拓. 因此，同样可以假定从处理 Banach 空间 $C_0(X)$ 开始.

如果 $\mu$ 是复 Borel 测度，定理 6.12 断定存在一个具有 $|h|=1$

的复 Borel 函数 $h$，使得 $d\mu = hd|\mu|$. 因此用公式

(1) $$\int f d\mu = \int fhd|\mu|$$

来定义关于复测度 $\mu$ 的积分是合理的.

关系式 $\int \chi_E d\mu = \mu(E)$ 是(1)的特殊情况. 于是当 $\mu$ 和 $\lambda$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的复测度和 $E \in \mathfrak{M}$ 时,

(2) $$\int_X \chi_E d(\mu+\lambda) = (\mu+\lambda)(E) = \mu(E) + \lambda(E)$$

$$= \int_X \chi_E d\mu + \int_X \chi_E d\lambda$$

这导出加法公式

(3) $$\int_X f d(\lambda+\mu) = \int_X f d\mu + \int_X f d\lambda$$

(比如说)对每一个有界可测函数 $f$ 成立.

如果 $|\mu|$ 是在定义 2.15 的意义下是正则的, 就称 $X$ 上的复的 Borel 测度 $\mu$ 是正则的. 如果 $\mu$ 是 $X$ 上的复的 Borel 测度, 显然映射

(4) $$f \to \int_X f d\mu$$

是 $C_0(X)$ 上的有界线性泛函, 它的范数不大于 $|\mu|(X)$. 用这种方法得出 $C_0(X)$ 上全体有界线性泛函就是 Riesz 定理的内容.

**6.19 定理** 当 $X$ 是局部紧的 Hausdroff 空间时, 对 $C_0(X)$ 上每一个有界线性泛函 $\Phi$, 都存在唯一一个复的正则 Borel 测度 $\mu$, 使得

(1) $$\Phi(f) = \int_X f d\mu \qquad (f \in C_0(X))$$

而且若 $\Phi$ 和 $\mu$ 如(1)所述, 则

(2) $$\|\Phi\| = |\mu|(X)$$

**证明** 首先解决唯一性问题. 假定$\mu$是$X$上的一个正则复Borel测度, 并且对所有的$f\in C_0(X)$, $\int f d\mu=0$. 根据定理6.12, 存在一个Borel函数$h$, 具有$|h|=1$, 使得$d\mu=hd|\mu|$. 对$C_0(X)$内任一序列$\{f_n\}$, 因此有

$$(3)\qquad |\mu|(X)=\int_X(\bar{h}-f_n)hd|\mu|\leqslant\int_X|\bar{h}-f_n|d|\mu|$$

因为$C_0(X)$在$L^1(|\mu|)$内稠密(定理3.14), $\{f_n\}$能如此选择, 使当$n\to\infty$时, (3)的最后一个表达式趋于0. 于是$|\mu|(X)=0$, 且$\mu=0$. 容易看出$X$上的两个正则复Borel测度之差是正则的. 这就证明了每一个$\Phi$, 至多有一个$\mu$与之对应.

现在考虑在$C_0(X)$上给定的一个有界线性泛函$\Phi$. 不失一般性, 假定$\|\Phi\|=1$. 我们将构造一个$C_c(X)$上的正的线性泛函$\Lambda$, 使得

$$(4)\qquad |\Phi(f)|\leqslant\Lambda(|f|)\leqslant\|f\|\qquad (f\in C_c(X))$$

这里$\|f\|$表示上确界范数.

一旦有了这个$\Lambda$, 象定理2.14一样, 我们把它和一个正的Borel测度$\lambda$联系起来. 定理2.14的结论指出: 当$\lambda(X)<\infty$时, $\lambda$是正则的. 因为

$$\lambda(X)=\sup\{\Lambda f:\ 0\leqslant f\leqslant 1,\ f\in C_c(X)\}$$

并且当$\|f\|\leqslant 1$时, $|\Lambda f|\leqslant 1$, 我们看出确实有$\lambda(X)\leqslant 1$.

从(4)同时导出

$$(5)\qquad |\Phi(f)|\leqslant\Lambda(|f|)=\int_X|f|d\lambda=\|f\|_1\qquad (f\in C_c(X))$$

这最后一个范数出于空间$L^1(\lambda)$. 于是$\Phi$是$C_c(X)$上线性泛函, 它关于$C_c(X)$上的$L^1(\lambda)$范数而言, 其范数至多是1. 存在一个$\Phi$到$L^1(\lambda)$上的线性泛函的保范数开拓. 所以定理6.16($p=1$的情况)给出了具有$|g|\leqslant 1$的Borel函数$g$, 使得

(6) $$\Phi(f)=\int_X fgd\lambda \qquad (f\in C_c(X))$$

(6)的每一边均是 $C_0(X)$ 上的连续泛函，而 $C_c(X)$ 是在 $C_0(X)$ 内稠密的. 因此(6)对所有的 $f\in C_0(X)$ 成立. 取 $d\mu=gd\lambda$，我们便得到表达式(1).

因为 $\|\Phi\|=1$，(6)指出：

(7) $$\int_X |g|d\lambda \geqslant \sup\{|\Phi(f)|:\ f\in C_0(X),\ \|f\|\leqslant 1\}=1$$

我们也知道 $\lambda(X)\leqslant 1$，$|g|\leqslant 1$. 这些事实仅当 $\lambda(X)=1$ 和 $|g|=1$ a.e. $[\lambda]$ 是相容的. 于是根据定理 6.13，$d|\mu|=|g|d\lambda=d\lambda$，且

(8) $$|\mu|(X)=\lambda(X)=1=\|\Phi\|$$

这就证明了(2).

所有这些都依赖于找出一个满足（4）的正线性泛函 $\Lambda$. 若 $f\in C_c^+(X)$ [$C_c(X)$ 的所有非负实元素的类]，定义

(9) $$\Lambda f=\sup\{|\Phi(h)|:\ h\in C_c(X),\ |h|\leqslant f\}$$

则 $\Lambda f\geqslant 0$，$\Lambda$ 满足(4). $0\leqslant f_1\leqslant f_2$ 蕴涵着 $\Lambda f_1\leqslant \Lambda f_2$. 并且若 $c$ 是正的常数，$\Lambda(cf)=c\Lambda f$. 我们必须证明

(10) $$\Lambda(f+g)=\Lambda f+\Lambda g \qquad (f \text{ 和 } g\in C_c^+(X))$$

然后，还得把 $\Lambda$ 开拓为 $C_c(X)$ 上的线性泛函.

固定 $f$ 和 $g\in C_c^+(X)$. 若 $\varepsilon>0$，则存在 $h_1$ 和 $h_2\in C_c(X)$，使得 $|h_1|\leqslant f$，$|h_2|\leqslant g$，且

(11) $$\Lambda f\leqslant |\Phi(h_1)|+\varepsilon,\quad \Lambda g\leqslant |\Phi(h_2)|+\varepsilon$$

存在复数 $\alpha_i$，$|\alpha_i|=1$，使 $\alpha_i\Phi(h_i)=|\Phi(h_i)|$，$i=1,2$. 这时

$$\begin{aligned}\Lambda f+\Lambda g&\leqslant |\Phi(h_1)|+|\Phi(h_2)|+2\varepsilon\\&=\Phi(\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2)+2\varepsilon\\&\leqslant \Lambda(|h_1|+|h_2|)+2\varepsilon\\&\leqslant \Lambda(f+g)+2\varepsilon\end{aligned}$$

因此，在(10)内，不等号"$\geqslant$"成立.

其次，选择 $h\in C_c(X)$，只要它服从条件 $|h|\leqslant f+g$，设 $V=\{x: f(x)+g(x)>0\}$. 定义

$$\text{(12)}\quad \begin{aligned} &h_1(x)=\frac{f(x)h(x)}{f(x)+g(x)},\quad h_2(x)=\frac{g(x)h(x)}{f(x)+g(x)},\quad x\in V,\\ &h_1(x)=h_2(x)=0\quad (x\notin V) \end{aligned}$$

显然，$h_1$ 在 $V$ 的每一点都连续. 若 $x_0\notin V$，则 $h(x_0)=0$；因为 $h$ 是连续的，并且因为 $|h_1(x)|\leqslant|h(x)|$ 对所有 $x\in X$ 成立，得出 $x_0$ 是$h_1$ 的连续点. 于是 $h_1\in C_c(X)$，并且对于 $h_2$ 也同样成立.

因为 $h_1+h_2=h$ 且 $|h_1|\leqslant f$，$|h_2|\leqslant g$，我们有

$$\begin{aligned}|\Phi(h)|&=|\Phi(h_1)+\Phi(h_2)|\leqslant|\Phi(h_1)|+|\Phi(h_2)|\\&\leqslant\Lambda f+\Lambda g\end{aligned}$$

因此 $\Lambda(f+g)\leqslant\Lambda f+\Lambda g$，并因此证明了(10).

现在，若 $f$ 是一个实函数，$f\in C_c(X)$，则 $2f^+=|f|+f$，因而 $f^+\in C_c^+(X)$；类似地，$f^-\in C_c^+(X)$；因为 $f=f^+-f^-$，自然地定义

$$\text{(13)}\qquad \Lambda f=\Lambda f^+-\Lambda f^-\quad (f\in C_c(X),f\text{ 是实的})$$

和

$$\text{(14)}\qquad \Lambda(u+iv)=\Lambda u+i\Lambda v$$

就象定理 1.31 的证明中所用过的那样，通过一些简单的代数运算，现在可以证明，我们开拓的泛函在 $C_c(X)$上是线性的.

这就完成了证明.

## 习　　题

1　若 $\mu$ 是 $\sigma$-代数$\mathfrak{M}$上的复测度，$E\in\mathfrak{M}$. 定义

$$\lambda(E)=\sup\Sigma|\mu(E_i)|.$$

其中的上确界是对$E$的所有的有限划分$\{E_i\}$取的. 能得出 $\lambda=|\mu|$吗?

2　证明 6.10 节末尾所给出的例子具有所述的性质.

3　证明局部紧 Hausdroff 空间$X$上的全体复正则 Borel 测度的向量

空间 $M(X)$ 取 $\|\mu\|=|\mu|(X)$ 时，构成一个 Banach 空间. 提示：与第五章习题 8 比较. [$M(X)$ 的任何两个元素之差在 $M(X)$ 内的结论，已经用于证明的第一段内，试提供这事实的证明.]

4　假定 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$q$ 是共轭于 $p$ 的指数. 假定 $\mu$ 是一个 $\sigma$-有限的测度，$g$ 是可测函数，使得对每一个 $f\in L^p(\mu)$，$fg\in L^1(\mu)$. 证明 $g\in L^q(\mu)$.

5　假定 $X$ 由两个点 $a$，$b$ 组成. 定义 $\mu(\{a\})=1$，$\mu(\{b\})=\mu(X)=\infty$，$\mu(\varnothing)=0$. 对于这样的 $\mu$，$L^\infty(\mu)$ 是 $L^1(\mu)$ 的对偶空间，对吗？

6　假定 $1<p<\infty$，证明甚至 $\mu$ 不是 $\sigma$-有限时，$L^q(\mu)$ 仍是 $L^p(\mu)$ 的对偶空间. (象通常一样 $1/p+1/q=1$.)

7　假定 $\mu$ 是 $[0,2\pi)$ 上(或在单位圆周 $T$ 上)的复 Borel 测度. 用

$$\hat{\mu}(n)=\int e^{-int}d\mu(t)\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

定义 $\mu$ 的 Fourier 系数. 假定当 $n\to+\infty$ 时，$\hat{\mu}(n)\to0$. 证明当 $n\to-\infty$ 时，$\hat{\mu}(n)\to0$ 成立. 提示：当 $f$ 是任一三角多项式时，用 $fd\mu$ 代替 $d\mu$，假定也是成立的. 因之当 $f$ 是连续函数，而 $f$ 是任一有界的 Borel 函数时，以至用 $d(\mu)$ 代替 $d\mu$ 时，假定也都成立.

8　按照习题 7 的术语，找出所有的 $\mu$，使得 $\hat{\mu}$ 是周期为 $k$ 的周期函数. [这意味着 $\hat{\mu}(n+k)=\hat{\mu}(n)$ 对所有的整数 $n$ 成立. 当然 $k$ 也假定是整数.]

9　假定 $\mu$ 是 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 上的正有限测度. 若 $A\in\mathfrak{M}$，$B\in\mathfrak{M}$，定义

$$\rho(A,B)=\int|\chi_A-\chi_B|d\mu=\mu(A\Delta B)$$

这里的对称差 $A\Delta B$ 由 $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ 给定.

(*a*) 证明 $\rho$ 是一个度量，$(\mathfrak{M},\rho)$ 是完备的度量空间.

(*b*) 若 $\lambda$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的复测度，证明下列三个命题的每一个都蕴涵着另外两个：

(i) $\lambda$ 是 $\mathfrak{M}$ 上连续函数.

(ii) $\lambda$ 在 $\varnothing$ 连续.

(iii) $\lambda\ll\mu$.

10　设 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 是正测度空间. 若对每一个 $\varepsilon>0$，对应一个 $\delta>0$，使得当 $f\in\Phi$ 且 $\mu(E)<\delta$ 时，有

$$\left|\int_E fd\mu\right|<\varepsilon$$

成立，就称集 $\Phi\subset L^1(\mu)$ 是一致可积的.

(*a*) 证明 $L^1(\mu)$ 的每一个有限子集是一致可积的.

(*b*) 证明下列的 Vitali 收敛定理:

若(i) $\mu(X)<\infty$, (ii) $\{f_n\}$ 是一致可积的, (iii) 当 $n\to\infty$ 时, $f_n(x)\to f(x)$, a. e. 且(iv) $|f(x)|<\infty$, a. e., 则 $f\in L^1(\mu)$ 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|\,d\mu=0$$

提示: 用 Egoroff 定理.

(*c*) 证明若 $\mu$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的 Lebesgue 测度, 甚至当 $\{\|f_n\|_1\}$ 假定是有界时, (*b*) 也不成立. 因此, 假定(i)在(*b*)内不能省去.

(*d*) 指出对某些 $\mu$ (比如, 有限区间上的 Lebesgue 测度), 假定(iv)在(*b*)中是多余的, 但是存在有限测度, 对于这些测度(iv)的省略将使得(*b*)不成立.

(*e*) 证明对于有限测度空间 Vitali 定理蕴涵着 Lebesgue 控制收敛定理. 构造一个尽管 Lebesgue 定理的假定不成立, Vitali 定理仍能应用的例子.

(*f*) 构造一个 $[0,1]$ 上的序列 $\{f_n\}$, 使之对每一个 $x$, $f_n(x)\to 0$, $\int f_n\to 0$, 但是 $\{f_n\}$ (关于 Lebesgue 测度)不是一致可积的.

(*g*) 然而, 下面的 Vitali 定理的逆命题是成立的:

假定 $\mu(X)<\infty$, $f\in L^1(\mu)$, $\{f_n\}\subset L^1(\mu)$, $f_n(x)\to f(x)$, a. e. 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu=\int_E f\,d\mu$$

对每一个 $E\in\mathfrak{M}$ 成立, 则 $\{f_n\}$ 是一致可积的.

通过完成下面的要点, 证明这个结论.

取 $f=0$, 固定 $\varepsilon>0$. 象习题 9 那样定义 $\rho$. 对每个 $n$

$$E\to\int_E f_n\,d\mu$$

是 $(\mathfrak{M},\rho)$ 上的连续函数. 根据第五章习题 13(*b*), 存在一个 $E_0\in\mathfrak{M}$, $\delta>0$, 和 $N$, 使得当 $n>N$, $\rho(E,E_0)<\delta$ 时

$$\left|\int_E f_n\,d\mu\right|<\varepsilon$$

取具有 $\mu(A)<\delta$ 的 $A\in\mathfrak{M}$, 令 $B=E_0-A$, $C=E_0\cup A$. 则上面的不等式用 $B$ 和 $C$ 代替 $E$ 时仍然成立. 注意 $\chi_A=\chi_C-\chi_B$. 若 $n\geq N$, 得出 $\left|\int_A f_n\,d\mu\right|<2\varepsilon$.

最后，求助于(a).

11 假定$\mu$是$X$上的正测度，$\mu(X)<\infty$, $f_n\in L^1(\mu)$, $n=1,2,3,\cdots$, $f_n(x)\to f(x)$ a.e.，并且存在$p>1$，和$C<\infty$，使得$\int_X |f_n|^p d\mu<C$对所有的$n$成立. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f-f_n|d\mu=0$$

提示：$\{f_n\}$是一致可积的。

# 第七章　乘积空间上的积分

本章致力于证明并讨论关于二元函数积分的 Fubiui 定理. 首先以抽象的形式提出这个定理.

## 笛卡儿乘积上的可测性

**7.1　定义**　若 $X$ 和 $Y$ 是两个集,它们的笛卡儿乘积 $X\times Y$ 是所有 $x\in X$, $y\in Y$ 的序对 $(x,\ y)$的集. 若 $A\subset X$ 和 $B\subset Y$,便得出 $A\times B\subset X\times Y$. 称任一形如 $A\times B$ 的集为 $X\times Y$ 内的矩形.

现在假定$(X,\mathscr{S})$和$(Y,\mathscr{T})$是可测空间. 回忆一下,这无非是说$\mathscr{S}$是 $X$ 内的 $\sigma$-代数,$\mathscr{T}$是 $Y$ 内的 $\sigma$-代数.

一个可测矩形是任一形如 $A\times B$ 的集,这里 $A\in\mathscr{S}$,$B\in\mathscr{T}$.

若 $Q=R_1\cup\cdots\cup R_n$,这里每个 $R_i$ 是可测矩形,且对 $i\neq j$, $R_i\cap R_j=\varnothing$,我们就说$Q\in\mathscr{E}$,即所有基本集的类.

$\mathscr{S}\times\mathscr{T}$定义为包含所有的可测矩形的$X\times Y$的最小的 $\sigma$-代数.

单调类$\mathfrak{M}$是具有下列性质的集族:若 $A_i\in\mathfrak{M}$,$B_i\in\mathfrak{M}$,$A_i\supset A_{i+1}$, $B_i\supset B_{i+1}$,对 $i=1,2,3,\cdots$成立,且若

$$(1)\qquad A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\qquad B=\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$$

则 $A\in\mathfrak{M}$ 和 $B\in\mathfrak{M}$.

若 $E\subset X\times Y$,$x\in X$,$y\in Y$,定义

$$(2)\qquad E_x=\{y:\ (x,y)\in E\},E^y=\{x:\ (x,y)\in E\}$$

分别称 $E_x$ 和 $E^y$ 为 $E$ 的 $x$-截口 和 $y$-截口. 注意 $E_x\subset Y$, $E^y\subset X$.

**7.2 定理** 若$E\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$，则对每一个$x\in X$和$y\in Y$，$E_x\in\mathscr{T}$和$E^y\in\mathscr{S}$.

**证明** 设$\Omega$是所有$E\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$的类，使得$E_x\in\mathscr{T}$对每一个$x\in X$成立. 若$E=A\times B$，则当$x\in A$时，$E_x=B$，当$x\notin A$时，$E_x=\varnothing$. 因此每一个可测矩形属于$\Omega$. 因为$\mathscr{T}$是$\sigma$-代数，下列三个命题都是正确的. 它们证明了$\Omega$是一个$\sigma$-代数，因此$\Omega=\mathscr{S}\times\mathscr{T}$.

(a) $X\times Y\in\Omega$.

(b) 若$E\in\Omega$，则$(E^c)_x=(E_x)^c$，因此，$E^c\in\Omega$.

(c) 若$E_i\in\Omega$，$(i=1,2,3,\cdots)$，且$E=\bigcup E_i$，则$E_x=\bigcup(E_i)_x$. 因此$E\in\Omega$.

对$E^y$证明是同样的.

**7.3 定理** $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$是包含所有基本集的最小的单调类.

**证明** 设$\mathfrak{M}$是包含$\mathscr{E}$的最小单调类；这种类的存在的证明恰好象定理1.10的证明那样. 因为$\mathscr{S}\times\mathscr{T}$是一个单调类，有$\mathfrak{M}\subset\mathscr{S}\times\mathscr{T}$.

恒等式

$$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$$

$$(A_1\times B_1)-(A_2\times B_2)$$
$$=[(A_1-A_2)\times B_1]\cup[(A_1\cap A_2)\times(B_1-B_2)]$$

表明，两个可测矩形的交是可测矩形，它们的差是两个不相交的可测矩形之并，因而都是基本集. 若$P\in\mathscr{E}$和$Q\in\mathscr{E}$，容易得出

$$P\cap Q\in\mathscr{S} \quad 和 \quad P-Q\in\mathscr{S}.$$

因为

$$P\cup Q=(P-Q)\cup Q$$

和$(P-Q)\cap Q=\varnothing$，故同样有$P\cup Q\in\mathscr{E}$.

对于任一集$P\subset X\times Y$，定义$\Omega(P)$为所有使得$P-Q\in\mathfrak{M}$，$Q-P\in\mathfrak{M}$和$P\cup Q\in\mathfrak{M}$的那些$Q\subset X\times Y$的类. 下面的性质是明显的.

(a) $Q\in\Omega(P)$当且仅当$P\in\Omega(Q)$.

(b) 因为$\mathfrak{M}$是单调类,每一个$\Omega(P)$也是单调类.

固定$P\in\mathscr{E}$,上述关于$\mathscr{E}$的评注指出:对于所有的$Q\in\mathscr{E}$,$Q\in\Omega(P)$. 因此$\mathscr{E}\subset\Omega(P)$. 并且现在(b)蕴涵着$\mathfrak{M}\subset\Omega(P)$.

其次,固定$Q\in\mathfrak{M}$. 若$P\in\mathscr{E}$,刚才看到了$Q\in\Omega(P)$. 根据(a),$P\in\Omega(Q)$,因此$\mathscr{E}\subset\Omega(Q)$. 若再一次运用(b),便得

$$\mathfrak{M}\subset\Omega(Q).$$

总结:若$P$和$Q\in\mathfrak{M}$,则$P-Q\in\mathfrak{M}$,$P\cup Q\in\mathfrak{M}$.

现在推导$\mathfrak{M}$是$X\times Y$内的$\sigma$-代数:

(i) $X\times Y\in\mathscr{E}$,因此$X\times Y\in\mathfrak{M}$,

(ii) 因为$\mathfrak{M}$的任意两个元素之差在$\mathfrak{M}$内,所以若$Q\in\mathfrak{M}$,则$Q^c\in\mathfrak{M}$.

(iii) 若$P_i\in\mathfrak{M}$,$i=1,2,3,\cdots$,$P=\bigcup P_i$,令

$$Q_n=P_1\cup\cdots\cup P_n$$

因为$\mathfrak{M}$对有限并运算封闭,$Q_n\in\mathfrak{M}$,

因为$Q_n\subset Q_{n+1}$且$P=\bigcup Q_n$,$\mathfrak{M}$的单调性指出$P\in\mathfrak{M}$.

于是$\mathfrak{M}$是一个$\sigma$-代数,$\mathscr{E}\subset\mathfrak{M}\subset\mathscr{S}\times\mathscr{T}$,并且(根据定义)$\mathscr{S}\times\mathscr{T}$是包含$\mathscr{E}$的最小的$\sigma$-代数,因此,$\mathfrak{M}=\mathscr{S}\times\mathscr{T}$.

**7.4 定义** 对$X\times Y$上每一个函数$f$和每一个$x\in X$,我们对应一个用$f_x(y)=f(x,y)$定义的$Y$上的函数$f_x$.

类似地,若$y\in Y$,$f^y$是用$f^y(x)=f(x,y)$定义的$X$上的函数.

因为我们现在与三个$\sigma$-代数,$\mathscr{S}$,$\mathscr{T}$,和$\mathscr{S}\times\mathscr{T}$打交道,为了清楚起见,今后提及"可测"一词时,将指明是就三个$\sigma$-代数中的那一个而言的.

**7.5 定理** 设$f$是一个$X\times Y$上的$(\mathscr{S}\times\mathscr{T})$-可测函数,则

(a) 对于每一个$x\in X$,$f_x$是一个$\mathscr{T}$-可测函数.

(b) 对于每一个$y\in X$,$f^y$是一个$\mathscr{S}$-可测函数.

**证明** 对任一开集 $V$,令

$$Q=\{(x,y):\ f(x,y)\in V\}$$

则 $Q\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$,且

$$Q_x=\{y:\ f_x(y)\in V\}$$

定理 7.2 指出 $Q_x\in\mathscr{T}$. 这就证明了$(a)$;$(b)$的证明是类似的.

## 乘积测度

**7.6 定理** 设$(X,\mathscr{S},\mu)$和$(Y,\mathscr{T},\lambda)$都是$\sigma$-有限的测度空间. 假定 $Q\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$. 若对每一个 $x\in X$ 和 $y\in Y$,

(1) $$\varphi(x)=\lambda(Q_x),\qquad \psi(y)=\mu(Q^y)$$

则 $\varphi$ 是$\mathscr{S}$-可测的,$\psi$ 是$\mathscr{T}$-可测的,且

(2) $$\int_X\varphi d\mu=\int_Y\psi d\lambda$$

注 关于测度空间的假定,更明确地说,就是 $\mu$ 和 $\lambda$ 分别是$\mathscr{S}$和$\mathscr{T}$上的正测度, $X$是可数个不相交的具有 $\mu(X_n)<\infty$ 的集 $X_n$ 的并,$Y$ 是可数个不相交的具有$\lambda(Y_n)<\infty$的集 $Y_n$ 的并.

定理 7.2 表明定义(1)是有意义的. 因为

(3) $$\lambda(Q_x)=\int_Y\chi_Q(x,y)d\lambda(y)\quad(x\in X)$$

对于 $\mu(Q^y)$具有类似的说法,因此结论(2)可以写成下列形式:

(4) $$\int_X d\mu(x)\int_Y\chi_Q(x,y)d\lambda(y)=\int_Y d\lambda(y)\int_X\chi_Q(x,y)d\mu(x)$$

**证明** 设$\Omega$是所有使得定理结论成立的那些$Q\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$的类. 我们要证明$\Omega$具有下列四个性质:

$(a)$ 每一个可测矩形属于$\Omega$.

$(b)$ 若 $Q_1\subset Q_2\subset Q_3\subset\cdots$,每个 $Q_i\in\Omega$, 且 $Q=\bigcup Q_i$,则 $Q\in\Omega$.

($c$) 若$\{Q_i\}$是不相交的$\Omega$的元素的可数集族，且$Q=\bigcup Q_i$，则$Q\in\Omega$.

($d$) 设$\mu(A)<\infty,\lambda(B)<\infty$，且

$$A\times B\supset Q_1\supset Q_2\supset Q_3\supset\cdots$$

若对$i=1,2,3,\cdots,Q_i\in\Omega,Q=\bigcap Q_i$，则$Q\in\Omega$.

若$Q=A\times B$，这里$A\in\mathscr{S},B\in\mathscr{T}$，则

$$\lambda(Q_x)=\lambda(B)\chi_A(x) \text{ 和 } \mu(Q^y)=\mu(A)\chi_B(y) \tag{5}$$

因此(2)中每一个积分都等于$\mu(A)\lambda(B)$. 这就给出($a$).

为证明($b$)，象(1)使$\varphi$和$\psi$与$Q$对应一样，设$\varphi_i$和$\psi_i$与$Q_i$相对应. $\lambda$和$\mu$的可数可加性指出

$$\varphi_i(x)\to\varphi(x),\ \ \psi_i(y)\to\psi(y) \qquad (i\to\infty) \tag{6}$$

在每一点上是单调递增地收敛的. 因为$\varphi_i$和$\psi_i$假定是满足定理结论的，从单调收敛定理即得出($b$).

对于不相交集的有限并，($c$)是显然的，因为不相交集的并的特征函数是它们的特征函数的和. ($c$) 的一般情况现在从 ($b$) 得出.

除了用控制收敛定理代替单调收敛定理以外，($d$) 的证明与($b$)的证明相象. 因为$\mu(A)<\infty$和$\lambda(B)<\infty$，这样做是合理的.

现在定义

$$Q_{mn}=Q\cap(X_n\times Y_n) \quad (m,n=1,2,3,\cdots) \tag{7}$$

并且设$\mathfrak{M}$是所有使得$Q_{mn}\in\Omega$对$m$和$n$所有选择都能成立的那些集$Q\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$的类，则($b$)和($d$)表明$\mathfrak{M}$是一个单调类；($a$)和($c$)指出$\mathscr{E}\subset\mathfrak{M}$，并且因为$\mathfrak{M}\subset\mathscr{S}\times\mathscr{T}$，定理 7.3 蕴涵着$\mathfrak{M}=\mathscr{S}\times\mathscr{T}$.

于是，对每一个$Q\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$和对$m,n$的所有选择，$Q_{mn}\in\Omega$. 因为$Q$是集$Q_{mn}$的并，并且这些集是不相交的，从($c$)得出$Q\in\Omega$. 这就完成了证明.

**7.7 定义** 如果$(X,\mathscr{S},\mu)$和$(Y,\mathscr{T},\lambda)$是象定理 7.6 中的

一样，且 $Q\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$. 我们定义

(1) $$(\mu\times\lambda)(Q)=\int_X\lambda(Q_x)d\mu(x)=\int_Y\mu(Q^y)d\lambda(y)$$

(1)中积分的等式是定理 7.6 的内容. 我们称 $\mu\times\lambda$ 是测度 $\mu$ 和 $\lambda$ 的乘积. 从定理 1.27 直接推得 $\mu\times\lambda$ 实际上是一个测度(即 $\mu\times\lambda$ 是在 $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ 上可数可加的).

也可以看出 $\mu\times\lambda$ 是 $\sigma$-有限的.

## Fubini 定理

**7.8 定理** 设 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 和 $(Y,\mathscr{T},\lambda)$ 是 $\sigma$-有限的测度空间，设 $f$ 是 $X\times Y$ 上的 $(\mathscr{S}\times\mathscr{T})$-可测函数.

(a) 若 $0\leqslant f\leqslant\infty$, 且若

(1) $$\varphi(x)=\int_Y f_x d\lambda,\quad \psi(y)=\int_X f^y d\mu\quad (x\in X,\ y\in Y),$$

则 $\varphi$ 是 $\mathscr{S}$-可测的，$\psi$ 是 $\mathscr{T}$-可测的，且

(2) $$\int_X\varphi d\mu=\int_{X\times Y}fd(\mu\times\lambda)=\int_Y\psi d\lambda$$

(b) 若 $f$ 是复的，且若

(3) $$\varphi^*(x)=\int_Y|f|_x d\lambda \text{ 和 } \int_X\varphi^* d\mu<\infty$$

则 $f\in L^1(\mu\times\lambda)$.

(c) 若 $f\in L^1(\mu\times\lambda)$, 则 $f_x\in L^1(\lambda)$, 对几乎所有的 $x\in X$ 成立. $f^y\in L^1(\mu)$ 对几乎所有的 $y\in Y$ 成立. 由(1)式 a. e. 定义的函数 $\varphi$ 和 $\psi$ 分别在 $L^1(\mu)$ 和 $L^1(\lambda)$ 内，并且(2)成立.

注 (2) 的第一个积分和最后一个积分也能写成更为常见的形式.

(4) $$\int_X d\mu(x)\int_Y f(x,y)d\lambda(y)=\int_Y d\lambda(y)\int_X f(x,y)d\mu(x)$$

这些就是所谓的 $f$ 的"累次积分"，(2)式中间的积分经常被称为重

积分.

(*b*)和(*c*)结合起来给出了下列有用的结果：若 $f$ 是$(\mathscr{S}\times\mathscr{T})$-可测，且若

$$(5)\qquad \int_X d\mu(x)\int_Y |f(x,y)|d\lambda(y)<\infty$$

则(4)的两个累次积分是有限的并且相等.

换句话说，对于$(\mathscr{S}\times\mathscr{T})$-可测函数 $f$，当 $f\geqslant 0$ 时，"积分的次序可以交换." 当$|f|$的累次积分之一是有限时，"积分的次序也可以交换."

**证明** 首先考虑(*a*). 根据定理 7.5，$\varphi$ 和 $\psi$ 的定义是有意义的. 假定 $Q\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ 且 $f=\chi_Q$. 根据定义 7.7，(2) 恰好是定理 7.6 的结论. 因此(*a*)对所有非负简单$(\mathscr{S}\times\mathscr{T})$-可测函数 $s$ 成立. 在一般情况下，存在这种函数序列 $s_n$，使得 $0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots$ 且在 $X\times Y$ 的每一点 $s_n(x,y)\to f(x,y)$. 若象 $\varphi$ 与 $f$ 对应一样，$\varphi_n$ 与 $s_n$ 相对应，则有

$$(6)\qquad \int_X \varphi_n d\mu=\int_{X\times Y} s_n d(\mu\times\lambda)\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

单调收敛定理应用于$(Y,\mathscr{T},\lambda)$上时指出，对每一个 $x\in X$，当 $n\to\infty$ 时 $\varphi_n(x)$递增到 $\varphi(x)$. 因此，再一次应用单调收敛定理于(6)的两个积分，便得到(2)的第一个等式. 通过交换 $x$ 和 $y$ 的地位，得出(2)的后半部分. 这就完成了(*a*)的证明.

若应用(*a*)于$|f|$，可看出(*b*)是正确的.

显然，只要对实的 $L^1(\mu\times\lambda)$证明(*c*)成立就足够了；复的情况跟着就能得出. 若 $f$ 是实的，将(*a*) 应用于 $f^+$ 和 $f^-$. 象(1)中 $\varphi$ 对应于 $f$ 一样，设 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 对应于 $f^+$ 和 $f^-$. 因为 $f\in L^1(\mu\times\lambda)$并且 $f^+\leqslant|f|$，又因为 (*a*) 对 $f^+$ 成立，看出 $\varphi_1\in L^1(\mu)$. 类似地，$\varphi_2\in L^1(\mu)$. 因为

$$(7) \qquad f_x=(f^+)_x-(f^-)_x$$

所以对于使得 $\varphi_1(x)<\infty$ 和 $\varphi_2(x)<\infty$ 的每一个 $x$，有 $f_x\in L^1(\lambda)$；因为 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 均在 $L^1(\mu)$ 内，故对于几乎所有的 $x$，都有 $\varphi_1(x)<\infty$ 和 $\varphi_2(x)<\infty$，并且对任一这样的 $x$，有 $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$. 因此 $\varphi\in L^1(\mu)$. 现在用 $\varphi_1$ 和 $f^+$ 及用 $\varphi_2$ 和 $f^-$ 代替 $\varphi$ 和 $f$,(2)式都成立；若将所得的两个方程相减，我们可以得到(c)的一半. 用 $f^y$ 和 $\psi$ 代替 $f_x$ 和 $\varphi$,同样的方法可证明另一半.

**7.9 反例** 下面的三个例子将指出,定理 7.6 和 7.8 的各种假定都是不能删掉的.

(a) 设 $X=Y=[0,1]$, $\mu=\lambda=$ 在 $[0,1]$ 上的Lebesgue测度. 选取 $\{\delta_n\}$ 使 $0=\delta_1<\delta_2<\delta_3<\cdots,\delta_n\to 1$, 且设 $g_n$ 是支集位于 $(\delta_n,\delta_{n+1})$ 内的实连续函数，使得 $\int_0^1 g_n(t)dt=1$，对 $n=1,2,3,\cdots$ 成立.

定义

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}[g_n(x)-g_{n+1}(x)]g_n(y)$$

注意在每一点 $(x,y)$，式中至多有一项异于 0. 于是在 $f$ 的定义中没有收敛性的问题. 一个简单的计算指出

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=1\neq 0=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$$

因此虽然两个累次积分存在，Fubini 定理的结论却不成立. 注意在这个例子中,除去在(1,1)这点以外,$f$ 是连续的. 但是

$$\int_0^1 dx\int_0^1 |f(x,y)|dy=\infty$$

(b) 设 $X=Y=[0,1]$，$\mu=[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度，$\lambda=Y$ 上的计数测度. 若 $x=y$，令 $f(x,y)=1$；若 $x\neq y$ 令 $f(x,y)=0$，则

$$\int_X f(x,y)d\mu(x)=0, \qquad \int_Y f(x,y)d\lambda(y)=1$$

对所有[0,1]内的 $x$ 和 $y$ 成立. 因此

$$\int_Y d\lambda(y)\int_X f(x,y)d\mu(x) = 0\neq 1$$
$$=\int_X d\mu(x)\int_Y f(x,y)d\lambda(y)$$

这次是由于 $\lambda$ 不是 $\sigma$-有限而导致失败.

请注意,若$\mathscr{S}$是所有[0, 1]的 Lebesgue 可测集的类而$\mathscr{T}$是由[0,1]的所有子集组成, 则我们的函数 $f$ 是$(\mathscr{S}\times\mathscr{T})$-可测的. 要看出这点,注意 $f=\chi_D$, 这里$D$是单位正方形的对角线. 给定 $n$, 令

$$I_j=\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]$$

并且令

$$Q_n=(I_1\times I_1)\cup(I_2\times I_2)\cup\cdots\cup(I_n\times I_n)$$

则 $Q_n$ 是可测矩形的有限并,且 $D=\bigcap Q_n$.

(c) 在例(a)和例(b)中,Fubini 定理不成立是由于或者函数或者空间"太大"造成的. 现在转而讨论$f$关于 $\sigma$-代数$\mathscr{S}\times\mathscr{T}$是可测的这一要求所起的作用.

为了更加精确地提出问题, 假定 $\mu(X)=\lambda(Y)=1$, $0\leqslant f\leqslant 1$ (因此"大"这一点当然就避免了); 假定对于所有的 $x$ 和 $y$, $f_x$ 是$\mathscr{T}$-可测而 $f^y$ 是$\mathscr{S}$-可测的,并且假定 $\varphi$ 是$\mathscr{S}$-可测和 $\psi$ 是$\mathscr{T}$-可测的. 这里 $\varphi$ 和 $\psi$ 象 7.8(1)一样地定义. 则 $0\leqslant\varphi\leqslant 1$,和 $0\leqslant\psi\leqslant 1$, 并且两个累次积分都是有限的. (注意在定义累次积分时不需要涉及乘积测度.)能得出 $f$ 的两个累次积分相等吗?

这个(可能令人惊愕的)回答是,否.

在下面(由 Sierpinski 给出)的例子中,我们取

$$(X,\mathscr{S},\mu)=(Y,\mathscr{T},\lambda)=[0,1]$$

具有 Lebesgue 测度. 这个构造依赖于连续统假设. 存在一个单位

区间[0，1]到良序集$W$上的一一映象 $j$，使得对每个$x\in[0,1]$，$j(x)$ 在$W$内至多有可数多个先行元素．这是该假设的一个推论．我们承认它的合理性．设$Q$是单位正方形内所有使得 $j(x)$ 在$W$内前于 $j(y)$的那些$(x,y)$的集．对于每一个 $x\in[0,1]$，$Q_x$包含了[0,1]的除去可数多个点外的所有点；对于每一个 $y\in[0,1]$，$Q^y$ 至多包含[0,1]的可数多个点．若 $f=\chi_Q$，得出 $f_x$ 和 $f^y$ 是 Borel 可测的，并且得出

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(x,y)dy=1, \quad \psi(y)=\int_0^1 f(x,y)dx=0$$

对所有的 $x$ 和 $y$ 成立．因此

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=1\neq 0=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$$

## 乘积测度的完备化

**7.10** 若$(X,\mathscr{S},\mu)$和$(Y,\mathscr{T},\lambda)$都是完备测度空间，$(X\times Y,\mathscr{S}\times\mathscr{T},\mu\times\lambda)$却不一定是完备的．这种现象并没有什么毛病：假定存在一个具有 $\mu(A)=0$ 的$A\in\mathscr{S}$，$A\neq\varnothing$；并假定存在一个$B\subset Y$，使 $B\notin\mathscr{T}$．则 $A\times B\subset A\times Y$，$(\mu\times\lambda)(A\times Y)=0$，但 $A\times B\notin\mathscr{S}\times\mathscr{T}$．（后一个断言由定理 7.2 得出．）

例如，若 $\mu=\lambda=m_1$($R^1$ 上的 Lebesgue 测度)，设$A$由任一点组成，并且设$B$是 $R^1$ 的任一不可测集．于是 $m_1\times m_1$ 不是一个完备测度；特别 $m_1\times m_1$ 不是 $m_2$．因为后者根据它的构造是完备的．然而，$m_2$ 是 $m_1\times m_1$ 的完备化．这个结果推广到任意维数：

**7.11 定理** 设 $m_k$ 表示 $R^k$ 上的 Lebesgue 测度．若$k=r+s$，$r\geq 1$，$s\geq 1$，则 $m_k$ 是 $m_r\times m_s$ 乘积测度的完备化．

**证明** 设 $\mathscr{B}_k$ 和 $\mathfrak{M}_k$ 分别是 $R^k$ 的所有 Borel 集的 $\sigma$-代数和 $R^k$ 的所有 Lebesgue 可测集的 $\sigma$-代数．首先证明

(1) $$\mathscr{B}_k\subset\mathfrak{M}_r\times\mathfrak{M}_s\subset\mathfrak{M}_k$$

每一个 $k$-胞腔属于 $\mathfrak{M}_r\times\mathfrak{M}_s$. 用 $k$-胞腔所生成的 $\sigma$-代数是 $\mathscr{B}_k$. 因此 $\mathscr{B}_k\subset\mathfrak{M}_r\times\mathfrak{M}_s$. 其次,假定 $E\in\mathfrak{M}_r$ 和 $F\in\mathfrak{M}_s$. 根据定理 2.20($b$), 容易看出 $E\times R^s$ 和 $R^r\times F$ 同时属于 $\mathfrak{M}_k$. 对它们的交 $E\times F$ 同样是正确的. 于是得出

$$\mathfrak{M}_r\times\mathfrak{M}_s\subset\mathfrak{M}_k.$$

选取 $Q\in\mathfrak{M}_r\times\mathfrak{M}_s$, 则 $Q\in\mathfrak{M}_k$. 所以存在 $P_1$ 和 $P_2\in\mathscr{B}_k$, 使得 $P_1\subset Q\subset P_2$ 且 $m_k(P_2-P_1)=0$. $m_k$ 和 $m_r\times m_s$ 二者都是 $R^k$ 平移不变的 Borel 测度. 它们对每一个 $k$-胞腔指定同一值. 根据定理 2.20($d$), 因此在 $\mathscr{B}_k$ 上它们是一致的. 特别,

$$(m_r\times m_s)(Q-P_1)\leqslant(m_r\times m_s)(P_2-P_1)$$
$$=m_k(P_2-P_1)=0.$$

并且因此

$$(m_r\times m_s)(Q)=(m_r\times m_s)(P_1)=m_k(P_1)=m_k(Q)$$

所以在 $\mathfrak{M}_r\times\mathfrak{M}_s$ 上 $m_r\times m_s$ 和 $m_k$ 一致.

现在得出 $\mathfrak{M}_k$ 是 $\mathfrak{M}_r\times\mathfrak{M}_s$ 的 $(m_r\times m_s)$-完备化, 而这就是定理所断言的.

我们用 Fubini 定理的另一种说法来结束这一节. 这个结论就定理 7.11 看来是特别感兴趣的部分.

**7.12 定理** 设 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 和 $(Y,\mathscr{T},\lambda)$ 是完备的 $\sigma$-有限测度空间. 设 $(\mathscr{S}\times\mathscr{T})^*$ 是 $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ 关于测度 $\mu\times\lambda$ 的完备化. 设 $f$ 是 $X\times Y$ 上的 $(\mathscr{S}\times\mathscr{T})^*$-可测函数, 则定理 7.8 的结论成立, 仅有的不同之处如下:

$f_x$ 的 $\mathscr{T}$-可测性只能对几乎所有 $x\in X$ 断定是正确的. 因此根据 7.8(1), $\varphi(x)$ 只是 a.e.$[\mu]$ 定义; 类似结论对 $f^y$ 和 $\psi$ 也成立.

这个证明依赖于下列两个引理:

**引理 1** 假定 $\nu$ 是 $\sigma$-代数 $\mathfrak{M}$ 上的正测度, $\mathfrak{M}^*$ 是 $\mathfrak{M}$ 关于 $\nu$ 的完备化, 并且 $f$ 是一个 $\mathfrak{M}^*$-可测函数. 则存在一个 $\mathfrak{M}$-可测函数 $g$,

使得 $f=g$ a. e. $[\mu]$.

(当 $\nu$ 是 $R^k$ 的 Lebesgue 测度并且$\mathfrak{M}$是所有的 $R^k$ 的 Borel 集的类时，就出现这个引理的一个有趣的特殊情况.)

**引理 2** 设 $h$ 是 $X\times Y$ 上 $(\mathscr{S}\times\mathscr{T})^*$-可测函数，使得 $h=0$ a. e. $[\mu\times\lambda]$. 则对于几乎所有的 $x\in X$, $h(x,y)=0$ 对几乎所有的 $y\in Y$ 成立. 特别，对几乎所有的 $x\in X$, $h_x$ 是$\mathscr{T}$-可测的. 对于 $f^y$ 类似的结论也成立.

若我们假定两个引理成立，定理的证明立即可以得到：若 $f$ 如同定理所述的一样，引理 1 (对于 $\nu=\mu\times\lambda$) 指出，$f=g+h$, 这里 $h=0$ a. e. $[\mu\times\lambda]$, 并且 $g$ 是$(\mathscr{S}\times\mathscr{T})$-可测的. 定理 7.8 应用于 $g$. 引理 2 指出 $f_x=g_x$ a. e. $[\lambda]$ 对几乎所有的 $x$ 成立，且 $f^y=g^y$ a. e. $[\mu]$ 对几乎所有的 $y$ 成立. 因此 $f$ 的两个累次积分和重积分与 $g$ 的累次积分和重积分相同，从而定理得证.

**引理 1 的证明** 假定 $f$ 是 $\mathfrak{M}^*$-可测且 $f\geqslant 0$. 存在 $\mathfrak{M}^*$-可测的简单函数 $0=s_0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots$ 使得对每一个 $x\in X$, 当 $n\to\infty$ 时 $s_n(x)\to f(x)$. 因此 $f=\Sigma(s_{n+1}-s_n)$. 因为 $s_{n+1}-s_n$ 是特征函数的有限的线性组合，所以存在常数 $c_i>0$ 和集 $E_i\in\mathfrak{M}^*$, 使得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\chi_{E_i}(x)\qquad(x\in X)$$

$\mathfrak{M}^*$的定义指出(见定理 1.36)：存在集 $A_i\in\mathfrak{M}$, $B_i\in\mathfrak{M}$, 使得 $A_i\subset E_i\subset B_i$ 且 $\nu(B_i-A_i)=0$. 定义

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\chi_{A_i}(x)\qquad(x\in X)$$

则函数 $g$ 是$\mathfrak{M}$-可测的. 且可能除去 $x\in\bigcup(E_i-A_i)\subset\bigcup(B_i-A_i)$ 的那些点外，$g(x)=f(x)$. 因为 $\nu(B_i-A_i)=0$ 对每一个 $i$ 成立，得出 $g=f$ a. e. $[\nu]$. 从这个结果可以得出一般情况 ($f$ 是实的或复的).

**引理 2 的证明** 设 $P$ 是 $X \times Y$ 的所有使 $h(x,y) \neq 0$ 的点的集. 则 $P \in (\mathscr{S} \times \mathscr{T})^*$ 且 $(\mu \times \lambda)(P)=0$. 因此存在一个 $Q \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$，使得 $P \subset Q$ 且 $(\mu \times \lambda)Q=0$. 根据定理 7.6 有

$$\int_X \lambda(Q_x) d\mu(x) = 0 \tag{1}$$

设 $N$ 是使 $\lambda(Q_x)>0$ 的所有 $x \in X$ 的集. 从(1)得出 $\mu(N)=0$. 对每一个 $x \notin N$, $\lambda(Q_x)=0$. 因为 $P_x \subset Q_x$, 且 $(Y, \mathscr{T}, \lambda)$ 是完备的测度空间, 若 $x \notin N$. 则 $P_x$ 的每一个子集属于 $\mathscr{T}$. 若 $y \notin P_x$, 则 $h_x(y)=0$. 于是我们看出: 对每一个 $x \notin N$, $h_x$ 是 $\mathscr{T}$-可测的, 且 $h_x(y)=0$ a. e. $[\lambda]$.

## 卷积

**7.13** 经常遇到能用证明某个集确实很大的方法证明该集是不空的. 这个"大"字自然可以涉及各种性质. 其中之一（比较原始的一个）是势. 存在超越数的著名的证明提供了一个例子: 仅存在可数多个代数数但是存在不可数个实数. 因此, 超越实数的集是非空的. Baire 定理的应用基于"大"的拓扑概念: 稠密的 $G_\delta$ 集是完备度量空间的"大"子集. "大"的第三种形式是测度论的形式: 人们可以尝试用证明测度空间中某集具有正测度或用证明它的余集具有零测度的方法更加好些,来证明该集是不空的. Fubini 定理在这种形式的论证中经常出现.

例如, 设 $f$ 和 $g \in L^1(R^1)$, 暂时假定 $f \geqslant 0$ 和 $g \geqslant 0$, 并考虑积分

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1}$$

对任一固定的 $x$, (1)的被积函数是值域在 $[0, \infty]$ 内的可测函数, 以致 $h(x)$ 一定可以用(1)很好地确定, 并且 $0 \leqslant h(x) \leqslant \infty$.

但是否存在一个 $x$ 使 $h(x) < \infty$ 呢? 注意到对每一个固定的

$x$,(1)中的被积函数是 $L^1$ 的两个元素的乘积，并且这样的乘积不总是在 $L^1$ 内的。[例如当 $0<x<1$ 时，$f(x)=g(x)=1/\sqrt{x}$，当 $x$ 为其他值时为 0.] Fubini 定理将给出一个肯定的回答. 事实上，它将指出 $h\in L^1(R^1)$，因此，$h(x)<\infty$ a.e.

**7.14 定理** 假定 $f\in L^1(R^1)$, $g\in L^1(R^1)$. 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)g(y)|dy<\infty \tag{1}$$

对几乎所有的 $x$ 成立. 对于这些 $x$, 定义

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy \tag{2}$$

则 $h\in L^1(R^1)$，并且

$$\|h\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1 \tag{3}$$

这里

$$\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx \tag{4}$$

我们称 $h$ 为 $f$ 和 $g$ 的卷积，并记以 $h=f*g$.

**证明** 存在Borel 函数 $f_0$ 和 $g_0$，使得 $f_0=f$ a.e. 和 $g_0=g$ a.e. 若用 $f_0$ 代替 $f$，用 $g_0$ 代替 $g$，对每一个 $x$，积分(1)和(2)不变. 因此从一开始就可以假定，$f$ 和 $g$ 都是 Borel 函数.

为了应用 Fubini 定理，首先证明，由

$$F(x,y)=f(x-y)g(y) \tag{5}$$

定义的函数 $F$ 是 $R^2$ 上的 Borel 函数.

由

$$\varphi(x,y)=x-y,\qquad \psi(x,y)=y \tag{6}$$

定义 $\varphi$: $R^2\to R^1$ 和 $\psi$: $R^2\to R^1$. 则 $f(x-y)=(f\circ\varphi)(x,y)$ 和 $g(y)=(g\circ\psi)(x,y)$. 因为 $\varphi$、$\psi$ 都是 Borel 函数，定理 1.12(*d*)指出，$f\circ\varphi$ 和 $g\circ\psi$ 都是 $R^2$ 上的 Borel 函数. 因此，它们的乘积也是 Borel 函数.

其次，我们考察一下：

$$(7)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} dy\int_{-\infty}^{\infty} |F(x,y)|dx=\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|dy\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|dx$$
$$=\|f\|_1\|g\|_1$$

因为根据 Lebesgue 测度的平移不变性，对每一个 $y\in R^1$，

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|dx=\|f\|_1$$

于是 $F\in L^1(R^2)$. 并且 Fubini 定理蕴涵着积分(2) 对几乎所有的 $x\in R^1$存在，并且 $h\in L^1(R^1)$. 最后，根据(7)，

$$\|h\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}|F(x,y)|dy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}|F(x,y)|dx=\|f\|_1\|g\|_1$$

这就给出了(3)，并且完成了证明.

卷积将在第九章起着重要的作用.

## 习　　题

1　找出一个集 $X$ 的单调类 $\mathfrak{M}$ 的例子，使得 $\varnothing\in\mathfrak{M}$，$X\in\mathfrak{M}$，但 $\mathfrak{M}$ 不是一个 $\sigma$-代数.

2　假定 $f$ 是 $R^1$上的 Lebesgue 可测的非负实函数，而 $A(f)$ 是 $f$ 的纵坐标集. 这就是所有 $(x,y)\in R^2$ 使 $0<y<f(x)$ 的点集.

(*a*) $A(f)$ 在二维的意义下 Lebesgue 可测，对吗？

(*b*) 若(*a*)的回答是肯定的，$f$ 在 $R^1$ 上的积分等于 $A(f)$ 的测度吗？

(*c*) $f$ 的图象是 $R^2$ 的可测子集吗？

(*d*) 若(*c*)的回答是肯定的，这个图象的测度等于零吗？

3　找出一个在开单位正方形内的正连续函数 $f$ 的例子，它(关于 Lebesgue 测度)的积分是有限的，但对某个 $x\in(0,1)$（在定理7.8的记号下的）$\varphi(x)$ 是无限的.

4　假定 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$f\in L^1(R^1)$，$g\in L^p(R^1)$.

(*a*) 仿效定理 7.14 的证明去证明定义为 $(f*g)(x)$ 的积分对几乎所有

的 $x$ 存在，$f*g\in L^p(R^1)$，并证明

$$\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p$$

(*b*) 指出当 $p=1$ 或 $p=\infty$时，在(*a*)的不等式中等号能够成立．并且找出使等号成立的条件．

(*c*) 假定 $1<p<\infty$，并且在(*a*)中等号成立，由此证明或是 $f=0$ a.e. 或是 $g=0$ a.e.

(*d*) 假定 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\varepsilon>0$，证明存在 $f\in L^1(R^1)$ 和 $g\in L^p(R^1)$ 使得

$$\|f*g\|_p>(1-\varepsilon)\|f\|_1\|g\|_p$$

5　设$M$是所有的 $R^1$ 上的复 Borel 测度 的 Banach 空间．$M$的范数是 $\|\mu\|=|\mu|(R^1)$．对每一 Borel 集 $E\subset R^1$，对应一个集

$$E_2=\{(x,y):x+y\in E\}\subset R^2$$

若 $\mu$ 和 $\lambda\in M$，定义它们的卷积 $\mu*\lambda$ 为对每一个 Borel 集 $E\subset R^1$，由

$$(\mu*\lambda)(E)=(\mu\times\lambda)(E_2)$$

所给定的集函数；$\mu\times\lambda$ 同定义 7.7 一样．

(*a*) 证明 $\mu*\lambda\in M$，并且 $\|\mu*\lambda\|\leqslant\|\mu\|\|\lambda\|$．

(*b*) 证明 $\mu*\lambda$ 是唯一的 $\nu\in M$，使得

$$\int fd\nu=\int\int f(x+y)d\mu(x)d\lambda(y)$$

对每一个 $f\in C_0(R^1)$成立．(所有积分展布在 $R^1$ 上)．

(*c*) 证明$M$中的卷积是交换的，结合的，并且关于加法是分配的．

(*d*) 证明公式

$$(\mu*\lambda)(E)=\int\mu(E-t)d\lambda(t)$$

对每一个 $\mu$ 和 $\lambda\in M$ 和对每一个 Borel 集$E$成立．这里

$$E-t=\{x-t:x\in E\}$$

(*e*) 若 $\mu$ 集中在可数集上，就定义 $\mu$ 是离散的；若对每一个 $x\in R^1$，$\mu(\{x\})=0$，就定义 $\mu$ 是连续的；设 $m$ 是 $R^1$ 上的 Lebesgue 测度 (注意，$m\notin M$)．证明若 $\mu$ 和 $\lambda$ 都是离散的，则 $\mu*\lambda$ 是离散的；若 $\mu$ 是连续的且 $\lambda\in M$，则 $\mu*\lambda$ 是连续的，并且若 $\mu\ll m$，则 $\mu*\lambda\ll m$．

(*f*) 假定 $d\mu=fdm$, $d\lambda=gdm$，$f\in L^1(R^1)$ 和 $g\in L^1(R^1)$，证明 $d(\mu*\lambda)=(f*g)dm$．

(*g*) 性质(*a*)和(*c*)表明：Banach 空间$M$就是人们所称为的交换 Bana-

ch 代数. 证明(e)和(f)蕴涵着$M$内所有的离散测度的集是$M$的一个子代数;连续测度构成$M$的一个理想;并且关于$m$绝对连续的测度构成$M$的一个理想,它(作为一个代数)同构于$L^1(R^1)$.

(h) 证明$M$具有单位元,即证明存在一个$\delta\in M$,使得$\delta*\mu=\mu$对所有的$\mu\in M$成立.

(i) 在这些讨论中,仅用到$R^1$的两个性质:$R^1$是一个交换(加法)群,存在一个$R^1$上的平移不变Borel测度$m$,这个测度不恒等于0,并且它在$R^1$的所有紧子集上是有限的.证明若用$R^k$代替$R^1$或用$T$(单位圆周)或用$T^k$($k$维环面,即$k$个$T$的笛卡儿乘积)代替$R^1$,当适当地阐明定义之后,同样的结果也都成立.

6 (在$R^k$内的极坐标).设$S_{k-1}$是$R^k$内的单位球面,即所有到原点的距离是1的那些$u\in R^k$的集.证明每一个$x\in R^k$,除去$x=0$,具有唯一的表达形式$x=ru$,这里$r$是一个正实数且$u\in S_{k-1}$.于是$R^k-\{0\}$可以看作$(0,\infty)\times S_{k-1}$的笛卡儿乘积.

设$m_k$是$R^k$上的Lebesgue测度,在$S_{k-1}$上定义一个测度$\sigma_{k-1}$如下:若$A\subset S_{k-1}$且$A$是Borel集,设$\tilde{A}$是所有点$ru$的集,这里$0<r<1$和$u\in A$,并且定义

$$\sigma_{k-1}(A)=k\cdot m_k(\tilde{A})$$

证明公式

$$\int_{R^k} f\,dm_k=\int_0^\infty r^{k-1}dr\int_{S_{k-1}} f(ru)\,d\sigma_{k-1}(u)$$

对每一个$R^k$上非负Borel函数$f$成立.验证这个结果在$k=2$时和$k=3$时与熟知的结果相一致.

提示:若$0<r_1<r_2$,且若$A$是$S_{k-1}$的开子集,设$E$是所有具有$r_1<r<r_2$,$u\in A$的$ru$的集.验证公式对$E$的特征函数成立.从而过渡到$R^k$中Borel集的特征函数.

7 假定$(X,\mathscr{S},\mu)$和$(Y,\mathscr{T},\lambda)$是$\sigma$-有限测度空间,并且假定$\psi$是$\mathscr{S}\times\mathscr{T}$上的测度,使得

$$\psi(A\times B)=\mu(A)\lambda(B)$$

当$A\in\mathscr{S}$和$B\in\mathscr{T}$时成立.证明$\psi(E)=(\mu\times\lambda)(E)$对每一个$E\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$成立.

8 (a) 假定$f$是$R^2$上的实函数,使得每一个截口$f_x$是Borel可测的和每一个截口$f^y$是连续的.证明$f$在$R^2$上是Borel可测的.注意这和

例 7.9(c)之间的对立.

(b) 假定 $g$ 是 $R^k$ 上的实函数,它分别对 $k$ 个变量的每一个是连续的.更确切地说,对 $x_2, \cdots, x_k$ 的每一个选择,映射 $x_1 \to g(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 是连续的,等等. 证明 $g$ 是一个 Borel 函数.

提示: 若 $(i-1)/n = a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_i = i/n$, 令

$$f_n(x, y) = \frac{a_i - x}{a_i - a_{i-1}} f(a_{i-1}, y) + \frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} f(a_i, y)$$

9 假定 $E$ 是 $R^1$ 中的稠密集,而 $f$ 是 $R^2$ 上的实函数,使得(a)对每一个 $x \in E$, $f_x$ 是 Lebesgue 可测的,(b)对几乎所有的 $y \in R^1$, $f^y$ 是连续的. 证明 $f$ 在 $R^2$ 上是 Lebesgue 可测的.

10 假定 $f$ 是 $R^2$ 上的实函数,对每一个 $x$, $f_x$ 是 Lebesgue 可测的,对每一个 $y$, $f^y$ 是连续的. 假定 $g$: $R^1 \to R^1$ 是 Lebesgue 可测的,且令 $h(y) = f(g(y), y)$. 证明 $h$ 在 $R^1$ 上是 Lebesgue 可测的.

提示: 象习题 8 一样定义 $f_n$,令 $h_n(y) = f_n(g(y), y)$,证明 $h_n$ 是可测的并证明 $h_n(y) \to h(y)$.

11 设 $\mathscr{B}_k$ 是 $R^k$ 的所有 Borel 集的 $\sigma$-代数. 证明 $\mathscr{B}_{m+n} = \mathscr{B}_m \times \mathscr{B}_n$. 这是与定理 7.14 有关的结果.

12 利用 Fubini 定理和关系式

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt \qquad (x > 0)$$

去证明

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

# 第八章　微　分

## 测度的导数

为了引出定义 8.3，我们从关于某些点函数的导数的一个定理开始。

**8.1　定理**　假设 $\mu$ 是 $R^1$ 上的复 Borel 测度和

$$f(x)=\mu((-\infty,x)) \qquad (x\in R^1) \tag{1}$$

如果 $x\in R^1$ 且 $A$ 是一个复数，则下面两个命题的每一个都蕴涵着另一个：

(a) $f$ 在 $x$ 可微且 $f'(x)=A$.

(b) 对每一个 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得

$$\left|\frac{\mu(I)}{m(I)}-A\right|<\varepsilon \tag{2}$$

对每一个长度小于 $\delta$ 的包含 $x$ 的开区间 $I$ 成立。

这里 $m$ 表示 $R^1$ 上的 Lebesgue 测度.

**证明**　限制在某一个包含 $x$ 的线段上，用 $\mu-Am$ 代替 $\mu$（因此新的测度是有限的）. 这就表明可以假定 $A=0$ 而不失去一般性.

若 $f'(x)=0$ 和 $\varepsilon>0$，则存在一个 $\delta>0$，当 $|t-x|<\delta$ 时，

$$|f(t)-f(x)|\leqslant\varepsilon|t-x|$$

假设 $x\in I$，$I=(s,\ t)$，且 $t-s<\delta$. 选取 $s_n$ 使 $x>s_1>s_2>\cdots$，$s_n\to s$. 则

$$\begin{aligned}|\mu([s_n,t))|&=|f(t)-f(s_n)|\\&\leqslant|f(t)-f(x)|+|f(x)-f(s_n)|\end{aligned}$$

$$\leqslant \varepsilon(t-x)+\varepsilon(x-s_n)$$
$$=\varepsilon(t-s_n)<\varepsilon m(I)$$

并且因为 $I=\bigcup([s_n,t))$，得出 $|\mu(I)|\leqslant\varepsilon m(I)$. 于是(*a*)蕴涵着(*b*).

其次，假设(*b*)对 $A=0$ 成立. 选取 $\varepsilon>0$，且象在(*b*)内一样地选取 $\delta>0$. 如果 $s<x<t$ 和 $t-s<\delta$，选取 $s_n$ 使 $t-\delta<s_1<s_2<\cdots$，并且 $\lim s_n=s$. 则对所有充分大的 $n$

$$|\mu((s_n,t))|<\varepsilon(t-s_n)$$

因为 $[s,t)=\bigcap(s_n,t)$ 和

$$f(t)-f(s)=\mu([s,t))$$

由此得出

$$(3)\qquad |f(t)-f(s)|\leqslant\varepsilon|t-s|\qquad (s<x<t<s+\delta)$$

若(*b*)成立，则 $\mu(\{x\})=0$，这里 $\{x\}$ 是仅由 $x$ 所组成的集. 因此 $f$ 在点 $x$ 连续. 所以在(3)内，不是 $s$ 就是 $t$ 能被 $x$ 代替，我们便得出 $f'(x)=0$.

**8.2 定义** 定理 8.1 启发我们，$\mu$ 在 $x$ 的导数可以定义为当区间 $I$ 收缩至点 $x$ 时，商 $\dfrac{\mu(I)}{m(I)}$ 的极限. 当然，也能考虑商 $\mu(E)/m(E)$ 的极限，这里 $E$ 跑遍某一个另外的集族. 下面将不仅在 $R^1$ 上，而是在任一欧氏空间 $R^k$ 上做这些工作.

假设 $x\in R^k$. 对 $R^k$ 内的 Borel 集序列 $\{E_i\}$，若存在一个具有下列性质的数 $\alpha>0$：每一个 $E_i$ 在一个以 $x$ 为中心半径 $r_i>0$ 的开球 $B(x,r_i)$ 内，使得

$$(1)\qquad m(E_i)\geqslant\alpha m(B(x,r_i))\qquad (i=1,2,3,\cdots)$$

并且当 $i\to\infty$ 时，$r_i\to0$，就称 $\{E_i\}$ 良好地收缩于 $x$. (这里以及今后，$m$ 表示 $R^k$ 上的 Lebesgue 测度).

注意，这既不要求 $x\in E_i$，甚至也不要求 $x$ 在 $E_i$ 的闭包内. 条

件(1)是要求每一个 $E_i$ 必须占有 $x$ 的某个球形邻域的相当大的部分的定量叙述. 例如，直径趋于零的最长的棱比最短的棱至多大1000 倍的 $k$-胞腔的序列套是良好地收缩的.（在 $R^2$ 内)棱长分别为$\frac{1}{i}$和$\left(\frac{1}{i}\right)^2$的矩形序列套则不是良好地收缩的.

**8.3 定义** 若 $\mu$ 是 $R^k$ 上的复 Borel 测度，若 $x\in R^k$，$A$ 是一个复数，并且若

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\mu(E_i)}{m(E_i)}=A \tag{1}$$

对每一个良好地收缩于 $x$ 的序列 $\{E_i\}$ 成立，则称 $A$ 为 $\mu$ 在 $x$ 的导数，并且记以

$$(D\mu)(x)=A \tag{2}$$

一个更加完全的叙述是，$(D\mu)(x)$是 $\mu$ 在 $x$ 关于 Lebesgue 测度 $m$ 的导数.

这章的主要结果是定理 8.6，下面两个引理将在它的证明中用到.

**8.4 引理** 若 $\Omega$ 是 $R^k$ 内的开球族，其并是 $W$，并且若 $t<m(W)$，则 $\Omega$ 具有有限的不相交的子族 $\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}m(B_i)>3^{-k}t$$

**证明** 选取紧集 $K\subset W$，使 $m(K)>t$.（这用到 $m$ 的正则性.）根据紧性，$K$ 可以被 $\Omega$ 的有限多个元素所覆盖，比如说 $S_1$, $S_2,\cdots,S_p$. 我们可以把它们排列起来，使得它们的半径 $r(S_j)$ 对 $r=1,2,\cdots,p-1$ 满足 $r(S_j)\geqslant r(S_{j+1})$.

令 $B_1=S_1$. 把所有与 $B_1$ 相交且 $j>1$ 的那些 $S_j$ 删去. 设 $B_2=S_{i_2}$ 是余下的 $S_j$ 中的第一个(如果存在的话). 把所有的与 $B_2$ 相交且 $j>i_2$ 的那些 $S_j$ 删去. 设 $B_3=S_{i_3}$ 是余下的 $S_j$ 中的第一

个，只要可能，就进行下去。

这就给出了不相交的集族$\{B_1, \cdots, B_n\}$。

每一个删去的$S_j$是与某个$B_i$同心的其半径3倍于$B_i$之半径的球$\beta_i$的子集。于是$K \subset \beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_n$。由此得出

$$t < m(K) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(\beta_i) = 3^k \sum_{i=1}^{n} m(B_i)$$

**8.5 引理** 假设$\mu$是$R^k$上的正的Borel测度，它在紧集上是有限的。设$A$是Borel集，且$\mu(A)=0$。则存在一个集$A' \subset A$，使得

(*a*) $m(A-A')=0$;

(*b*) $(D\mu)(x)=0$, 对每个$x \in A'$成立。

**证明** 定义$A'$是所有满足

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))} = 0 \tag{1}$$

的那些$x \in A$的集。

[若(1)的极限存在，通常称为$\mu$在$x$的对称导数。回忆一下，$B(x,r)$是中心在$x$，半径为$r$的开球。]

对于$j=1,2,3,\cdots$，设$P_j$是所有满足

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))} > \frac{1}{j} \tag{2}$$

的那些$x \in A$的集。我们将要证明

$$m(P_j) = 0 \qquad (j=1,2,3,\cdots) \tag{3}$$

因为$A-A' = \bigcup P_j$，从(3)就可得出(*a*)。

固定$j$，固定$\varepsilon>0$。因为$\mu(A)=0$，存在一个开集$V \supset A$，且有$\mu(V)<\varepsilon$。每一个$x \in P_j$是一个开球$B_x \subset V$的中心，使得

$$m(B_x) < j\mu(B_x) \tag{4}$$

设$W$是这些$B_x$的并。选取$t<m(W)$。引理8.4指出$\{B_x: x \in P_j\}$

有不相交的子集族$\{B_{x_1},\cdots,B_{x_n}\}$，使得

$$t<3^k\sum_{i=1}^{n}m(B_{x_i})<3^kj\sum_{i=1}^{n}\mu(B_{x_i})$$
$$=3^kj\mu(B_{x_1}\cup B_{x_2}\cup\cdots\cup B_{x_n})<3^kj\mu(V)<3^kj\varepsilon$$

于是$m(W)\leqslant 3^kj\varepsilon$。因为$P_j\subset W$，而$\varepsilon$是任意的，看出$P_j$在Lebesgue测度任意小的开集内。因此$m$的完备性蕴涵着$P_j$是可测的，且$m(P_j)=0$。这就证明了(3)。因此证明了$(a)$。

为了证明$(b)$，固定$x\in A'$，并设$\{E_i\}$是一个良好地收缩于$x$的序列。根据定义8.2，存在开球$B(x,r_i)\supset E_i$，使得$r_i\to 0$，并且使得

$$(5)\qquad m(E_i)\geqslant \alpha m(B(x,r_i))$$

对所有的$i$和某个$\alpha>0$成立。因此

$$(6)\qquad \frac{\mu(E_i)}{m(E_i)}\leqslant\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\mu(B(x,r_i))}{m(B(x,r_i))}$$

因为(1)对每一个$x\in A'$成立，所以(6)证明了$(D\mu)(x)=0$。

**8.6 定理** 若$\mu$是$R^k$上的复Borel测度。则

$(a)$ $(D\mu)(x)$a.e.$[m]$存在，

$(b)$ $D\mu\in L^1(R^k)$，并且

$(c)$ 对每一个Borel集$E$，

$$\mu(E)=\mu_s(E)+\int_E(D\mu)(x)dx$$

这里$\mu_s\perp m$，以及$(D\mu_s)(x)=0$ a.e.$[m]$。

注意$(c)$是$\mu$关于$m$的Lebesgue分解。这就导致下列的系。

**系** (i) $\mu\perp m$，当且仅当$(D\mu)(x)=0$ a.e.$[m]$。

(ii) $\mu\ll m$，当且仅当

$$\mu(E)=\int_E(D\mu)(x)dx$$

对每一个Borel集$E$成立。在这种情况下，（作为商的极限所计算

的)导数 $D\mu$ a. e. $[m]$和 Radon-Nikodym 导数 $d\mu/dm$ 一致.

**证明** 由于 Lebesgue分解定理，分别对 $\mu\perp m$ 和对 $\mu\ll m$ 证明定理成立就够了. 同时仅考虑实的 $\mu$ 也就足够了.

若 $\mu\perp m$，并且 $\mu=\mu^+-\mu^-$ 是 $\mu$ 的 Jordan 分解，则 $\mu^+\perp m$，所以存在一个 Borel 集 $A$，具有 $\mu^+(A)=0$ 和 $m(A^c)=0$. 根据引理 8.5，$(D\mu^+)(x)=0$ a. e. $[m]$. 同样的讨论也证明$(D\mu^-)(x)=0$ a. e. $[m]$. 因此，$(D\mu)(x)=0$ a. e. $[m]$.

其次，假定 $\mu\ll m$ 和 $\mu$ 是实的.

根据 Radon-Nikodym 定理，存在一个实 Borel 函数

$$f\in L^1(R^k)$$

使得

(1)
$$\mu(E)=\int_E f(x)dx$$

对每一个 Borel 集 $E$ 成立. 因此，从我们现在将要证明的等式

(2)
$$(D\mu)(x)=f(x)\qquad (\text{a. e. }[m])$$

可得出定理的结论.

将每个有理数 $r$ 对应于集

(3)
$$A_r=\{x:f(x)<r\},\quad B_r=\{x:f(x)\geq r\}$$

并用

(4)
$$\lambda_r(E)=\int_{E\cap B_r}(f(x)-r)dx$$

定义正的 Borel 测度 $\lambda_r$. 因为 $\lambda_r(A_r)=0$，引理 8.5 指出存在一个集 $A_r'\subset A_r$，使得 $m(A_r-A_r')=0$，并且，若 $x\in A_r'$

(5)
$$(D\lambda_r)(x)=0$$

令 $Y=\bigcup_r(A_r-A_r')$. 则 $m(Y)=0$. 挑选 $Y$ 以外的某个 $x$，设 $\{E_i\}$ 良好地收缩于 $x$，并选择 $r>f(x)$. 则 $x\in A_r$. 因为

$$\mu(E)-rm(E)=\int_E(f(y)-r)dy\leq\lambda_r(E)$$

我们有

$$(6)\qquad \frac{\mu(E_i)}{m(E_i)}\leqslant\frac{\lambda_r(E_i)}{m(E_i)}+r\qquad(i=1,2,3,\cdots)$$

因为 $x\notin Y$，有 $x\in A'_r$。因此(5)和(6)给出

$$(7)\qquad \limsup_{i\to\infty}\frac{\mu(E_i)}{m(E_i)}\leqslant r$$

这对大于 $f(x)$ 的每一个有理数 $r$，(7)式都是正确的。因此

$$(8)\qquad \limsup_{i\to\infty}\frac{\mu(E_i)}{m(E_i)}\leqslant f(x)$$

现在我们已经证明了：几乎对每一个 $x\in R^k$ 和每一个良好地收缩于 $x$ 的序列 $\{E_i\}$，(8)式都能满足。

如果我们用 $-\mu$ 代替 $\mu$，因之用 $-f$ 代替 $f$，便得出几乎对每一个 $x\in R^k$ 和每一个良好地收缩于 $x$ 的序列 $\{E_i\}$ 满足

$$(9)\qquad \liminf_{i\to\infty}\frac{\mu(E_i)}{m(E_i)}\geqslant f(x)$$

因为(8)和(9)给出(2)，故定理证明完毕。

**8.7 评注** 通过考察定理 8.6 的证明将会显示出，当 $\mu$ 仅仅定义在某个开集 $V\subset R^k$ 内的 Borel 集上时，定理 8.6 显然也是成立的。（因此，这个结论当然仅在 $V$ 内成立。）或者依照实际情况，我们对所有的 $E\subset V^c$ 简单地定义 $\mu(E)=0$，并且应用定理。

若 $f\in L^1(R^k)$ 和

$$(1)\qquad \mu(E)=\int_E f(x)dx$$

称 $\mu$ 为 $f$ 的不定积分是合理的。用这样的术语，定理 8.6 断定一个不定积分的导数 a.e.[$m$]等于它的被积函数，并且断定每一个 $\mu\ll m$ 是其导数的不定积分。

不定积分的可微性可以解释为一类 Lebesgue 可积函数的“平均连续性”。因为若(1)成立，$(D\mu)(x_0)=f(x_0)$ 的断言无非是说，

当 $E$ 良好地收缩于 $x$ 时，

(2) $$\frac{1}{m(E)}\int_E f(x)dx \to f(x_0)$$

或者说

(3) $$\frac{1}{m(E)}\int_E \{f(x)-f(x_0)\}dx \to 0$$

(2)的左边是 $f$ 在靠近 $x_0$ 的很小的集 $E$ 上的平均；(3)的左边是 $f-f(x_0)$ 在 $E$ 上的平均.

现在(3)能归结为消除在几乎所有点 $x_0$ 的很小的邻域内由 $f-f(x_0)$ 的符号的改变所引起的影响；或者一个更强的结论可能是正确的，即，对几乎所有的 $x_0$，$|f-f(x_0)|$ 的平均在 $x_0$ 的很小的邻域内实际上变得很小. 这个更强的结论事实上是正确的：

**8.8 定理** 假设 $f\in L^1(R^k)$. 定义 $f$ 的"Lebesgue 集"$L_f$ 为所有 $x_0\in R^k$ 的集，使得

(1) $$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{m(E_i)}\int_{E_i}|f(x)-f(x_0)|dx=0$$

对每一个良好地收缩于 $x_0$ 的序列 $\{E_i\}$ 成立. 则几乎所有的 $x_0\in R^k$ 属于 $L_f$.

**证明** 设 $S$ 是复平面内的可数稠密集. 对 $r\in S$，定义

(2) $$\mu_r(E)=\int_E|f(x)-r|dx$$

定理 8.6 指出

(3) $$(D\mu_r)(x_0)=|f(x_0)-r|$$

对几乎所有的 $x_0$ 成立. 设 $Y_r$ 是例外集. 令 $Y=\bigcup Y_r$，则 $m(Y)=0$.

若 $x_0\notin Y$，$\{E_i\}$ 良好地收缩于 $x_0$，且 $\varepsilon>0$. 则存在 $r\in S$ 使 $|f(x_0)-r|<\varepsilon$；因此，$|f(x)-f(x_0)|<|f(x)-r|+\varepsilon$，并且

$$(4) \qquad \frac{1}{m(E_i)}\int_{E_i}|f(x)-f(x_0)|dx<\frac{\mu_r(E_i)}{m(E_i)}+\varepsilon$$

因为 $x_0 \notin Y$,(3)成立,所以对充分大的 $i$,(4)的左边小于 $2\varepsilon$. 这就对每一个 $x_0 \notin Y$ 证明了(1)式,从而完成了定理的证明.

把我们的注意限制于良好地收缩序列的特殊形式有时是有好处的. 我们现在就来考虑这样一种情况.

**8.9 定义** 设 $\mu$ 是 $R^k$ 上的实 Borel 测度. 对于 $x \in R^k$ 和 $n=1,2,3,\cdots$,设 $\Delta_n(x)$是商 $\mu(C)/m(C)$的上确界, 这里 $C$ 取遍所有使得 $x\in C$,其棱平行坐标轴,并且棱长小于$\frac{1}{n}$的 $R^k$ 内的开立方体. 定义

$$(\mathscr{D}^Q\mu)(x)=\lim_{n\to\infty}\Delta_n(x)$$

因为 $\Delta_n \geqslant \Delta_{n+1}$,对每一个 $x\in R^k$, 这个极限作为$[-\infty,\infty]$内的一个数是存在的.

定义$(\mathscr{D}_Q\mu)(x)$, 只要在上一段中用"下确界"代替"上确界"即可.

数$(\mathscr{D}^Q\mu)(x)$和$(\mathscr{D}_Q\mu)(x)$ 可以称为 $\mu$ 在 $x$ 点的上"立方体导数"和下"立方体导数". 注意, 当 $k=1$ 时, 立方体 $C$ 恰好是在第 8.1 节所出现的区间 $I$.

容易看出,$\mathscr{D}^Q\mu$ 和 $\mathscr{D}_Q\mu$ 是 Borel 函数:若 $\Delta_n(x)>\alpha$, 则对某一个 $C$ (棱长$<1/n$)使得 $x\in C$, $\mu(C)>\alpha m(C)$成立;显然对在这个 $C$ 内的所有的 $y$,$\Delta_n(y)>\alpha$;于是 $\Delta_n$ 是下半连续的, 所以 $\mathscr{D}^Q\mu$ 是一个 Borel 函数. 同样的论证方法适用于 $\mathscr{D}_Q\mu$.

**8.10 定理** 假设 $\mu$ 是 $R^1$ 上的实 Borel 测度,$\mu\geqslant 0$ 并且 $\mu\perp m$,则

$$(\mathscr{D}_Q\mu)(x)=\infty \qquad \text{a.e.}[\mu]$$

这个定理补充了断定$(\mathscr{D}\mu)(x)=0$a.e.$[m]$的定理 8.6.

**证明** 固定 $\varepsilon>0$. 因为 $\mu\perp m$, 故 $\mu$ 集中在一个具有 $m(V)<\varepsilon$ 的开集 $V$ 上. 对 $n=1,2,3,\cdots$, 定义 $E_n$ 为所有使得 $(\bar{\mathscr{D}}_Q\mu)(x)<n$ 的那些 $x\in V$ 的集. 设 $K$ 是 $E_n$ 的紧子集. 假如能证明 $\mu(K)=0$, 则 $\mu$ 的正则性(定理 2.18)蕴涵着 $\mu(E_n)=0$ 对每一个 $n$ 成立. 这就给出所要的结果.

每一个 $x\in K$ 在一个区间 $I_x\subset V$ 内, 使得 $\mu(I_x)<n\cdot m(I_x)$ 成立. 由于紧性, $K$ 被有限多个这样的线段 $I_{x_i}$ 所覆盖. 若 $R^1$ 的某个点在三个区间内, 这些区间之一必在另外两个区间的并中, 并且可以去掉它而不改变其并. 用这样的方法, 我们能删去多余的区间, 并且能达到没有一点在两个以上的区间 $I_{x_i}$ 内. 这时

$$\mu(K)\leqslant\mu\left(\bigcup_i I_{x_i}\right)\leqslant\sum_i\mu(I_{x_i})<n\sum_i m(I_{x_i})$$

$$\leqslant 2n\cdot m\left(\bigcup_i I_{x_i}\right)\leqslant 2n\cdot m(V)<2n\varepsilon$$

因为 $\varepsilon$ 是任意的, 所以 $\mu(K)=0$. 证明完毕.

注意, 在上面的证明中用到直线的一个很特殊的性质. 习题 3 指出, 若 $k>1$, 定理 8.10 事实上是不成立的. 然而, 下面弱一点的结果是正确的, 它的系在定理 8.26 的证明中将用到.

**8.11 定理** 假设 $\mu$ 是 $R^k$ 上的实 Borel 测度, $\mu\geqslant 0$, 并且 $\mu\perp m$. 则

$$(\mathscr{D}^Q\mu)(x)=\infty \qquad \text{a.e.}[\mu]$$

**系** 若 $\mu\geqslant 0$, 且 $(\mathscr{D}^Q\mu)(x)<\infty$ 对每个 $x\in R^k$ 成立, 则 $\mu\ll m$.

**证明** 因为 $\mu(R^k)<\infty$, 容易看出, 在某一 $x\in R^k$ 上 $(\mathscr{D}^Q\mu)(x)<\infty$ 当且仅当存在一个整数 $j(x)$, 使得 $\mu(C)<j(x)m(C)$ 对每一个包含 $x$ 的开立方体 $C$ (其棱平行于坐标轴)成立.

对于 $j=1,2,3,\cdots$, 设 $E_j$ 是所有使得 $\mu(C)<jm(C)$ 对每一个包含 $x$ 的 $C$ 成立的那些 $x\in R^k$ 的集. 注意每一个 $E_j$ 是一个闭

集.

选取 $\varepsilon>0$. 因为 $\mu\perp m$, $\mu$ 是集中在某个 $m(V)<\varepsilon$ 的开集 $V$ 上. 由于是开集, 象第 2.19 节一样, $V$ 是可数多个不相交的单元的并.

固定 $j$. 设 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ 是上面那些与 $V\cap E_j$ 相交的单元. 因为每一个 $Q_n$ 是开立方体 $C$ 的递降序列的交, $E_j$ 的定义指出 $\mu(Q_n)\leqslant jm(Q_n)$ 对每一个 $n$ 成立. 因此

$$\mu(E_j)=\mu(V\cap E_j)\leqslant\mu\left(\bigcup_n Q_n\right)=\sum_n\mu(Q_n)$$

$$\leqslant j\sum_n m(Q_n)=jm\left(\bigcup_n Q_n\right)\leqslant jm(V)<j\varepsilon$$

因为 $\varepsilon$ 是任意的, $\mu(E_j)=0$. 根据此证明的第一段, 当且仅当 $x\in\bigcup E_j$ 时, $(\mathscr{D}^Q\mu)(x)<\infty$. 但 $\mu(\bigcup E_j)=0$. 这就完成了定理的证明.

## 有界变差函数

**8.12 定义** 我们将每一个 $R^1$ 上的复函数 $f$ 都对应于它的全变差函数 $T_f$, 用

(1) $$T_f(x)=\sup\sum_{j=1}^{N}|f(x_j)-f(x_{j-1})| \qquad (-\infty<x<\infty)$$

定义, 这里上确界是对所有的 $N$ 和对所有使得

(2) $$-\infty<x_0<x_1<\cdots<x_N=x$$

的 $\{x_j\}$ 的可能选择而取的.

一般地,

(3) $$0\leqslant T_f(x)\leqslant T_f(y)\leqslant\infty \qquad (x<y)$$

若 $T_f$ 是有界函数, 则(3)蕴涵着

(4) $$V(f)=\lim_{x\to\infty}T_f(x)$$

存在并且是有限的. 在这种情况下,我们称 $f$ 是有界变差的,并称 $V(f)$ 为 $f$ 的全变差;所有有界变差函数 $f$ 的类记为 $BV$.

若 $-\infty<x\leqslant\infty$, 如果对应于每一个 $\varepsilon>0$, 存在一个实数 $\alpha<x$, 使得

(5) $$\alpha<t<x \text{ 蕴涵着 } |f(t)-f(x^-)|<\varepsilon$$

则 $f$ 称为在 $x$ 点具有左极限,记以 $f(x^-)$, 若 $f(x^-)=f(x)$, 则 $f$ 称为在 $x$ 点左连续.

右极限和从右的连续性在 $[-\infty,\infty)$ 上类似地定义.

我们称函数 $f\in BV$ 为正规化的,若当 $x\to-\infty$ 时, $f(x)\to0$, 并且 $f$ 在 $R^1$ 的每一点上是左连续的. 这些函数的类记为 $NBV$.

上面仅仅考虑了定义在 $R^1$ 全体上的函数. 实际上我们也能同样地考虑定义在任一线段或 $R^1$ 上的区间上的函数. 无论是上面的定义或是下面的定理,在任何主要方面都不会有影响.

**8.13 定理**

(a) 若 $f\in BV$ 且 $x<y$, 则

$$|f(y)-f(x)|\leqslant T_f(y)-T_f(x)$$

(b) 若 $f\in BV$, 则 $f(x^-)$ 在 $(-\infty,\infty]$ 的每一点存在, $f(x^+)$ 在 $[-\infty,\infty)$ 的每一点存在, 使 $f$ 不连续的那些点的集至多是可数的,并且存在唯一的一个常数 $c$ 和唯一的一个函数 $g\in NBV$, 使得

$$f(x)=c+g(x)$$

在 $f$ 的所有的连续点上成立. 同时 $V(g)\leqslant V(f)$.

(c) 若 $f\in NBV$, 则 $T_f\in NBV$.

**证明**

(a) 若 $x<y$ 和 $\varepsilon>0$, 则存在点 $x_0<x_1<\cdots<x_n=x$, 使得

(1) $$\Sigma|f(x_i)-f(x_{i-1})|>T_f(x)-\varepsilon$$

因此

$$T_f(y) \geqslant |f(y)-f(x)| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$> |f(y)-f(x)| + T_f(x) - \varepsilon$$

这就证明了$(a)$.

$(b)$ 从$(a)$得出，若$\{x_i\}$是一个序列，对这样的$\{x_i\}$，$\{T_f(x_i)\}$是一个 Cauchy 序列. 则$\{f(x_i)\}$也是一个 Cauchy 序列. 因为单调函数(具体地说 $T_f$)在所有的点上具有左极限和右极限，并且因为它们至多有可数个不连续点，所以同样的结论对 $f$ 也成立. 因此我们能定义

(2) $$c = \lim_{t \to -\infty} f(t),\quad g(x) = f(x^-) - c \quad (x \in R^1)$$

显然，当 $x \to -\infty$ 时，$g(x) \to 0$. 若 $x \in R^1$ 和 $\varepsilon > 0$，则存在一个 $\alpha < x$，使得 $|f(t)-f(x^-)| < \varepsilon$ 对所有 $t \in (\alpha, x)$ 成立. 因为 $f(t^-)$ 是当 $\alpha < s < t$ 时所有函数值 $f(s)$ 的集的极限点，这就得出，当 $\alpha < t < x$ 时，$|f(t^-)-f(x^-)| \leqslant \varepsilon$ 成立. 于是 $g$ 是左连续的.

若 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 和 $\delta > 0$，则

(3) $$\sum_{i=1}^{n} |g(x_i)-g(x_{i-1})| = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i-\delta)-f(x_{i-1}-\delta)|$$

因为(3)式右边的和没有一个超过 $V(f)$，有 $V(g) \leqslant V(f)$. 特别 $g \in BV$.

除唯一性外，这就证明了$(b)$. 但是，若两个左连续函数在 $R^1$ 的稠密子集上一致，则它们是恒等的. 现在就容易推出 $g$ 的唯一性了.

$(c)$ 若 $f \in NBV$. 固定 $x \in R^1$，$\varepsilon > 0$，选择点

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x$$

使(1)成立. 若 $t_0 < \cdots < t_N = x_0$，则

(4) $$T_f(x) \geqslant \sum_{j=1}^{N} |f(t_j)-f(t_{j-1})| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

根据(1),(4)的第一个和小于 $\varepsilon$,因此 $T_f(x_0)\leqslant\varepsilon$, 这就是说当 $t\to-\infty$时,$T_f(t)\to 0$。

最后,选取 $t$ 使 $x_{n-1}<t<x_n$. 则

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{n-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|f(t)-f(x_{n-1})|\leqslant T_f(t)\leqslant T_f(x^-)$$

$$\leqslant T_f(x)$$

如果我们令 $t\to x_n=x$,因为 $f(x)=f(x^-)$,(5)的左边趋于(1)的左边,这就给出了 $T_f(x)-\varepsilon<T_f(x^-)$. 与(5)比较,现在证明了

$$T_f(x^-)=T_f(x),$$

于是证明完毕。

下面的定理阐明了函数类 $NBV$ 的重要性. 请注意观察 $f$ 和 $\mu$ 之间如何把 $f$ 的全变差和 $\mu$ 的全变差联系起来的,并且看到 Lebesgue 测度的存在性在($b$)内是如何用于构造 $\mu$ 的。

**8.14 定理**

($a$) 若 $\mu$ 是 $R^1$ 上的复 Borel 测度,并且,若

$$(1)\qquad f(x)=\mu((-\infty,x))\qquad (x\in R^1)$$

则 $f\in NBV$.

($b$) 反之,对每一个 $f\in NBV$,对应唯一的一个复 Borel 测度 $\mu$,使得(1)成立. 对于这个 $\mu$

$$(2)\qquad T_f(x)=|\mu|((-\infty,x))\qquad (x\in R^1)$$

($c$) 若(1)成立, 则 $f$ 在 $\mu(\{x\})=0$ 的这些点 $x$ 上确实是连续的.

**证明** 如果 $f$ 是由(1)定义, 并且 $x_1<x_2<\cdots<x_n\to x$, 则由于

$$(3)\qquad (-\infty,x)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,x_n)$$

$f(x_n)\to f(x)$. 于是 $f$ 是左连续的. 若 $x_n\to-\infty$, 则 $\bigcap(-\infty,x_n)$

$=\varnothing$，根据定理 1.19($e$)，所以当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)\to 0$。若 $x_0<x_1<\cdots<x_n=x$，则

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}|\mu([x_{i-1},x_i))|$$
$$\leqslant|\mu|((-\infty,x))$$

所以

$$T_f(x)\leqslant|\mu|((-\infty,x)) \tag{4}$$

这就证明了($a$)。

在($b$)的证明中，首先假设 $f\in NBV$，且 $f$ 是不减的，$f\neq 0$。对每一 $x\in R^1$，对应一个集 $\Phi[x]$ 如下：如果 $f$ 在 $x$ 点连续，$\Phi[x]$ 是点 $f(x)$；如果 $f(x^+)>f(x)$，则 $\Phi[x]$ 是区间 $[f(x),\ f(x^+)]$。若 $E\subset R^1$，设 $\Phi(E)$ 是所有对 $x\in E$ 的集 $\Phi[x]$ 的并。我们断言，定义

$$\mu(E)=m(\Phi(E)) \tag{5}$$

给出一个满足(1)的测度；这里 $m$ 是 $R^1$ 上的 Lebesgue 测度。

令 $J=\Phi[R^1]$，则 $J$ 是一个 1-胞腔(即一个包括端点或不包括端点的有界区间)。至多存在可数多个点 $y_i\in J$，使得 $f^{-1}(y)$ 由多于一个点组成。对于这些 $y_i$，$f^{-1}(y_i)$ 是一个 1-胞腔。

设 $\Sigma$ 是所有使得 $\Phi[E]$ 是 Borel 集的那些 $E\subset R^1$ 的类。若 $E$ 是一个 1-胞腔，$\Phi[E]$ 也是 1-胞腔。因此 $E\in\Sigma$。对任一 $E\subset R^1$，$\Phi[E^c]$ 是 $J-\Phi[E]$ 加上一个至多可数的集($\{y_i\}$ 的子集)的并；于是 $E\in\Sigma$ 蕴涵着 $E^c\in\Sigma$。其次，

$$\Phi[E_1\cup E_2\cup\cdots]=\Phi[E_1]\cup\Phi[E_2]\cup\cdots$$

这就证明了 $\Sigma$ 是包含所有区间的 $\sigma$-代数，因此包含了所有的 Borel 集，所以对所有的 Borel 集 $E$，$m(\Phi[E])$ 是确定的。此外，$\mu$ 是可数可加的，因为，如果 $\{E_i\}$ 是不相交的 $R^1$ 的 Borel 集的类，则除去对于可数集 $\{y_i\}$ 外，$\{\Phi[E_i]\}$ 是不相交的。因为对每一个可数集 $E$，$m(E)=0$，所以这并不影响 $\mu$ 的可数可加性。

于是(5)定义一个 Borel 测度. 因为 $\Phi[(-\infty, x)]$是端点为 0 和 $f(x)$的 1-胞腔,(5)式表明(1)成立.

现在转向($b$)的一般情况. 若 $f\in NBV$,则 $f=u+iv$,$u$和 $v$ 是实函数,$u\in NBV$. 根据定理 8.13($c$),$T_u\in NBV$. 令

$$(6)\qquad u_1=\frac{1}{2}(T_u+u),\qquad u_2=\frac{1}{2}(T_u-u)$$

从定理 8.13($a$)容易得出,$u_1$ 和 $u_2\in NBV$,并且它们是不减的. 前面的构造 $u_1$ 和 $u_2$ 对应于测度 $\mu_1$ 和 $\mu_2$. 与 $u=u_1-u_2$ 相对应的将是 $\mu_1-\mu_2$. 若我们类似地处理 $v$,并且综合这两个结果,我们获得在(1)成立的意义下与 $f$ 对应的测度 $\mu$.

若两个正则测度(注意定理 2.18)在所有的形如$(-\infty, x)$的区间上是一致的, 则它们在所有的形如$[\alpha,\beta)$的 1-胞腔上是一致的. 因而在所有的开集上一致,因此在所有的 Borel 集上一致. 这就证明了($b$)的断言的唯一性.

最后,设 $\lambda$ 是在同样方式下与 $T_f$ 相对应的测度. 若$\alpha<\beta$,则

$$(7)\qquad \mu([\alpha,\beta))=f(\beta)-f(\alpha),\quad \lambda([\alpha,\beta))=T_f(\beta)-T_f(\alpha)$$

因此,若 $E=[\alpha,\beta)$,不等式

$$(8)\qquad |\mu(E)|\leqslant\lambda(E)$$

成立. 因为在 $R^1$ 内的每一个开集是可数个不相交的这种 1-胞腔的并,(8)对每一个开集成立. 因此(8)对每一个 Borel 集成立. $\mu$ 的全变差$|\mu|$的定义现在蕴涵着$|\mu|\leqslant\lambda$. 特别

$$(9)\qquad |\mu|((-\infty,x))\leqslant\lambda((-\infty,x))=T_f(x)$$

现在从(4)和(9)就得出(2).

($c$) 的证明留作练习.

## 点函数的微分法

**8.15 绝对连续函数** 一个 $R^1$ 上的复函数 $f$, 若对每一个

$\varepsilon>0$，存在一个对应的 $\delta>0$，当$(\alpha_1,\beta_1),\cdots,(\alpha_N,\beta_N)$是不相交的区间时，使得

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{N}(\beta_i-\alpha_i)<\delta \text{ 蕴涵着 } \sum_{i=1}^{N}|f(\beta_i)-f(\alpha_i)|<\varepsilon$$

则称 $f$ 为绝对连续。

请注意每一个绝对连续的函数是一致连续的（取 $N=1$）。任一绝对连续函数限制在有界区间上是一有界变差函数。然而，若 $f(x)=\sin x$ 或者 $f(x)=x+|x|$，则 $f(x)$是绝对连续的，但 $f\notin BV$。

术语"绝对连续"的两个含义具有如下关系：

**8.16 定理** 假设 $f\in NBV$. $\mu$ 是如在定理8.14一样与 $f$ 相对应，则 $\mu\ll m$ 当且仅当 $f$ 是绝对连续的。

（这里 $m$ 表示 $R^1$ 上的 Lebesgue 测度。）

**证明** 假设 $f$ 是绝对连续的。设 $E$ 是使得 $m(E)=0$ 的 Borel 集。选取 $\varepsilon>0$，并按照 8.15 节那样选择 $\delta>0$。$\mu$ 的正则性表明存在开集 $W_1\supset W_2\supset\cdots\supset E$，使得 $m(W_1)<\delta$ 和当 $n\to\infty$时，$\mu(W_n)\to\mu(E)$。因为$W_n$是不相交的区间 $I_j=(\alpha_j,\beta_j)$的并，并且

$$\Sigma(\beta_j-\alpha_j)<\delta,$$

得出

$$|\mu(W_n)|\leqslant\sum_j|\mu(I_j)|=\sum_j|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|\leqslant\varepsilon$$

因此，$\mu(E)=0$。这就证明了 $\mu\ll m$。

从定理 6.11 可得出逆命题。

我们现在能够把前面集函数微分法的结果翻译成点函数语言了。定理 8.17 到 8.19 是由 Lebesgue 所提出的经典的结果。定理 8.18 和 8.21 推广了微积分的基本定理。

**8.17 定理** 如果 $g\in L^1(R^1)$，且

$$(1)\qquad f(x)=\int_{-\infty}^{x}g(t)\,dt\qquad(-\infty<x<\infty)$$

则 $f\in NBV$，$f$ 是绝对连续的，并且

(2) $$f'(x)=g(x) \quad \text{a. e. } [m]$$

**证明** 对每一个 Borel 集 $E$ 定义

(3) $$\mu(E)=\int_E g(t)dt$$

则 $f(x)=\mu((-\infty,x))$ 和 $\mu\ll m$。根据定理 8.14，$f\in NBV$；根据 8.16，$f$ 是绝对连续的；定理 8.1 和 8.6 蕴涵着

(4) $$f'(x)=(D\mu)(x)=g(x) \quad \text{a. e. } [m]$$

**8.18 定理** 若 $f\in NBV$，则 $f$ a. e. $[m]$ 可微，$f'\in L^1(R^1)$，并且存在一个函数 $f_s\in NBV$，具有 $f'_s(x)=0$ a. e. $[m]$，使得

(1) $$f(x)=f_s(x)+\int_{-\infty}^{x} f'(t)dt \quad (-\infty<x<\infty)$$

$f_s=0$ 当且仅当 $f$ 是绝对连续；若 $f$ 是不减的，$f_s$ 也是不减的。

我们称 $f_s$ 为 $f$ 的奇异部分。存在一个不恒为常数的连续的奇异函数，这一点也许是出乎意料的，在 8.20($b$) 这一节将给出一些例子。象应用于测度一样，“奇异”这个字具有它的在这种现象上的起源。

**证明** 根据定理 8.14，存在一个 $R^1$ 上的复测度 $\mu$，使得 $\mu((-\infty,x))=f(x)$。根据定理 8.6，

(2) $$\mu(E)=\mu_s(E)+\int_E (D\mu)(t)dt$$

令

(3) $$f_s(x)=\mu_s((-\infty,x)) \quad (-\infty<x<\infty)$$

定理 8.6 和 8.1 表明 $f'_s(x)=0$ a. e. $[m]$ 和

$$f'(x)=(D\mu)(x) \quad \text{a. e. } [m]$$

因此，若我们取 $E=(-\infty,x)$，就从(2)得出(1)。

根据定理 8.16，当且仅当 $\mu\ll m$，即当且仅当 $\mu_s=0$ 时，$f$ 是绝对连续的。

最后，若 $f$ 是不减的，则 $\mu\geq 0$，因此 $\mu_s\geq 0$，从而 $f_s$ 是不减的.

**8.19 定理** 如果 $f\in BV$，则 $f$ 是 a.e.$[m]$ 可微的，且

$$f'\in L^1(R^1).$$

**证明** 根据定理 8.13，存在一个 $g\in NBV$，使得

$$f(x)=g(x)+c$$

在所有的 $f$ 的连续点上成立. 将定理 8.18 应用于 $g$.

因此下面引理（令 $h=f-g$ 时）蕴涵着本定理：

**引理** 如果 $h\in BV$，并且除开一个至多是可数的集之外，$h(x)=0$. 则 $h'(x)=0$ a.e.

为了证明引理，设 $S=\{x_i\}$ 是至多可数的集. 在这些点上，$h(x_i)=c_i\neq 0$. 因为 $h\in BV$，容易看出 $\Sigma|c_i|<\infty$. 固定 $k$，设 $A_k$ 是所有 $x\notin S$ 的集，在这些 $x$ 上，

$$\left|\frac{h(y)-h(x)}{y-x}\right|>\frac{1}{k} \tag{1}$$

对无穷多个 $y$ 成立. 于是 $x\in A_k$ 当且仅当 $|x-x_i|<k|c_i|$ 对无穷多个 $i$ 成立. 若 $J_i$ 是中心在 $x_i$ 长度为 $2k|c_i|$ 的区间，于是得出

$$\Sigma m(J_i)=2k\Sigma|c_i|<\infty \tag{2}$$

根据定理 1.41，因此 $m(A_k)=0$，对 $k=1,2,3,\cdots$ 成立.

但如果 $x\notin S\cup A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots$，则 $h'(x)=0$. 这就完成了证明.

习题 5 和 6 与这个引理有关.

**8.20 例** 上面的定理指出：方程

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt \tag{1}$$

（在这个方程的右边是一个 Lebesgue 积分）当且仅当 $f$ 是在 $[a,b]$ 上是绝对连续时(1)对某个区间 $[a,b]$ 内的所有的 $x$ 成立. 人们可能会问，$f'$ 的存在性是否蕴涵着 $f$ 的绝对连续性？问题的这一

提法是不够严格的．我们将给出两个例子说明(1)为什么会不成立，然后给出一个定理，它从另一些充分条件来推出(1)式．

(a) 当 $x\neq 0$ 时，令 $f(x)=x^2\sin(x^{-2})$，$f(0)=0$．则 $f$ 在每一点是可微的，但

$$\int_0^1 |f'(t)|\,dt=\infty \tag{2}$$

所以 $f'\notin L^1$．同时在 $[0,1]$ 上，$f\notin BV$．

若我们把(1)中的积分（用$[0,1]$代替$[a,b]$）看作在$[\varepsilon,1]$上的积分当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限，则对这个 $f$，(1)式还是成立的．

在这一类取极限过程不能使用的地方可能会出现更加复杂的情况．有一种由 Denjoy 和 Perron（参看[18]，[28]）作出的积分过程，它是这样设计的，使得 $f$ 在每一点都可微时，(1)式成立．这些过程却不具备由 $f$ 的可积性能推出 $|f|$ 的可积性这个性质，所以在分析中并不起多大作用．

(b) 假设 $f$ 在$[a,b]$上连续，$f$ 在$[a,b]$的几乎每一点是可微的，并且在$[a,b]$上 $f'\in L^1$．这些假定蕴涵着(1)成立吗？

回答：否．

选取 $\{\delta_n\}$ 使得 $1=\delta_0>\delta_1>\delta_2>\cdots$，$\delta_n\to 0$．令 $E_0=[0,1]$．假定 $n\geq 0$ 并构造 $E_n$，使 $E_n$ 是 $2^n$ 个不相交的每一个长为 $2^{-n}\delta_n$ 的闭区间的并．在这 $2^n$ 个区间的每一个的中心去掉一个线段，使余下的 $2^{n+1}$ 个区间的每一个具有长度 $2^{-n-1}\delta_{n+1}$．（这是可能的，因为 $\delta_{n+1}<\delta_n$．）并设 $E_{n+1}$ 是这 $2^{n+1}$ 个区间的并．则 $E_1\supset E_2\supset\cdots$，$m(E_n)=\delta_n$，并且，若

$$E=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \tag{3}$$

则 $E$ 是紧的，且 $m(E)=0$．（事实上，$E$ 是完全集．）令

(4) $$g_n=\delta_n^{-1}\chi_{E_n} \text{ 和 } f_n(x)=\int_0^x g_n(t)dt \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

则 $f_n(0)=0, f_n(1)=1$，且每一个 $f_n$ 是单调函数，它在 $E_n$ 的余集的每一个线段上是常数。若 $I$ 是其并为 $E_n$ 的 $2^n$ 个区间之一，则

(5) $$\int_I g_n(t)dt=\int_I g_{n+1}(t)dt=2^{-n}$$

从(5)得出

(6) $$f_{n+1}(x)=f_n(x) \qquad (x\notin E_n)$$

和

(7) $$|f_n(x)-f_{n+1}(x)|\leqslant\int_I |g_n-g_{n+1}|<2^{-n+1} \quad (x\in E_n)$$

因此$\{f_n\}$一致收敛于一个连续单调函数 $f$，使 $f(0)=0, f(1)=1$，且对所有的 $x\notin E, f'(x)=0$。因为 $m(E)=0$，有 $f'=0$ a.e.

于是(1)式不成立。附带地，现在我们已经构造了一个在定理 8.18 的叙述之后所定义的连续奇异函数的例子。

若 $\delta_n=(2/3)^n$，集 $E$ 就是 Cantor 三分集。

**8.21 定理** 假设 $f$ 是$[a,b]$上的实函数，它在$[a,b]$的每一点是可微的。假定在$[a,b]$上 $f'\in L^1$，则

(1) $$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

注意可微性在$[a,b]$的每一点都假定是具备的。

**证明** 显然对 $x=b$ 证明结论成立就足够了。固定 $\varepsilon>0$。定理 2.24 保证存在$[a,b]$上的一个下半连续函数 $g$，使得 $g>f'$，且

(2) $$\int_a^b g(t)dt<\int_a^b f'(t)dt+\varepsilon$$

确实，定理 2.24 仅给出 $g\geqslant f'$，但因为 $m([a,b])<\infty$，我们能在不影响(2)的前提下加一个小的常数于 $g$ 上。对于任一 $\eta>0$，定义

(3) $$F_\eta(x)=\int_a^x g(t)dt-f(x)+f(a)+\eta(x-a)$$
$$(a\leqslant x\leqslant b)$$

暂时保持 $\eta$ 固定。因为 $g$ 是下半连续的，且 $g(x)>f'(x)$，对每一个 $x\in[a,b]$，存在对应的 $\delta_x>0$，使得

(4) $$g(t)>f'(x) \quad 和 \quad \frac{f(t)-f(x)}{t-x}<f'(x)+\eta$$

对所有的 $t\in(x,x+\delta_x)$成立。对于任一这样的 $t$，因此有

$$\begin{aligned}F_\eta(t)-F_\eta(x)&=\int_x^t g(s)ds-[f(t)-f(x)]+\eta(t-x)\\&>(t-x)f'(x)-(t-x)[f'(x)+\eta]+\eta(t-x)\\&=0\end{aligned}$$

因为 $F_\eta(a)=0$ 而 $F_\eta$ 是连续的，所以存在一个满足 $F_\eta(x)=0$ 的最大的点 $x\in[a,b]$。若 $x<b$，上面的计算蕴涵着 $F_\eta(t)>0$ 对 $t\in(x,b]$ 成立。在任何情况下，$F_\eta(b)\geqslant 0$。因为这个结论对每一个 $\eta>0$成立，所以(2)和(3)现在给出

(5) $$f(b)-f(a)\leqslant\int_a^b g(t)dt<\int_a^b f'(t)dt+\varepsilon$$

因为 $\varepsilon$ 是任意的，得出

(6) $$f(b)-f(a)\leqslant\int_a^b f'(t)dt$$

若 $f$ 满足定理的假设，则 $-f$ 也满足定理的假设；因此用 $-f$ 代替 $f$，(6)式成立，并且这两个不等式一起给出(1)式。

## 可微变换

**8.22 定义** 对任一$x=(\xi_1,\cdots,\xi_k)\in R^k$，对应于一个函数

(1) $$\|x\|=\max(|\xi_1|,\cdots,|\xi_k|)$$

对处理立方体来说，采用这个范数比采用通常的欧几里得范数

(2) $$\|x\|_2=(\xi_1^2+\cdots+\xi_k^2)^{1/2}$$

要好一些．因为$\|x\|\leqslant\|x\|_2\leqslant\sqrt{k}\|x\|$，用这两个范数所引进的度量给出同一个$R^k$上的拓扑．特别，当$n\to\infty$时，$\|x_n\|\to0$当且仅当$\|x_n\|_2\to0$．

假设$V$是$R^k$内的一个开集，$T$是$V$到$R^k$内的映射，$x\in V$，且$A$是$R^k$上的一个线性算子(即，像定义2.1一样，是$R^k$到$R^k$内的一个线性映射)．若对每一个$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$，使得不等式

(3) $$\|T(x+h)-T(x)-Ah\|\leqslant\varepsilon\|h\|$$

对于所有使$\|h\|<\delta$的$h\in R^k$成立，就称$T$在$x$点是可微的且定义

(4) $$T'(x)=A$$

线性算子$T'(x)$称为$T$在$x$的导数．微分这个术语对$T'(x)$也经常采用．因此，人们往往不说$T$在$x$点是可微的，而说$T$在$x$点具有微分或说$T$的微分在$x$点存在．

在(3)式中用范数(2)代替范数(1)时，无论是$T$的可微性或是$T'(x)$的值均不受影响．

若$T$在$V$的每一点上可微，就称$T$在$V$内可微．在那种情况下，对每一个$x\in V$都有一个对应的线性算子$T'(x)$；对于固定的$x$和很小的$h$，$T(x+h)-T(x)$被$h$的线性函数$T'(x)h$在(3)的意义下逼近．

因为每一个实数$\alpha$能解释为$R^1$上的(映$t$到$\alpha t$的)线性算子，当$k=1$时，$T'(x)$的上述定义和通常的定义一致．

对$R^k$上的每一个线性算子$A$对应于一个数

(5) $$\Delta(A)=m(A(Q))$$

这里$m$是$R^k$上Lebesgue测度，$Q$是单位立方体：$x\in Q$当且仅当$0\leqslant\xi_i<1$对$1\leqslant i\leqslant k$成立．

**8.23** 评注 如果$A$是$R^k$上的一个线性算子，则

(1) $$A'(x)=A \qquad (x\in R^k)$$

若对所有的 Borel 集 $E$，我们定义

$$\mu(E)=m(A(E)) \tag{2}$$

则 $\mu$ 是平移不变的，因为

$$\mu(E+x)=m(A(E+x))=m(A(E)+Ax)=m(A(E))$$
$$=\mu(E)$$

从定理 2.20($d$)得出

$$\mu(E)=\Delta(A)m(E) \tag{3}$$

并且因此

$$(D\mu)(x)=\Delta(A'(x)) \qquad (x\in R^k) \tag{4}$$

因为每一个可微变换能用一个常数加上一个线性变换来局部地逼近，我们可以猜想在适当的条件下，(4)可以扩展到可微变换上去．事情确是这样，我们首先叙述一个没有涉及任何诱导测度 $\mu$ 的结果。

**8.24 定理** 假设 $T$ 是开集 $V\subset R^k$ 到 $R^k$ 内的连续开映射，假设 $T$ 在某一点 $x\in V$ 可微，则对每一个 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得

$$\left|\frac{m(T(C))}{m(C)}-\Delta(T'(x))\right|<\varepsilon \tag{1}$$

对每一个棱平行于坐标轴、棱长小于 $\delta$ 的、包含 $x$ 的开立方体 $C$ 成立。

**证明** 不失一般性，假设 $x=0$ 和 $T(x)=0$。令 $A=T'(0)$。

将用到关于有限维向量空间上线性算子的下列基本事实（至于证明，参看任何一本线性代数的书）：$R^k$ 上的线性算子 $A$ 是一一的当且仅当 $A$ 的值域是 $R^k$ 的全部。在一一的情况下，$A$ 的逆 $A^{-1}$ 是 $R^k$ 上的线性算子，并且称 $A$ 为非奇异的或者可逆的。

为方便起见，这个证明分成两部份。

情况 1 $A$ 是非奇异的。考虑由

(2) $$S(x)=A^{-1}T(x) \qquad (x\in V)$$

所定义的映射 $S$. 显然, $S$ 是连续的、开的且 $S'(0)=A^{-1}T'(0)=I$, $I$ 是恒等算子. 我们将证明

(3) $$\left|\frac{m(S(C))}{m(C)}-1\right|<\varepsilon$$

对所有的包含 0 的充分小的 $C$ 成立.

因为 $T(x)=AS(x)$, 根据 8.23(3), 有

(4) $$m(T(C))=m(A(S(C)))=\Delta(A)m(S(C))$$

因此(3)将给出所要的结果.

固定 $\eta>0$, 使 $\eta<\frac{1}{4}$, 并且

(5) $$1-\varepsilon<(1-2\eta)^k<(1+2\eta)^k<1+\varepsilon$$

因为 $S(0)=0$ 和 $S'(0)=I$, 故存在一个 $\delta>0$, 使得 $\|x\|<\delta$ 时,

(6) $$\|S(x)-x\|\leqslant\eta\|x\|$$

设 $C$ 是一个包含 0 的开立方体, 它的棱平行于坐标轴且棱长 $\lambda<\delta$. 设 $C_1$ 和 $C_2$ 是同心于 $C$ 的开立方体, 它们的棱长分别为

(7) $$\lambda_1=(1-2\eta)\lambda, \quad \lambda_2=(1+2\eta)\lambda$$

注意(6)式蕴涵着

(8) $$\|S(x)-x\|\leqslant\eta\lambda \qquad (x\in\bar{C})$$

这里 $\bar{C}$ 是 $C$ 的闭包.

若 $x\in C$, 则(8)指出 $S(x)\in C_2$. 于是 $S(C)\subset C_2$.

我们下一个目标是证明 $C_1\subset S(C)$. 令

(9) $$E_1=C_1\cap S(C), \quad E_2=C_1-S(C)$$

根据(8), $S$ 决不会把 $C$ 的边界点映到 $C_1$ 内. 因此在(9)内能用 $\bar{C}$ 代替 $C$ 而不致影响 $E_1$ 和 $E_2$ 的定义. 由 $C_1$ 是开的和 $S(\bar{C})$ 是紧的, 看出 $E_2$ 是开的. 因为 $\eta<\frac{1}{4}$, 故(8)指出 $S$ 映 $C$ 的中心到 $C_1$ 内, 所以 $E_1$ 是非空的. 最后, $S$ 假设为开映射, 所以 $S(C)$ 是开的.

因此 $E_1$ 是开的．这样，$C_1$ 就是两个不相交的开集 $E_1$ 和 $E_2$ 的并，且 $E_1\neq\varnothing$．但 $C_1$ 是一个连通集（$R^k$ 内的每一个凸集是连通的），所以 $C_1$ 不是两个不相交的非空开集的并．于是得出 $E_2=\varnothing$，因此 $E_1=C_1$，且这就给出 $C_1\subset S(C)$．

现在已经证明了 $C_1\subset S(C)\subset C_2$．因此

$$(1-2\eta)^k\leqslant\frac{m(S(C))}{m(C)}\leqslant(1+2\eta)^k \tag{10}$$

并且从(5)得出(3)．

这就完成了情况 1 的证明．

情况 2　$A$ 是奇异的．在这种情况下，$A$ 映 $R^k$ 到低维的子空间内，即映 $R^k$ 到一个零测集内．特别

$$\Delta(A)=m(A(Q))=0 \tag{11}$$

如果给定 $\varepsilon>0$，则存在一个 $\eta>0$，使得当 $E_\eta$ 是所有与 $A(Q)$ 的距离小于 $\eta$ 的点的集时，$m(E_\eta)<\varepsilon$．因为 $A=T'(0)$，故存在一个 $\delta>0$，使得当 $\|x\|<\delta$ 时，

$$\|T(x)-Ax\|\leqslant\eta\|x\| \tag{12}$$

设 $C$ 象在情况 1 一样是开立方体，它的棱长 $\lambda<\delta$．则对所有 $x\in C$，$\|T(x)-Ax\|<\eta\lambda$．这意味着：$T(C)$ 包含在由与 $A(C)$ 距离小于 $\eta\lambda$ 的那些点所组成的集 $E$ 内．$\eta$ 的选择表明 $m(E)<\varepsilon\lambda^k$．因此，当 $\lambda<\delta$ 时就有

$$\frac{m(T(C))}{m(C)}\leqslant\frac{m(E)}{m(C)}=\frac{m(E)}{\lambda^k}<\varepsilon \tag{13}$$

并且因为 $\Delta(A)=0$，我们就已经证明了在情况 2 下，(1)式也成立．

现在定理的证明完了．

### 8.25　评注

(a) 若从假设中删去“开”映射这个条件，上面的定理还是正确的，但证明要困难些．我们用到 $T$ 是开的这一性质仅仅是为了

证明下列结论：如果 $C$ 和 $C_1$ 是同心的立方体，$C_1$ 在 $C$ 内部，$C$ 和 $C_1$ 的对应的面之间的距离小于 $\varepsilon$，并且如果 $C$ 的点被 $T$ 移动得决不超过 $\varepsilon$ 这么远，则 $T(C)\supset C_1$，对连续的 $T$ 这是正确的，但是其证明则要依靠一些比我们所希望读者具备的更深的关于 $R^k$ 的拓扑知识.

下面是所需要的命题的不同叙述方法，并给出了其证明的梗概.

假设 $C=\{x:\|x\|<1\}$，$\|x_0\|<1-\varepsilon$，$f:\bar{C}\to R^k$ 是连续的，并且，当 $\|x\|=1$ 时，$\|f(x)-x\|<\varepsilon$. 则 $x_0\in f(C)$.

为证明这个结论，假设 $x_0\notin f(C)$. $x\neq 0$ 时，定义 $u(x)=x/\|x\|$. 在 $\bar{C}$ 上用

$$F(x)=\begin{cases} f(2x) & \text{若}\|x\|<\dfrac{1}{2} \\ (2\|x\|-1)u(x)+2(1-\|x\|)f(u(x)) & \text{若}\dfrac{1}{2}\leqslant\|x\|\leqslant 1 \end{cases}$$

定义 $F$. 则 $F$ 是连续的. 若 $\frac{1}{2}\leqslant\|x\|\leqslant 1$，则 $F(x)$ 在 $u(x)$ 和 $f(u(x))$ 之间的线段上，因此 $\|F(x)\|>1-\varepsilon$. 由此得出 $x_0\notin F(\bar{C})$. 同时，若 $\|x\|=1$，则 $F(x)=x$.

设 $h$ 是 $R^k$ 到 $R^k$ 上的同胚，使得若 $\|x\|=1$，则 $h(x)=x$，并且 $h(x_0)=0$. 定义

$$g(x)=-u(h(F(x)))\qquad(x\in\bar{C})$$

因为 $x_0\notin F(\bar{C})$，$g(x)$ 是一个 $\bar{C}$ 到它的边界内的连续映射. 若 $\|x\|=1$，则 $g(x)=-x$. 于是对每一个 $x\in\bar{C}$，$g(x)\neq x$. 这就与 Brouwer 不动点定理矛盾.

(b) 同时也应该指出，若假设 $T$ 是连续可微的，即若我们假设 $x\to T'(x)$ 是 $V$ 到 $R^k$ 上的全体线性算子的空间内的连续映射，则反函数定理([26]，定理 9.17)保证：当 $T'(x)$ 是非奇异时，$T$ 是

开的．所以，若我们假设 $T'$ 是连续的，就能从假设中删去“开的”这个条件．

在下面的应用中，假定了 $T'(x)$的存在性，但没有对 $T'$ 加上连续性的假定，所加在 $T$ 上的拓扑学假定避开了可测性的困难．

**8.26 定理** 假设$T$是开集$V\subset R^k$到有界开集$W\subset R^k$上的可微映射，同时设$T$是一一的，且$T$的逆映射是连续的．则

(*a*) 对每一个 Borel 集 $E\subset V$，$T(E)$是一个 Borel 集．

(*b*) 若$E$是 Lebesgue 可测的，则$T(E)$也是 Lebesgue 可测的．

(*c*) 若 $\mu(E)=m(T(E))$，则$\mu$是一个$V$上的正有界 Borel 测度，且 $\mu\ll m$．

(*d*) 对每一个 Lebesgue 可测集 $E\subset V$，

$$m(T(E))=\int_E \Delta(T'(x))dx$$

(*e*) 更一般地，若 $f\in L^1(W)$，则有

$$\int_W f(y)dy=\int_V f(T(x))\Delta(T'(x))dx$$

**证明** 因为$T$的逆映射是连续的，若$E$是开的，则$T(E)$是开的；所有使得$T(E)$是 Borel 集的那些 $E\subset V$ 的集族是$V$内的 $\sigma$-代数；这就蕴涵着(*a*)．

若如(*c*)中一样定义 $\mu$，因为$T$是一一的，则从$m$的可数可加性得出$\mu$的可数可加性．因为 $m(W)<\infty$，故$\mu$是有界的．根据定理 8.24，对每一个 $x$，$(\overline{D}^{Q}\mu)(x)<\infty$．因此，定理 8.11 的系指出 $\mu\ll m$．这就证明了(*c*)．

结合定理8.24和18.6，我们看出$(D\mu)(x)=\Delta(T'(x))$a.e.[m]，并且对所有的 Borel 集$E$获得(*d*)的方程，但若$E$是 Borel 集且 $m(E)=0$，则 $m(T(E))=0$；于是，在这种情况下对所有的具有

$m(A)=0$ 的 Lebesgue 可测集 $A\subset V$，得出 $T(A)$是 Lebesgue 可测的，并且 $m(T(A))=0$. 这就完成了$(d)$的证明，同时建立了$(b)$.

剩下证明$(e)$. 若 $A$ 是$W$中的 Borel 集，且 $E=T^{-1}(A)$. 则$E$是 Borel 集，$\chi_E(x)=\chi_A(T(x))$，所以$(d)$蕴涵着

$$\int_W \chi_A(y)dy=m(A)=m(T(E))=\int_V \chi_A(T(x))\Delta(T'(x))dx$$

于是，若 $f=\chi_A$，则$(e)$成立. 因此若 $f$ 是任一简单的 Borel 函数，则$(e)$也成立，并且可得出一般的情况.

**8.27 Jacobi 行列式** 变量代换公式 8.26$(e)$通常用下列形式叙述.

(1) $$\int_{T(V)} f(y)dy=\int_V f(T(x))\,|J_T(x)|\,dx$$

这里 $J_T(x)$是$T$在$x$点的 Jacobi 行列式. 根据定义，这是线性算子 $T'(x)$的行列式. 若我们证明了

(2) $$\Delta(T'(x))=|J_T(x)|$$

成立，则这两个公式的等价性就会确立起来，而且这显然是下列结果的一个推论.

**8.28 定理** 若 $A$ 是 $R^k$ 上的线性算子，并且 $\Delta(A)$是与 $A$ 对应的一个纯量因子，使得

(1) $$m(A(E))=\Delta(A)m(E)$$

对每一个可测集$E$成立. 则

(2) $$\Delta(A)=|\det A|$$

我们选择用几何语言定义的量 $\Delta(A)$ 来叙述并证明定理 8.24 和 8.26，是为了突出这些定理的几何的和测度论的面貌. $\Delta(A)$ 也以 $A$(与 $A$ 相联系的矩阵)的行列式的绝对值形式出现，这乃是一种代数性质的附加知识，这对计算显然是很重要的. 然而，过早地引入这个行列式并不会简化我们的工作.

**证明** 设$\{e_1,\cdots,e_k\}$是$R^k$的标准基：当$i=j$时，$e_j$的第$i$个坐标是1；当$i\neq j$时为0. 若$A$是$R^k$上的线性算子，且

$$Ae_j=\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ij}e_i \qquad (1\leqslant j\leqslant k) \tag{3}$$

则根据定义，$\det A$是矩阵$[A]$的行列式，它的第$i$行第$j$列的元素是$\alpha_{ij}$.

如果$A=A_1A_2$，则(1)蕴涵着$\Delta(A)=\Delta(A_1)\Delta(A_2)$. 因此，行列式的乘法定理指出，若对$A_1$和$A_2$，(2)式成立，则对$A$，(2)式也成立. 因为每一个$R^k$上的线性算子$A$是有限多个下列三种形式的算子的乘积. 对这些形式的每一个建立(2)就足够了.

(I) $\{Ae_1,\cdots,Ae_k\}$是$\{e_1,\cdots,e_k\}$的置换.

(II) $Ae_1=\alpha e_1$，对$i=2,\cdots,k$，$Ae_i=e_i$.

(III) $Ae_1=e_1+e_2$，对$i=2,\cdots,k$，$Ae_i=e_i$.

若$A$是(I)型的，则$[A]$恰好每一行每一列有一个1，在其余的地方为0. 所以$\det A=\pm1$. 若$Q$是单位立方体，则$A(Q)=Q$，因此$\Delta(A)=1=|\det A|$.

若$A$是(II)型的，则显然$\Delta(A)=|\alpha|=|\det A|$.

若$A$是(III)型的，则$\det A=1$，且$A(Q)$是所有的点$\Sigma\xi_ie_i$的集，这些点的坐标满足

$$\xi_1\leqslant\xi_2<\xi_1+1,\ \text{若 } i\neq2, \text{则 } 0\leqslant\xi_i<1 \tag{4}$$

若$S_1$是在$A(Q)$内具有$\xi_2<1$的那些点的集，并且若$S_2$是$A(Q)$的其余部份，则

$$S_1\cup(S_2-e_2)=Q \tag{5}$$

这里$S_2-e_2$是$S_2$的平移. 因此

$$\Delta(A)=m(S_1\cup S_2)=m(S_1)+m(S_2-e_2)=m(Q)=1$$

这就完成了证明.

## 习　　题

1　假定$\{\mu_n\}$是$R^k$上的正的 Borel 测度序列，且

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(E)$$

假定$\mu(R^k)<\infty$．证明$\mu$是一个 Borel 测度．$\mu_n$的 Lebesgue 分解和$\mu$的 Lebesgue 分解之间的关系怎样？证明

$$(D\mu)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(D\mu_n)(x)\quad \text{a. e.}$$

2　假设每一个$f_n$是$R^1$上的正的不减的函数，且

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)<\infty$$

对所有的$x$成立．证明

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f'_n(x)\quad \text{a. e.}$$

3　设$J$是$R^2$内直线$y=x$上的紧区间．设$m_1$是$J$上的一维 Lebesgue 测度，对每一个 Borel 集$E\subset R^2$定义$\mu(E)=m_1(E\cap J)$．证明：虽然$\mu\perp m$，但$(D_Q\mu)(x)=0$对每一个$x\in R^2$成立．（与定理 8.10 比较．）

4　构造一个$R^1$上的连续单调函数，使得虽然$f'(x)=0$ a. e.，但$f$在任一线段上都不是常数．

5　若$f$象定理 8.19 的引理内的函数一样，能否存在一个不可数集$E$，使得$f$在$E$的任一点上不可微？

6　假设$\{c_i\}$是正数序列，使得$\Sigma|c_i|=\infty$．证明存在线段$J_i=(x_i-c_i, x_i+c_i)$，使得若$i\neq j$，则$x_i\neq x_j$，$\{x_i\}$在$R^1$内是稠密的，且每一个$x\in R^1$都在无穷多个$J_i$内．令$f(x_i)=c_i(i=1, 2, 3, \cdots)$，对所有其余的$x$，令$f(x)=0$．证明$f$是处处不可微的．

7　假设$E$是$R^1$(或$R^k$)内无孤立点的紧集（一个完全集）．证明$E$是连续正的 Borel 测度$\mu$的支集（见第二章习题 11 的定义）．若$m(E)=0$，这就给出奇异测度的例子．

8　假设$E\subset[a, b]$，$m(E)=0$．构造一个$[a, b]$上的绝对连续单调函数

$f$，使得对每一个 $x\in E$，$f'(x)=\infty$. 提示：$E\subset\bigcap V_n$，$m(V_n)<2^{-n}$，$V_n$ 是开集. 考虑 $\chi_{V_n}$ 的和.

9 证明两个 $[a,b]$ 上的两个绝对连续函数的乘积是绝对连续的. 用这个结果推导出分部积分的定理.

10 若 $f$ 是 $[0,1]$ 上的实函数，且

$$\gamma(t)=t+if(t)$$

根据定义，$f$ 的图像的长度是 $\gamma$ 在 $[0,1]$ 上的全变差. 证明当且仅当 $f\in BV$ 时这个长度是有限的. 假定 $f(0)=0$，$f$ 是连续和不减的，且 $f_s$ 是 $f$ 的奇异部份（见定理 8.18）. 证明 $f$ 的图像的长度是

$$f_s(1)+\int_0^1\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt$$

若 $f\in BV$，但 $f$ 不一定是单调的，这个公式将怎样改变？在例 8.20(b) 中所构造的函数的图像长度是多少？

11 若 $E$ 是 $R^1$ 内的 Lebesgue 可测集. 商

$$\frac{m(E\cap(x-\delta,x+\delta))}{2\delta}$$

的上极限和下极限叫做 $E$ 在 $x$ 点的上密度和下密度，记为 $\overline{D}_E(x)$ 和 $\underline{D}_E(x)$. 若它们相等，其共同值 $D_E(x)$ 是 $E$ 在 $x$ 的密度（有时叫做度量密度）. 若 $D_E(x)=1$，则 $x$ 是 $E$ 的密集点.

证明几乎所有的 $x\in E$，$D_E(x)=1$，而几乎所有的 $x\notin E$，$D_E(x)=0$.

构造一个集 $E$，使得 $\underline{D}_E(0)\neq\overline{D}_E(0)$. $\underline{D}_E(0)=0$ 和 $\overline{D}_E(0)=1$ 的情况能出现吗？

12 若 $A\subset R^1$ 和 $B\subset R^1$. 令 $A+B=\{a+b:a\in A,\ b\in B\}$. 设 $m(A)>0$，$m(B)>0$. 证明 $A+B$ 包含一个线段.

提示：或者用 $A$ 和 $B$ 内密集点的存在性，或者假设 $m(A)<\infty$，$m(B)<\infty$，并证明 $\chi_A$ 和 $\chi_B$ 的卷积是一个连续函数，它在 $R^1$ 上的积分不为 0.

设 $C$ 是 Cantor 三分集. 证明：虽然 $m(C)=0$，但 $C+C$ 却是一个区间. 将这个结果推广到 $R^k$ 内的集上.

13 证明存在一个闭集 $E\subset R^2$，具有 $m_2(E)>0$，它不包含测度为正数的可测矩形（见定义 7.1）. 提示：选取 $K\subset R^1$，它是紧的，完全不连通的，具有 $m_1(K)>0$. 设 $E=\{(x,y):x+y\in K\}$. 若 $A\subset R^1$，$B\subset R^1$，且 $A\times B\subset E$，则 $A+B\subset K$. 用习题 12.

14　假设$G$是一个$R^1$的子群(关于加法)，$G\neq R^1$，并且$G$是Lebesgue可测的．证明$m(G)=0$(与习题12比较)．

15　证明至多存在一个算子$A$,满足定义8.22对$T'(x)$的要求

16　证明$R^k$上的Lebesgue测度是旋转不变的。

17　构造一个$R^1$上的单调函数，它在每一点的导数存在,但不是$R^1$上的连续函数．

18　对于$f\in L^\infty(R^1)$．定义$f_t(x)=f(x-t)$,并假设

$$\lim_{t\to 0}\|f_t-f\|_\infty=0$$

这个范数是本性上确界．证明在这些条件下，存在一个$R^1$上的一致连续函数$g$,使得$g(x)=f(x)$a.e.

提示：若$|t|<1/(2n)$，令$h_n(t)=n$，否则$h_n(t)=0$．令$g_n$是卷积$f*h_n$．证明$g_n(x)\to f(x)$a.e.和

$$|g_n(x+t)-g_n(x)|\leqslant\|f_t-f\|_\infty$$

利用序列$\{g_n\}$的同等连续性([26],定理7.23)．

19　若$f(x+t)=f(x)$对所有的$x\in R^1$成立，则称$t$为$R^1$上的函数$f$的一个周期．假设$f$是实的Lebesgue可测函数，具有周期$s$和$t$，使得$s/t$是无理数．证明存在一个常数$\lambda$使得$f(x)=\lambda$a.e.但$f$不一定要是常数.提示：$f$的周期构成一个稠密集．对实数$\alpha$,注意集$E_\alpha=\{x:f(x)>\alpha\}$的密集点．

20　假设$f$是在由不等式$a\leqslant x\leqslant b$和$A\leqslant y\leqslant B$决定的矩形上的实函数．找出那些关于$f$的条件(使它们尽可能地弱),在这些条件下使下列结论有意义并且是正确的($D_1f$表示$f$关于第一个变量$x$的偏导数)．若

$$g(x)=\int_A^B f(x,y)\,dy$$

则

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_A^B dy\left[f(a,y)+\int_a^x (D_1f)(t,y)\,dt\right]\\&=\int_a^x dt\int_A^B (D_1f)(t,y)\,dy+\int_A^B f(a,y)\,dy\end{aligned}$$

以致

$$g'(x)=\int_A^B (D_1f)(x,y)\,dy$$

同时看到在什么条件下，能通过直接考虑商$[g(t)-g(x)]/(t-x)$导出

上面最后的公式.

21　假设 $f$ 是 $[a,\ b]$ 上的连续复函数，具有全变差 $V$. 证明对每一个 $W<V$, 对应一个 $\delta>0$, 具有下列性质：若 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 且 $|x_i-x_{i-1}|<\delta$ 对 $i=1,2,\cdots,n$ 成立，则

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|>W$$

22　假设 $f$ 是一个 $[a,b]$ 上的连续实函数. 对每一个实数 $y$, 设 $M(y)$ 是使得 $f(x)=y$ 的那些 $[a,b]$ 内的点 $x$ 的个数. ($M(y)$ 是有限的或无限的. $M$ 可以称为 $f$ 的重数函数). 证明 $M$ 是 Borel 函数，并且 $\int M(y)\,dy$ 是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的全变差.

提示：对图像是有限个直线区间的并的函数，这个结果是显然的. 通过适当地选取这种函数序列来逼近 $f$ (它们的重数函数应该递增地趋于 $f$ 的重数函数). 运用习题 21.

23　每一个 $R^1$ 上的左连续复函数是 Borel 函数吗？若 $V$ 是开集，关于 $f^{-1}(V)$ 你能说些什么？

24　(籍助于 Hausdorff 极大性定理) 证明存在一个 $R^1$ 上的实的不连续函数 $f$, 使得

(1)　$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

对所有的 $x$ 和 $y\in R^1$ 成立.

证明若 (1) 成立和 $f$ 是 Lebesgue 可测的，则 $f$ 连续.

证明若 (1) 成立和 $f$ 的图像在平面上不是稠密的，则 $f$ 是连续的.

找出所有的满足 (1) 的连续函数，把这个结果与第九章的习题 17 加以比较.

# 第九章　Fourier 变式

## 形式上的性质

**9.1　定义**　本章我们将从以前的记号出发，并用字母$m$记$R^1$上的 Lebesgue 测度被$\sqrt{2\pi}$除的结果，而不是$R^1$上的 Lebesgue 测度. 这个约定简化了一些结果的外貌，例如反演定理和 Plancherel 定理. 因此，我们将用记号

(1)　$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dm(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

其中$dx$是通常的 Lebesgue 测度，并定义

(2)　$$\|f\|_p=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dm(x)\right\}^{1/p} \qquad (1\leqslant p<\infty)$$

(3)　$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dm(y) \qquad (x\in R^1)$$

和

(4)　$$\hat{f}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}dm(x) \qquad (t\in R^1)$$

整个这章，我们将用$L^p$代替$L^p(R^1)$，而$C_0$将记$R^1$上所有在无穷远点为零的连续函数的空间.

如果$f\in L^1$，则积分(4)对每个实数$t$都是完全确定的. 函数$\hat{f}$称为$f$的 Fourier 变式. 注意，术语"Fourier 变式"也用于把$f$映为$\hat{f}$的映射.

在定理 9.2 中列出的形式上的性质是与$m$的平移不变性密切相关的，也与这样一个事实，即对每个实数$\alpha$，映射$x\longrightarrow e^{i\alpha x}$是加法群$R^1$的特征标密切相关的. 根据定义，如果对一切实数$s$和$t$，

$|\varphi(t)|=1$ 并且

(5) $$\varphi(s+t)=\varphi(s)\varphi(t)$$

则函数 $\varphi$ 是 $R^1$ 的特征标. 换句话说, $\varphi$ 是加法群 $R^1$ 到绝对值等于 1 的复数乘法群内的一个同态映射. 以后将会看到(定理 9.23 的证明中), $R^1$ 的每个连续的特征标可由一个指数函数给出.

**9.2 定理** 设 $f\in L^1$, $\alpha$ 和 $\lambda$ 是实数.

(a) 如果 $g(x)=f(x)e^{i\alpha x}$, 则 $\hat{g}(t)=\hat{f}(t-\alpha)$.

(b) 如果 $g(x)=f(x-\alpha)$, 则 $\hat{g}(t)=\hat{f}(t)e^{-i\alpha t}$.

(c) 如果 $g\in L^1$, $h=f*g$, 则 $\hat{h}(t)=\hat{f}(t)\hat{g}(t)$.

因此, Fourier 变式用特征标来乘化为平移, 反之亦然, 并把卷积化为点态相乘的积.

(d) 如果 $g(x)=\overline{f(-x)}$, 则 $\hat{g}(t)=\overline{\hat{f}(t)}$.

(e) 如果 $g(x)=f(x/\lambda)$ 且 $\lambda>0$, 则 $\hat{g}(t)=\lambda\hat{f}(\lambda t)$.

(f) 如果 $g(x)=-ixf(x)$ 且 $g\in L^1$, 则 $\hat{f}$ 是可微的, 且 $\hat{f}'(t)=\hat{g}(t)$.

**证明** (a), (b), (d) 和 (e) 由直接代入公式 9.1(4) 予以证明. (c) 的证明是 Fubini 定理的一个应用(关于要求可测性的证明参看定理 7.14):

$$\begin{aligned}\hat{h}(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}dm(x)\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dm(y)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{-ity}dm(y)\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)e^{-it(x-y)}dm(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{-ity}dm(y)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dm(x)\\&=\hat{g}(t)\hat{f}(t)\end{aligned}$$

注意如何应用 $m$ 的平移不变性.

为证明 (f), 注意

(1) $$\frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(t)}{s-t}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\varphi(x,s-t)dm(x) \quad (s\neq t)$$

这里 $\varphi(x,u)=(e^{-ixu}-1)/u$. 由于对所有实数 $u\neq 0$, $|\varphi(x,u)|\leqslant |x|$, 且当 $u\to 0$ 时 $\varphi(x,u)\to -ix$, 把控制收敛定理用于(1)式，如果 $s$ 趋向于 $t$, 我们得到

(2) $$\hat{f}'(t)=-i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ixt}dm(x)$$

**9.3 评注**

($a$) 由于控制收敛定理仅涉及函数的可数序列，在上述证明中，求助于控制收敛定理似乎是不合逻辑的．然而，对每个收敛于 $t$ 的序列 $\{s_n\}$, 它却能帮助我们得到，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{f}(s_n)-\hat{f}(t)}{s_n-t}=-i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ixt}dm(t)$$

而这恰好是说，

$$\lim_{s\to t}\frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(t)}{s-t}=-i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ixt}dm(t)$$

我们还会遇到类似情况，当应用收敛定理于那些情况时将不再作更多的声明.

($b$) 定理 9.2($b$)表明

$$[f(x+\alpha)-f(x)]/\alpha$$

的 Fourier 变式是

$$\hat{f}(t)\frac{e^{i\alpha t}-1}{\alpha}$$

这一点暗示定理 9.2($f$) 的类似情形在一定的条件下也应该成立，即是说，$f'$ 的 Fourier 变式是 $it\hat{f}(t)$. 如果 $f\in L^1$, $f'\in L^1$, 而且 $f$ 是 $f'$ 的不定积分的话，则此结果容易用分部积分得到．我们把它以及与它有关的一些结果留作习题．Fourier 变式把微分法化为用 $ti$ 相乘这一事实，使 Fourier 变式在微分方程的研究中成为一种有用的工具.

## 反演定理

**9.4** 刚才我们看到，关于函数的某些运算同关于它们的 Fourier 变式的运算是很好地对应着的. 如果有一种方法可以从变式又得回函数，即是说，有一种反演公式，那么，当然将会提高这种对应的有用性和兴趣.

我们通过与 Fourier 级数相类比，来看这样一个公式会像什么样子. 如果

(1) $$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-inx}dx \qquad (n\in Z)$$

则反演公式是

(2) $$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

我们知道，如果 $f\in L^2(T)$，在 $L^2$-收敛的意义下，(2)式成立. 我们也知道，纵然 $f$ 是连续的，但在点态收敛的意义下，(2)式也不一定成立. 现在设 $f\in L^1(T)$，$\{c_n\}$用(1)给出，并设

(3) $$\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|<\infty$$

令

(4) $$g(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

由于(3)，(4)中的级数一致收敛(因此，$g$ 是连续的)，并容易算出 $g$ 的 Fourier 系数:

(5) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\right\}e^{-ikx}dx$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-k)x}dx$$

$$=c_k$$

因此，$f$ 和 $g$ 有相同的 Fourier 系数. 由此得出 $f=g$ a. e.，于是 $f$ 的 Fourier 级数收敛于 $f(x)$a. e..

在 Fourier 变式的上下文里，类似的假设是 $f\in L^1$ 和 $\hat{f}\in L^1$，而且我们可以希望，像

(6) $$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{itx}dm(t)$$

这样的公式是正确的. 确实，如果 $\hat{f}\in L^1$，(6)式的右边含义是明确的；记它为 $g(x)$；但是，如果要像(5)那样来论证，我们就会遇到实际上是毫无意义的积分

(7) $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t-s)x}dx$$

因此，纵然在很强的假设，即 $\hat{f}\in L^1$ 之下，(6)式(它是正确的)的证明也还得经历一个更曲折的路程.

[应该提一下，如果把在$(-\infty,\infty)$上的积分理解为在$(-A,A)$上的积分当 $A\to\infty$ 时的极限的话，甚至当 $\hat{f}\notin L^1$ 时，(6)式也可以成立.(类似于一个不是绝对收敛的级数可以收敛一样.)然而，我们不打算探讨这个问题.]

**9.5 定理** 对 $R^1$ 上的任意函数 $f$ 和每个 $y\in R^1$，令 $f_y$ 是 $f$ 的平移，定义为

(1) $$f_y(x)=f(x-y)\qquad(x\in R^1)$$

如果 $1\leqslant p<\infty$ 且 $f\in L^p$，则映射

(2) $$y\longrightarrow f_y$$

是一个 $R^1$ 到 $L^p(R^1)$ 内的一致连续映射.

**证明** 固定 $\varepsilon>0$. 由于 $f\in L^p$，存在连续函数 $g$，它的支集属于有界区间$[-A,A]$，使得

$$\|f-g\|_p<\varepsilon$$

(定理 3.14). $g$ 的一致连续性表明存在 $\delta\in(0,A)$，使得$|s-t|<\delta$

时，有

$$|g(s)-g(t)|<(3A)^{-1/p}\varepsilon$$

如果$|s-t|<\delta$,便得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x-s)-g(x-t)|^p dx<(3A)^{-1}\varepsilon^p(2A+\delta)<\varepsilon^p$$

于是$\|g_s-g_t\|<\varepsilon$.

注意$L^p$-范数(关于 Lebesgue 测度)是平移不变的：$\|f\|_p=\|f_s\|_p$. 因此，当$|s-t|<\delta$时

$$\begin{aligned}\|f_s-f_t\|_p&\leqslant\|f_s-g_s\|_p+\|g_s-g_t\|_p+\|g_t-f_t\|_p\\&=\|(f-g)_s\|_p+\|g_s-g_t\|_p+\|(g-f)_t\|_p<3\varepsilon\end{aligned}$$

这就完成了证明.

**9.6 定理** 如果$f\in L^1$,则$\hat{f}\in C_0$，且

(1) $$\|\hat{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_1$$

**证明** 由 9.1(4),不等式(1)是显然的. 如果$t_n\to t$,则

(2) $$|\hat{f}(t_n)-\hat{f}(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{-it_nx}-e^{-itx}|dm(x)$$

此被积函数是以$2|f(x)|$为界的，并当$n\to\infty$时，对每个$x$都趋向于 0. 根据控制收敛定理,于是$\hat{f}(t_n)\to\hat{f}(t)$. 因此,$\hat{f}$是连续的.

由于$e^{\pi i}=-1$, 9.1(4)给出

(3) $$\begin{aligned}\hat{f}(t)&=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-it(x+\pi/t)}dm(x)\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\pi/t)e^{-itx}dm(x)\end{aligned}$$

因此

(4) $$2\hat{f}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{t}\right)\right\}e^{-itx}dm(x)$$

于是

(5) $$2|\hat{f}(t)|\leqslant\|f-f_{\pi/t}\|_1$$

根据定理 9.5, 当$t\to\pm\infty$时趋向于 0.

**9.7　一对辅助函数**　在反演定理的证明中，知道一个正的函数 $H$，使得它有正的 Fourier 变式，而且这个变式的积分又易于计算，这将是便利的。在许多可能性当中，我们选择了与半平面内的调和函数的关系是有趣的那一种.（参看第十一章的习题 21.）

令

$$H(t)=e^{-|t|} \tag{1}$$

并定义

$$h_\lambda(x)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)e^{itx}dm(t)\qquad(\lambda>0) \tag{2}$$

经过简单计算，得出

$$h_\lambda(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2} \tag{3}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}h_\lambda(x)dm(x)=1 \tag{4}$$

也要注意到，$0<H(t)\leqslant 1$ 并且当 $\lambda\to 0$ 时 $H(\lambda t)\to 1$.

**9.8　命题**　如果 $f\in L^1$，则

$$(f*h_\lambda)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{ixt}dm(t)$$

**证明**　这是 Fubini 定理的一个简单应用.

$$\begin{aligned}(f*h_\lambda)(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)dm(y)\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)e^{ity}dm(t)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)dm(t)\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)e^{ity}dm(y)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)dm(t)\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{it(x-y)}dm(y)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{itx}dm(t)\end{aligned}$$

**9.9　定理**　如果 $g\in L^\infty$，$g$ 在点 $x$ 连续，则

(1) $$\lim_{\lambda\to 0}(g*h_\lambda)(x)=g(x)$$

**证明** 由于9.7(4)，有

$$(g*h_\lambda)(x)-g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[g(x-y)-g(x)]h_\lambda(y)dm(y)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[g(x-y)-g(x)]\lambda^{-1}h_1\left(\frac{y}{\lambda}\right)dm(y)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[g(x-\lambda s)-g(x)]h_1(s)dm(s)$$

最后那个被积函数被 $2\|g\|_\infty h_1(s)$ 所控制，并且当 $\lambda\to 0$，对每个 $s$ 按点收敛于0. 因此，由控制收敛定理便得到(1).

**9.10 定理** 如果 $1\leqslant p<\infty$ 和 $f\in L^p$，则

(1) $$\lim_{\lambda\to 0}\|f*h_\lambda-f\|_p=0$$

$p=1$和 $p=2$ 的情形我们是有兴趣的，但是一般情形也不难证明.

**证明** 由于 $h_\lambda\in L^q$，$q$ 是共轭于 $p$ 的指数，对每个 $x$，$(f*h_\lambda)(x)$ 的意义是明确的.（事实上，$f*h_\lambda$ 是连续的；参看习题8.）因为9.7(4)，我们有

(2) $$(f*h_\lambda)(x)-f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-y)-f(x)]h_\lambda(y)dm(y)$$

而定理3.3给出

(3) $$|(f*h_\lambda)(x)-f(x)|^p \leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)-f(x)|^p h_\lambda(y)dm(y)$$

将(3)式对 $x$ 积分，并应用 Fubini 定理：

(4) $$\|f*h_\lambda-f\|_p^p\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\|f_y-f\|_p^p h_\lambda(y)dm(y)$$

如果 $g(y)=\|f_y-f\|_p^p$，根据定理9.5，$g$ 是有界和连续的，且 $g(0)=0$. 根据定理9.9，因此当 $\lambda\to 0$ 时，(4)的右边趋向于0.

**9.11 反演定理** 如果$f\in L^1$和$\hat{f}\in L^1$，且

(1) $$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{ixt}dm(t) \qquad (x\in R^1)$$

则$g\in C_0$和$f(x)=g(x)$ a.e.

**证明** 由命题9.8，

(2) $$(f*h_\lambda)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{ixt}dm(x)$$

(2)式右边的被积函数以$|\hat{f}(t)|$为界，由于当$\lambda\to 0$时，$H(\lambda t)\to 1$，根据控制收敛定理，(2)的右边对每个$x\in R^1$收敛于$g(x)$.

如果综合定理9.10和3.12，我们看出，存在序列$\{\lambda_n\}$使得$\lambda_n\to 0$，且

(3) $$\lim_{n\to\infty}(f*h_{\lambda_n})(x)=f(x) \text{ a.e.}$$

因此，$f(x)=g(x)$ a.e.. 由定理9.6推出$g\in C_0$.

**9.12 唯一性定理** 如果$f\in L^1$并且对一切，$t\in R^1$，$\hat{f}(t)=0$，则$f(x)=0$ a.e. .

**证明** 由$\hat{f}=0$得到$\hat{f}\in L^1$，由反演定理得出结果.

## Plancherel 定理

由于$R^1$的勒贝格测度是无限的，$L^2$不是$L^1$的子集. 因此，根据公式9.1(4)，Fourier变式的定义对每个$f\in L^2$不是直接可以应用的. 但如果$f\in L^1\cap L^2$，就能应用定义并得出$\hat{f}\in L^2$. 事实上，$\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$! 把由$L^1\cap L^2$到$L^2$内的这个等距映射扩充为$L^2$到$L^2$上的等距，且此扩充对每个$f\in L^2$都定义了Fourier变式(有时称为Plancherel变式). 事实上，所得出的$L^2$理论比$L^1$的情形更具有对称性. 在$L^2$中，$f$和$\hat{f}$确实处于相同的地位.

**9.13 定理** 对每个$f\in L^2$都能对应一个函数$\hat{f}\in L^2$，使得下述性质成立:

(a) 如果 $f\in L^1\cap L^2$，则 $\hat{f}$ 是 $f$ 的前面定义过的Fourier变式.

(b) 对每个 $f\in L^2$，$\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$.

(c) 映射 $f\to\hat{f}$ 是一个 $L^2$ 到 $L^2$ 上的 Hilbert 空间的同构.

(d) 在 $f$ 和 $\hat{f}$ 之间存在下述对称关系：如果

$$\varphi_A(t)=\int_{-A}^{A}f(x)e^{-ixt}dm(x) \text{和} \psi_A(x)=\int_{-A}^{A}\hat{f}(t)e^{-ixt}dm(t)$$

则当 $A\to\infty$ 时，$\|\varphi_A-\hat{f}\|_2\to 0$ 和 $\|\psi_A-f\|_2\to 0$.

注：由于 $L^1\cap L^2$ 在 $L^2$ 中是稠密的，性质(a)和(b)唯一决定了映射 $f\to\hat{f}$. 称性质(d)为 $L^2$ 反演定理.

**证明** 我们的首要目标是建立关系

(1) $$\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2 \qquad (f\in L^1\cap L^2)$$

固定 $f\in L^1\cap L^2$，令 $\tilde{f}(x)=\overline{f(-x)}$，并规定 $g=f*\tilde{f}$. 则

(2) $$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\overline{f(-y)}dm(y)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x+y)\overline{f(y)}dm(y)$$

或者

(3) $$g(x)=(f_{-x},f)$$

这里的内积是在 Hilbert 空间 $L^2$ 内取的，像在定理 9.5 中一样，$f_{-x}$ 表示 $f$ 的平移. 根据该定理，$x\to f_{-x}$ 是 $R^1$ 到 $L^2$ 内的一个连续映射，因此，由内积的连续性（定理 4.6）得出 $g$ 是一个连续函数. Schwarz 不等式表明

(4) $$|g(x)|\leqslant\|f_{-x}\|_2\|f\|_2=\|f\|_2^2$$

于是 $g$ 是有界的. 且由于 $f\in L^1$ 和 $\tilde{f}\in L$，也就有 $g\in L^1$.

由于 $g\in L^1$，可以应用命题 9.8：

(5) $$(g*h_\lambda)(0)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)\hat{g}(t)dm(t)$$

由于 $g$ 是连续和有界的，定理 9.9 表明

(6) $$\lim_{\lambda\to 0}(g*h_\lambda)(0)=g(0)=\|f\|_2^2$$

定理 9.2($d$)表明 $\hat{g}=|\hat{f}|^2\geqslant 0$，由于当 $\lambda\to 0$ 时 $H(\lambda t)$递增到 1，单调收敛定理给出

(7) $$\lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)\hat{g}(t)dm(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(t)|^2dm(t)$$

于是(5)，(6)和(7)表明 $\hat{f}\in L^2$ 和(1)成立。

这曾经是证明的难点。

对任何 $A>0$，令 $f_A$ 是 $f$ 和区间$[-A,A]$的特征函数的积。如果 $f\in L^2$，则当 $A\to\infty$ 时，显然有$\|f_A-f\|_2\to 0$。又 $f_A\in L^1\cap L^2$，并且当 $\varphi_A$ 如($d$)中所定义时，则 $\varphi_A=\hat{f}_A$。由于$\{f_A\}$是 $L^2$ 内的 Cauchy 序列，关系(1)表明$\{\varphi_A\}$是 $L^2$ 内的 Cauchy 序列；且由于 $L^2$ 是完备的，当 $A\to\infty$ 时，$\{\varphi_A\}$收敛于 $L^2$ 的一个元素，我们称为 $\hat{f}$。注意，如果 $f\in L^1\cap L^2$，则 $\varphi_A(t)$点态收敛于原先定义了的 $f$ 的 Fourier 变式，而这个点态极限几乎处处与 $L^2$-极限一致(定理 3.12)。

映射 $f\to\hat{f}$ 的定义域已由 $L^1\cap L^2$ 扩充到 $L^2$。此外，由(1)得到$\|\varphi_A\|_2=\|f_A\|_2$，于是

(8) $$\|\hat{f}\|_2=\lim_{A\to\infty}\|\varphi_A\|_2=\lim_{A\to\infty}\|f_A\|_2=\|f\|_2$$

这样，我们证明了($a$)，($b$)，和($d$)的头一半。

我们对 $\hat{f}$ 引进临时性的记号 $\Phi f$。于是 $\Phi f$ 是函数 $\varphi_A$ 的 $L^2$-极限。如果 $f\in L^2$，则 $\Phi$ 是 $L^2$ 到 $L^2$ 内的一个等距。对 $g\in L^2$，类似地把 $\Psi g$ 定义为函数

(9) $$\int_{-A}^{A}g(t)e^{ixt}dm(t)$$

的 $L^2$-极限。由于$(\Psi g)(x)=\Phi g(-x)$，因此，$\Psi$ 是一个$L^2$ 到 $L^2$ 内的等距。如果 $f$ 和 $\hat{f}$ 两者均属于 $L^1\cap L^2$，则由定理 9.11 得到

$$\Psi\Phi f=f \tag{10}$$

根据命题 9.8，如果 $f\in L^1\cap L^2$，且 $\lambda>0$，$f*h_\lambda$ 便满足这些要求.因此

$$\Psi\Phi(f*h_\lambda)=f*h_\lambda \tag{11}$$

当 $\lambda\to 0$ 时，$\|f*h_\lambda-f\|_2\to 0$(定理 9.10)，由于 $\Psi\Phi$ 是一个等距，对每个 $f\in L^1\cap L^2$ 得到(10). 因为 $L^1\cap L^2$ 在 $L^2$ 内是稠密的，对每个 $f\in L^2$，(10)式成立. 这就证明了($d$)的后半部分.

但由于算子 $\Phi$ 和 $\Psi$ 所处的地位显然可以互相交换，因而对每个 $g\in L^2$，关系式 $\Phi\Psi g=g$ 也都是正确的. 这就是说，如果 $f=\Psi g$，则 $g=\hat{f}$. 因此，映射 $f\to\hat{f}$ 把 $L^2$ 映到 $L^2$ 上.

最后，恒等式

$$4f\bar{g}=|f+g|^2-|f-g|^2+i|f+ig|^2-i|f-ig|^2 \tag{12}$$

表明 $L^2$ 到 $L^2$ 上的每个等距映射也保持内积. 换句话说，Parseval 公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)}dm(t) \tag{1}$$

对 $f\in L^2$ 和 $g\in L^2$ 是成立的.

这就得出($c$)，证完.

**9.14 定理** 如果 $f\in L^2$ 和 $\hat{f}\in L^1$，则

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{ixt}dm(t)\ \text{a. e.}$$

**证明** 这是定理 9.13($d$)的一个系.

**9.15 评注** 如果 $f\in L^1$，对每个 $t$，公式 9.1(4)明确地定义 $\hat{f}(t)$. 如果 $f\in L^2$，Plancherel 定理唯一地确定 $\hat{f}$ 作为 Hilbert 空间 $L^2$ 的元素，但作为点函数的 $\hat{f}(t)$ 仅仅是几乎处处被确定. 这是 $L^1$ 和 $L^2$ 中 Fourier 变式理论之间的重要不同之处. 作为点函数，$\hat{f}(t)$的不确定性将给我们正要讨论的问题带来一些困难.

**9.16 $L^2$ 的平移不变子空间** $L^2$ 的子空间 $M$ 称为平移不变的，如果对每个实数 $\alpha$，$f\in M$ 蕴涵着 $f_\alpha\in M$，而 $f_\alpha=f(x-\alpha)$。在我们研究 Fourier 变式的时候，平移早已起着重要的作用。现在我们提出一个问题，它的解决将提供一个如何应用 Plancherel 定理的实例。(在第十九章中将出现其它的应用。)此问题是：

描述 $L^2$ 的闭平移不变子空间。

令 $M$ 是 $L^2$ 的闭平移不变子空间，$\hat{M}$ 是 $M$ 在 Fourier 变式下的像。则 $\hat{M}$ 是闭的(因为 Fourier 变式是 $L^2$-等距。)如果 $f_\alpha$ 是 $f$ 的一个平移，$f_\alpha$ 的 Fourier 变式是 $\hat{f}e_\alpha$，这里 $e_\alpha(t)=e^{-i\alpha t}$；在定理 9.2 中，对 $f\in L^1$，我们证明过这一点；如同在定理 9.13(*d*)中所看到的一样，此结果扩充到了 $L^2$。由此得到，对一切 $\alpha\in R^1$，$\hat{M}$ 用 $e_\alpha$ 来乘是不变的。

设 $E$ 是 $R^1$ 中任一个可测集。如果 $\hat{M}$ 是一切 $\varphi\in L^2$ 的集，而 $\varphi$ 在 $E$ 上几乎处处为零，则 $\hat{M}$ 确实是 $L^2$ 的一个子空间，它用所有的 $e_\alpha$ 来乘是不变的(注意，$|e_\alpha|=1$，因此，如果 $\varphi\in L^2$，则 $\varphi e_\alpha\in L^2$)，而 $\hat{M}$ 还是闭集。证明：当且仅当 $\varphi$ 与每个 $\psi\in L^2$ 正交，而 $\psi$ 在 $E$ 的余集上几乎处处为零时，$\varphi\in\hat{M}$。

设 $M$ 为在 Fourier 变式的作用下 $\hat{M}$ 的逆像，则 $M$ 是一个具有所要性质的空间。

现在，我们可以猜到，每一个我们所要求的空间 $M$ 都可以从集 $E\subset R^1$ 通过这种方式得出。要证明这一点，我们就得证明，对每个闭的平移不变的 $M\subset L^2$ 对应一个集 $E\subset R^1$，使得当且仅当在 $E$ 上几乎处处 $\hat{f}(t)=0$ 时 $f\in M$。从 $M$ 构造 $E$ 的明显方法是对每个 $f\in M$ 联系着一个由使 $\hat{f}(t)=0$ 的所有点组成集 $E_f$，并定义 $E$ 为这些集 $E_f$ 的交。但这个明显的方法带来了严重的困难：每个 $E_f$ 只能确定到相差一个测度为零的集。如果 $\{A_i\}$ 是可数集族，每个 $A_i$ 确定到相差一个测度为零的集则 $\bigcap A_i$ 也确定到相差一个测度

为零的集. 但是存在有不可数个 $f\in M$, 这样在 $\cap E_f$ 上我们就会失去一切控制.

如果考虑我们的函数是作为 Hilbert 空间 $L^2$ 的元素, 而本来就不是作为点函数的话, 这些困难就完全不会产生.

现在我们将证明这个猜想. 令 $\hat{M}$ 是闭平移不变子空间 $M\subset L^2$ 在 Fourier 变式作用下的象. 设 $P$ 是 $L^2$ 到 $\hat{M}$ 上的正交射影(定理 4.11): 对每个 $f\in L^2$ 对应唯一的 $Pf\in\hat{M}$, 使得 $f-Pf$ 正交于 $\hat{M}$, 因此

(1) $$f-Pf\perp Pg \qquad (f \text{ 和 } g\in L^2)$$

并由于 $\hat{M}$ 对用 $e_\alpha$ 相乘是不变的, 故有

(2) $$f-Pf\perp (Pg)e_\alpha \qquad (f, g\in L^2, \alpha\in R^1)$$

如果我们回忆起在 $L^2$ 里内积是如何定义的, 我们就会看到(2)式等价于

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty}(f-Pf)\cdot\overline{Pg}\cdot e_{-\alpha}dm=0 \qquad (f, g\in L^2, \alpha\in R^1)$$

这就说明

(4) $$(f-Pg)\cdot\overline{Pg}$$

的 Fourier 变式是 0. 函数(4)是两个 $L^2$-函数的乘积, 因此属于 $L^1$. 现在, Fourier 变式的唯一性定理表明函数(4)几乎处处为零. 如果用 $Pg$ 代替 $\overline{Pg}$ 也是真实的. 因此

(5) $$f\cdot Pg=(Pf)\cdot(Pg) \qquad (f, g\in L^2)$$

交换 $f$ 和 $g$ 的位置, 由(5)得到

(6) $$f\cdot Pg=g\cdot Pf \qquad (f, g\in L^2)$$

现设 $g$ 是 $L^2$ 内的一个固定的正函数; 例如, 令 $g(t)=e^{-|t|}$. 定义

(7) $$\varphi(t)=\frac{(Pg)(t)}{g(t)}$$

$(Pg)(t)$仅可能几乎处处被确定；选取任一个在(7)中决定的 $\varphi$. 于是(6)变为

$$Pf=\varphi\cdot f \qquad (f\in L^2) \tag{8}$$

如果 $f\in\hat{M}$, 则 $Pf=f$. 这就是说，$P^2=P$ 并由此得到 $\varphi^2=\varphi$, 因为

$$\varphi^2\cdot g=\varphi\cdot Pg=P^2g=Pg=\varphi\cdot g \tag{9}$$

由于 $\varphi^2=\varphi$, 我们几乎处处有 $\varphi=0$ 或 1, 如果我们令 $E$ 是使得 $\varphi(t)=0$ 的一切 $t$ 的集，因为当且仅当 $f=Pf=\varphi\cdot f$ 时，$f\in\hat{M}$, 故 $\hat{M}$ 确实由那些在 $E$ 上几乎处处为零的 $f\in L^2$ 所组成.

因此，我们的问题得到了下述的解答.

**9.17 定理** 每个可测集 $E\subset R^1$ 都对应于一个由所有在 $E$ 上使 $\hat{f}=0$ a.e. 的 $f\in L^2$ 组成的空间 $M_E$, 则 $M_E$ 是 $L^2$ 的闭平移不变子空间. $L^2$ 的每个闭平移不变子空间是某个 $E$ 的 $M_E$, 而且 $M_A=M_B$ 当且仅当

$$m((A\cup B)\cup(B-A))=0$$

唯一性的证明是容易的；我们把它留给读者来完成.

当然，在其它函数空间也可能提出上述问题. 此问题在 $L^1$ 中已较详细地研究过. 已知的结果表明，这一场合要比 $L^2$ 的场合复杂得难以想像.

## Banach 代数 $L^1$

**9.18 定义** 设 $A$ 是一个 Banach 空间，如果 $A$ 中定义了一种乘法，并满足不等式

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\| \qquad (x \text{ 和 } y\in A) \tag{1}$$

结合律 $x(yz)=(xy)z$, 分配律

$$x(y+z)=xy+xz,\ (y+z)x=yx+zx \qquad (x,\ y,\ z\in A) \tag{2}$$

和关系

(3) $$(\alpha x)y=x(\alpha y)=\alpha(xy)$$

而 $\alpha$ 是任意纯量，则称 $A$ 为Banach 代数.

**9.19 例**

(*a*) 令 $A=C(X)$, $X$ 是紧 Hausdorff 空间，赋以上确界范数，并赋以函数的通常的点态乘法：$(fg)(x)=f(x)g(x)$. 这是一个交换的 Banach 代数($fg=gf$)，有单位元(常量函数 1).

(*b*) $C_0(R^1)$是一个交换 Banach 代数，但没有单位元，即不存在元素 $u$ 使得对所有 $f\in C_0(R^1)$有 $uf=f$.

(*c*) $R^k$(或任一个 Banach 空间)上所有线性算子的集，如果其算子的范数如定义 5.3 一样，并由

$$(A+B)(x)=Ax+Bx,\ ABx=A(Bx)$$

定义算子间的加法和乘法，则此算子集是一个带有单位元的非交换 Banach 代数(除非 $k=1$).

(*d*) 如果用卷积定义乘法，则 $L^1$ 是 Banach 空间；由于

$$\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$$

说明满足范数不等式. 可以直接证明结合律(Fubini 定理的一个应用)，但我们也可以处理如下：

因为 $f*g$ 的 Fourier 变式是$\hat{f}\cdot\hat{g}$，而已知映射 $f\to\hat{f}$ 是一一的. 对每个 $t\in R^1$，根据复数的结合律有

$$\hat{f}(t)[\hat{g}(t)\hat{h}(t)]=[\hat{f}(t)\hat{g}(t)]\hat{h}(t)$$

由此得到

$$f*(g*h)=(f*g)*h$$

用同样的方法，立即会得到$f*g=g*f$. 容易看到定义 9.18 中剩下的要求在 $L^1$ 中也是成立的.

因此 $L^1$ 是一个交换的 Banach 代数. Fourier 变式是一个$L^1$ 到 $C_0$ 内的代数同构. 因此，没有 $f\in L^1$ 使得$\hat{f}\equiv1$，所以 $L^1$ 没有单位元.

**9.20 复同态** Banach 代数上最重要的复函数是 $A$ 到复数域内的同态. 确切地说是存在保持乘法的线性泛函, 即是说, 此函数 $\varphi$ 对所有的 $x, y \in A$ 和一切纯量 $\alpha, \beta$, 有

$$\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y), \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$$

请注意, 在这个定义中并没有提出有界性的假设. 有趣的是这种假设是多余的:

**9.21 定理** 如果 $\varphi$ 是 Banach 代数 $A$ 上的复同态, 则作为线性泛函, $\varphi$ 的范数至多是 1.

**证明** 为了得出矛盾, 假设对某个 $x_0 \in A$, $|\varphi(x_0)|>\|x_0\|$. 令 $\lambda=\varphi(x_0)$, $x=x_0/\lambda$. 则 $\|x\|<1$ 而 $\varphi(x)=1$.

由于 $\|x^n\| \leqslant \|x\|^n$ 和 $\|x\|<1$, 则元素

(1) $$s_n=-x-x^2-\cdots-x^n$$

是 $A$ 的一个 Cauchy 序列. 因 $A$ 作为 Banach 空间是完备的, 故存在 $y \in A$, 使得 $\|y-s_n\| \to 0$, 并容易看出 $x+s_n=xs_{n-1}$, 于是

(2) $$x+y=xy$$

因此, $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x)\varphi(y)$, 然而, 当 $\varphi(x)=1$ 时, 这是不可能的.

**9.22 $L^1$ 的复同态** 设 $\varphi$ 是 $L^1$ 的复同态, 即 $\varphi$ 是保持下述关系的线性泛函(根据定理 9.21, 其范数至多是 1).

(1) $$\varphi(f*g)=\varphi(f)\varphi(g) \qquad (f \text{ 和 } g \in L^1)$$

根据定理 6.16, 存在 $\beta \in L^\infty$, 使得

(2) $$\varphi(f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\beta(x)dm(x) \qquad (f \in L^1)$$

现在我们利用关系(1), 来看一看对于 $\beta$ 我们还能说些什么. 一方面,

$$\varphi(f*g)=\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)\beta(x)dm(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\beta(x)dm(x)\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dm(y)$$

(3) $$=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)dm(y)\int_{-\infty}^{\infty}f_y(x)\beta(x)dm(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\varphi(f_y)dm(y)$$

另一方面，

(4) $$\varphi(f)\varphi(g)=\varphi(f)\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\beta(y)dm(y)$$

设$\varphi$不恒等于零. 固定$f\in L^1$使得$\varphi(f)\neq 0$. 由于对每个$g\in L^1$，(3)的最后一个积分都等于(4)的右边. 因此，定理 6.16的唯一性表明对几乎所有的$y$

(5) $$\varphi(f)\beta(y)=\varphi(f_y)$$

但是，$y\to f_y$是$R^1$到$L^1$内的连续映射(定理 9.5)和在$L^1$上$\varphi$是连续的. 因此(5)的右边是$y$的连续函数，并且可以假设$\beta$是连续的[如果需要，可以在测度为零的集上改变$\beta(y)$而不影响(2)]. 如果我们用$x+y$代替$y$，然后在(5)中用$f_x$代替$f$，得到

$$\varphi(f)\beta(x+y)=\varphi(f_{x+y})=\varphi((f_x)_y)$$
$$=\varphi(f_x)\beta(y)=\varphi(f)\beta(x)\beta(y)$$

于是

(6) $$\beta(x+y)=\beta(x)\beta(y)\qquad (x\text{ 和 }y\in R^1)$$

由于$\beta$不恒等于 0，则由(6)得到$\beta(0)=1$，而$\beta$的连续性表明，存在$\delta>0$使得

(7) $$\int_0^\delta\beta(y)dy=c\neq 0$$

于是

(8) $$c\beta(x)=\int_0^\delta\beta(y)\beta(x)dy=\int_0^\delta\beta(y+x)dy$$

$$=\int_x^{x+\delta}\beta(y)dy$$

由于$\beta$连续,最后一个积分是$x$的可微函数；于是(8)表明$\beta$是可微的。对于$y$微分(6),然后令$y=0$;结果有

(9) $\qquad \beta'(x)=A\beta(x), \qquad A=\beta'(0)$

因此,$\beta(x)e^{-Ax}$的导数是0,并由于$\beta(0)=1$,得到

(10) $\qquad \beta(x)=e^{Ax}$

但$\beta$在$R^1$上有界,因此$A$必定是纯虚数，并得出结论:存在$t\in R^1$,使得

(11) $\qquad \beta(x)=e^{-itx}$

这样我们就得出 Fourier 变式.

**9.23 定理** $L^1$上的每个复同态$\varphi$(除$\varphi=0$外),都对应有唯一的$t\in R^1$,使得$\varphi(f)=\hat{f}(t)$.

上面已证明了$t$的存在性. 唯一性可由观察得出:如果$t\neq s$,则存在$f\in L^1$使得$\hat{f}(t)\neq\hat{f}(s)$;把$f(x)$当作$e^{-|x|}$的一个适当的平移.

## 习　题

1　设$f\in L^1$, $f>0$. 证明对每个$y\neq 0$, $|\hat{f}(y)|<\hat{f}(0)$.

2　计算一个区间的特征函数的 Fourier 变式. 对$n=1, 2, 3, \cdots$,令$g_n$是$[-n,n]$的特征函数,$h$是$[-1,1]$的特征函数,并明确地计算$g_n*h$. (图象是逐段线性的.) 证明$g_n*h$是函数$f_n\in L^1$的 Fourier 变式;除一个常数因子外

$$f_n(x)=\frac{\sin x\cdot\sin nx}{x^2}$$

证明$\|f_n\|_1\to\infty$,并得到:映射$f\to\hat{f}$把$L^1$映到$C_0$的一个真子集内,而这个映射的值域在$C_0$中是稠密的.

3　求极限

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{\sin\lambda t}{t}e^{itx}dt \qquad (-\infty<x<\infty)$$

其中 $\lambda$ 是一个正常数.

4　给出一个 $f\in L^2$ 的例子，使得 $f\notin L^1$ 但 $\hat{f}\in L^1$. 这在什么情况下才会发生?

5　如果 $f\in L^1$ 和 $\int|t\hat{f}(t)|dm(t)<\infty$，证明 $f$ 几乎处处同一个可微函数一致，而此函数的导数是

$$i\int_{-\infty}^{\infty}t\hat{f}(t)e^{ixt}dm(t)$$

6　设 $f\in L^1$，$f$ 几乎处处可微，且 $f'\in L^1$. 由此能得出 $f'$ 的 Fourier 变式就是 $ti\hat{f}(t)$吗?

7　令 $S$ 是 $R^1$ 中具有下述性质的所有函数 $f$ 的类: $f$ 是无限次可微的，并且对 $m$ 和 $n=0, 1, 2, \cdots$，存在数 $A_{mn}(f)<\infty$，使得

$$|x^nD^mf(x)|\leqslant A_{mn}(f) \qquad (x\in R^1)$$

$D$ 是通常的微分算子.

证明 Fourier 变式把 $S$ 映到 $S$ 上.

找出 $S$ 的元素的例子.

8　如果 $p$ 和 $q$ 是共轭指数, $f\in L^p$, $g\in L^q$, 而 $h=f*g$, 证明 $h$ 是一致连续的. 如果还有 $1<p<\infty$, 则 $h\in C_0$; 说明对某些 $f\in L^1$, $g\in L^\infty$ 这是不对的.

9　设 $1\leqslant p<\infty$, $f\in L^p$ 和

$$g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$$

证明 $g\in C_0$. 如果 $f\in L^\infty$，关于 $g$ 能有些什么结果?

10　令 $C^\infty$ 是 $R^1$ 上一切无限次可微复函数的类, $C_c^\infty$ 是由一切支集是紧的 $g\in C^\infty$ 所组成. 证明 $C_c^\infty$ 不能单独由 0 组成.

令 $L^1_{loc}$ 是一切局部地属于 $L^1$ 的 $f$ 的类; 即是说, $f\in L^1_{loc}$, 如果 $f$ 是可测的, 且对每个有界区间 $I$, $\int_I|f|<\infty$.

如果 $f\in L^1_{loc}$ 和 $g\in C_c^\infty$, 证明 $f*g\in C^\infty$.

证明存在 $C_c^\infty$ 中的序列 $\{g_n\}$, 当 $n\to\infty$时, 对每个 $f\in L^1$ 有

$$\|f*g_n-f\|_1\to 0$$

(与定理 9.10 比较.) 证明 $\{g_n\}$ 也可以这样选取，使得对每个 $f\in L^1_{loc}$ 几乎处

处有$(f*g_n)(x)\to f(x)$；事实上，对适当的$\{g_n\}$，在每一个使$f$等于它的不定积分的导数的点$x$都能保证收敛.

证明如果$f\in L^1$，当$\lambda\to 0$时，纵然$h_\lambda$没有紧的支集($h_\lambda$定义在9.7节)，还是几乎处处有$(f*h_\lambda)(x)\to f(x)$，而且$f*h_\lambda\in C^\infty$.

11 求关于$f$和$\hat{f}$共同具有或单独具有的条件，以保证下述形式论证的正确性：如果

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx$$

和

$$F(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(x+2k\pi)$$

则$F(x)$是周期函数，周期为$2\pi$，$F$的第$n$个Fourier系数是$\varphi(n)$，因此$F(x)=\Sigma\varphi(n)e^{inx}$. 特别，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(2k\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n)$$

更一般，如果$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha\beta=2\pi$，有

(*) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k\beta)=\alpha\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)$$

当$\alpha\to 0$时，等式(*)右边的极限有什么可说的(当然是对"好的"函数)？这与反演定理是一致的吗？

[(*)是著名的Poisson求和公式.]

12 在习题11中取$f(x)=e^{-|x|}$并导出恒等式

$$\frac{e^{2\pi\alpha}+1}{e^{2\pi\alpha}-1}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+n^2}$$

13 如果$0<c<\infty$，定义$f_c(x)=\exp(-cx^2)$

(a) 计算$\hat{f}_c$. 提示：如果$\varphi=\hat{f}_c$，由分部积分得到

$$2c\varphi'(t)+t\varphi(t)=0.$$

(b) 证明存在一个(且仅一个)$c$，使得$\hat{f}_c=f_c$.

(c) 证明$f_a*f_b=\gamma f_c$；用$a$和$b$的显式表示$\gamma$和$c$.

(d) 在习题11中，取$f=f_c$. 其结果是什么样一个恒等式？

14 对$f\in L^1(R^k)$，Fourier变式能用

$$\hat{f}(y)=\int_{R^k} f(x)e^{-ix\cdot y}dm_k(x) \quad (y\in R^k)$$

来定义．这里的 $x\cdot y=\Sigma\xi_i\eta_i$，如果 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$．$m_k$ 是 $R^k$ 上的 Lebesgue测度，为了方便将它除以 $(2\pi)^{k/2}$．证明反演定理和本文中的 Plancherel 定理，以及与定理 9.23 类似的命题．

15 如果 $f\in L^1(R^k)$，$A$ 是 $R^k$ 上的线性算子并且 $g(x)=f(Ax)$，$\hat{g}$ 与 $\hat{f}$ 有何联系？如果 $f$ 是旋转不变的，即是说，如果 $f(x)$ 仅依赖于从原点到 $x$ 的欧氏距离，证明这对 $\hat{f}$ 同样是对的．

16 $R^k$ 上函数 $f$ 的 Laplace 算子是

$$\Delta f=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

这里假设偏导数是存在的．如果 $g=\Delta f$ 且满足一切必要的可积条件，则 $\hat{f}$ 和 $\hat{g}$ 之间有什么关系？Laplace 算子同平移是可交换的．证明它同旋转也是可交换的，即当 $f$ 有连续二阶导数，$A$ 是 $R^k$ 的一个旋转时，有

$$\Delta(f\circ A)=\Delta f\cdot A$$

（说明在 $f$ 有紧支集的附加条件下证明此点就足够了．）

17 证明 $R^1$ 的每个 Lebesgue 可测特征标是连续的．对 $R^k$ 同样证明之．（改写定理 9.23 的部分证明．）同第八章习题24比较．

# 第十章　全纯函数的初等性质

## 复微分

我们现在来研究定义在复平面的子集内的复函数. 为了方便起见，本书以后将采用一些标准符号.

**10.1　定义**　若 $r>0$，且 $a$ 为一复数，

(1) $$D(a;r)=\{z: |z-a|<r\}$$

是中心在 $a$，半径为 $r$ 的开圆盘. $\bar{D}(a;r)$ 是 $D(a;r)$ 的闭包，且

(2) $$D'(a;r)=\{z: 0<|z-a|<r\}$$

是中心在 $a$，半径为 $r$ 的去心圆盘.

拓扑空间 $X$ 内的集 $E$ 称为不连通的，如果 $E$ 是两个非空集 $A$ 及 $B$ 的并，且

(3) $$\bar{A}\cap B=\varnothing=A\cap\bar{B}$$

若 $A$ 和 $B$ 如上述，且 $V$ 和 $W$ 分别为 $\bar{A}$ 及 $\bar{B}$ 的余集，便有 $A\subset W$ 和 $B\subset V$，因此

(4) $$E\subset V\cup W, E\cap V\neq\varnothing, E\cap W\neq\varnothing, E\cap V\cap W=\varnothing$$

相反，如果开集 $V$ 和 $W$ 存在，使(4)成立，取 $A=E\cap W$，$B=E\cap V$，容易看出 $E$ 是不连通的.

如果 $E$ 是闭的且不连通，则(3)表明 $E$ 是两个不相交的非空闭集的并；因若 $\bar{A}\subset A\cup B$ 且 $\bar{A}\cap B=\varnothing$，则 $\bar{A}=A$.

如果 $E$ 是开的且不连通，则(4)表明 $E$ 是两个不相交的非空开集，即 $E\cap V$ 及 $E\cap W$ 的并.

每一个由单独的一点组成的集明显是连通的. 若 $x\in E$，包含 $x$ 的 $E$ 的连通子集的集族 $\Phi_x$ 因此非空. 容易看出 $\Phi_x$ 的所有元素的

并是连通的，并且它是$E$的一个最大连通子集. 这些集称为$E$的分支. 因此$E$的任何两个分支是不相交的. 并且$E$是它的分支的并.

区域，是指复平面的一个非空连通开子集. 因为在这平面内每一个开集$\Omega$都是圆盘的并，又因为所有圆盘是连通的，故$\Omega$的每个分支都是开集. 这样，每个平面开集都是不相交区域的并. 从现在起，字母$\Omega$将表示一个平面开集.

**10.2 定义** 假设$f$为定义在$\Omega$内的复函数. 如果$z_0\in\Omega$，且

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{1}$$

存在，我们记这极限为$f'(z_0)$，并称它为$f$在$z_0$的导数. 如果对每一个$z_0\in\Omega$，$f'(z_0)$都存在，我们就称$f$在$\Omega$内是全纯的(或解析的). 所有在$\Omega$内全纯的函数类将记为$H(\Omega)$.

很明显，若对每个$\varepsilon>0$，对应有$\delta>0$，使得对所有$z\in D'(z_0;\delta)$

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon \tag{2}$$

则$f'(z_0)$存在. 这样，$f'(z_0)$是作为复数的商的极限而得出的一个复数. 注意$f$是$\Omega$到$R^2$内的映射，并且定义8.22将这样的映射对应于另一类型的导数，即$R^2$上的一个线性算子. 在现在的情况下，若(2)满足，这个线性算子就是乘以$f'(z_0)$(把$R^2$看作复数域)，我们留下它给读者验证.

**10.3 评注** 如果$f\in H(\Omega)$和$g\in H(\Omega)$，则应用通常的微分法则，也有$f+g\in H(\Omega)$和$fg\in H(\Omega)$，因此$H(\Omega)$是一个环.

更有趣的是全纯函数叠加仍是全纯函数：若$f\in H(\Omega)$，$f(\Omega)\in\Omega_1$，$g\in H(\Omega_1)$. 且$h=g\circ f$，则$h\in H(\Omega)$，并且$h'$可由链式法则计算

$$h'(z_0)=g'(f(z_0))f'(z_0) \qquad (z_0\in\Omega) \tag{1}$$

为证明这一点，固定 $z_0\in\Omega$，并令 $w_0=f(z_0)$，则

(2) $$f(z)-f(z_0)=[f'(z_0)+\varepsilon(z)](z-z_0)$$

(3) $$g(w)-g(w_0)=[g'(w_0)+\eta(w)](w-w_0)$$

这里当 $z\to z_0$ 时，$\varepsilon(z)\to 0$，且当 $w\to w_0$ 时，$\eta(w)\to 0$. 令 $w=f(z)$，并把(2)代入(3)：若 $z\neq z_0$，

(4) $$\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}$$
$$=[g'(f(z_0))+\eta(f(z))][f'(z_0)+\varepsilon(z)]$$

$f$ 的可微性保证 $f$ 在 $z_0$ 连续. 因此(1)由(4)得出.

**10.4 例** 对 $n=0,1,2,\cdots$，$z^n$ 在整个平面全纯，并且 $z$ 的每一个多项式也在整个平面全纯. 容易直接验证 $1/z$ 在 $\{z: z\neq 0\}$ 全纯. 因此，在链式法则中取 $g(w)=1/w$，我们看到，如果 $f_1$ 及 $f_2$ 均在 $H(\Omega)$ 中，而且 $\Omega_0$ 为 $\Omega$ 的开子集，$f_2$ 在 $\Omega_0$ 内无零点，则

$$f_1/f_2\in H(\Omega_0).$$

在整个平面全纯的函数(这种函数称为整函数)的另外一个例子是在引言中定义的指数函数. 事实上，我们在那里看到在定义 10.2 意义下，exp 是处处可微的，并且对每个复数 $z$，$\exp'(z)=\exp(z)$.

**10.5 幂级数** 对幂级数的理论我们仅假定下面这一点是已知的. 就是对每一个幂级数

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

对应有一个数 $R\in[0,\infty]$，使得对每一个 $r<R$，此级数在 $\bar{D}(a;r)$ 内绝对一致收敛，而当 $z\notin\bar{D}(a;R)$ 时，这个级数发散. 这个"收敛半径"$R$ 可由根式判别法给出

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}$$

如果对每个圆盘$D(a;r)\subset\Omega$，对应有一个级数(1)，这级数对所有$z\in D(a;r)$均收敛于$f(z)$，我们称在$\Omega$内定义的函数$f$ 在$\Omega$内可表示为幂级数.

**10.6 定理** 如果$f$在$\Omega$内可表示为幂级数，则$f\in H(\Omega)$，而且$f'$在$\Omega$内也可表示为幂级数. 事实上，若对$z\in D(a;r)$

(1) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

则对这些$z$我们同时有

(2) $$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1}$$

**证明** 若级数(1)在$D(a;r)$内收敛，则根式判别法表明，级数(2)也在$D(a;r)$内收敛. 不失一般性，取$a=0$，记级数(2)的和为$g(z)$. 固定$w\in D(a;r)$，并选取$\rho$，使$|w|<\rho<r$. 若$z\neq w$，我们有

(3) $$\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left[\frac{z^n-w^n}{z-w}-nw^{n-1}\right]$$

方括号内的表达式当$n=1$时为0，当$n\geqslant2$时为

(4) $$(z-w)\sum_{k=1}^{n-1}kw^{k-1}z^{n-k-1}$$

如果$|z|<\rho$，和式(4)的绝对值便小于

(5) $$\frac{n(n-1)}{2}\rho^{n-2}$$

于是

(6) $$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\right|\leqslant|z-w|\sum_{n=2}^{\infty}n^2|c_n|\rho^{n-2}$$

因为$\rho<r$，后面的级数收敛. 所以(6)式左边当$z\to w$时趋于零.

这说明$f'(w)=g(w)$，并且完成了证明.

**系** 因为$f'$同样满足$f$的假设条件，这定理能应用于$f'$. 这就得出$f$具有所有阶的导数. 每个导数在$\Omega$内均可表示为幂级数，并且若(1)成立，则

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k} \tag{7}$$

由(1)推出

$$k!c_k=f^{(k)}(a) \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

因此，对每个$a\in\Omega$，有唯一的序列$\{c_n\}$使(1)成立.

我们现在叙述一个构造可表示为幂级数的函数的方法. 它的特殊情形在下一步中是重要的.

**10.7 定理** 假设$\mu$为可测空间$X$上复(有限)测度，$\varphi$为$X$上复可测函数，$\Omega$为在平面上与$\varphi(X)$不相交的一个开集，且

$$f(z)=\int_X\frac{d\mu(\zeta)}{\varphi(\zeta)-z} \qquad (z\in\Omega) \tag{1}$$

则$f$在$\Omega$内可表示为幂级数.

**证明** 假设$D(a;r)\subset\Omega$，由于对每个$z\in D(a;r)$及每个$\zeta\in X$，

$$\left|\frac{z-a}{\varphi(\zeta)-a}\right|\leqslant\left|\frac{z-a}{r}\right|<1 \tag{2}$$

成立、故几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\varphi(\zeta)-a)^{n+1}}=\frac{1}{\varphi(\zeta)-z} \tag{3}$$

对每个固定的$z\in D(a;r)$在$X$上一致收敛. 因此级数(3)可代入(1)，且$f(z)$可通过交换求和及积分的次序来计算. 这样，便得出

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (z\in D(a;r)) \tag{4}$$

此处

(5) $$c_n=\int_X \frac{d\mu(\zeta)}{(\varphi(\zeta)-a)^{n+1}} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

注　级数(4)在$D(a;r)$内的收敛性是这个证明的一个推论. 我们也可以由(5)推出这个结论,因为(5)表明

(6) $$|c_n|\leqslant\frac{|\mu|(X)}{r^{n+1}} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

## 沿路径的积分

在这一章中，我们的首要目标是定理10.6的逆定理：每个$f\in H(\Omega)$在$\Omega$内可表示为幂级数. 最快的途径是通过Cauchy定理. 它导出一个重要的全纯函数积分表达式. 在这节里，将展示所需要的积分理论. 我们尽可能使它简单，并且仅仅把它看作研究全纯函数性质的一个有用工具.

**10.8　定义**　如果$X$是一个拓扑空间. $X$中的一条曲线是指紧区间$[\alpha,\beta]\subset R^1$到$X$内的连续映射$\gamma$;这里$\alpha<\beta$,我们称$[\alpha,\beta]$为$\gamma$的参数区间,且记$\gamma$的值域为$\gamma^*$. 就是说,$\gamma$是一个映射,而$\gamma^*$则是所有点$\gamma(t)$的集,其中$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

若$\gamma$的始点$\gamma(\alpha)$和它的终点$\gamma(\beta)$重合,我们称$\gamma$为闭曲线.

路径是指平面内一条逐段连续可微的曲线. 更明白地说，一条具有参数区间$[\alpha,\beta]$的路径就是$[\alpha,\beta]$上的一个满足下列条件的连续复函数$\gamma$:存在有限个点$s_j$，使得$\alpha=s_0<s_1<\cdots<s_n=\beta$,且$\gamma$限制在每个区间$[s_{j-1},s_j]$时,在$[s_{j-1},s_j]$上有连续导数,而$\gamma$在点$s_1,\cdots,s_{n-1}$的左、右导数可以不同.

闭路径是一条闭曲线,它同时也是一条路径.

现假设$\gamma$是一条路径,$f$为$\gamma^*$上的连续函数,$f$沿$\gamma$的积分定义为在$\gamma$的参数区间$[\alpha,\beta]$上的积分

(1) $$\int_\gamma f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

设 $\varphi$ 为区间 $[\alpha_1,\beta_1]$ 到 $[\alpha,\beta]$ 上的连续可微一一映射，使得 $\varphi(\alpha_1)=\alpha$, $\varphi(\beta_1)=\beta$, 并令 $\gamma_1=\gamma\circ\varphi$. 则 $\gamma_1$ 是具有参数区间 $[\alpha_1,\beta_1]$ 的路径, $f$ 沿 $\gamma_1$ 的积分为

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt\\ &=\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt\\ &=\int_\alpha^\beta f(\gamma(s))\gamma'(s)ds\end{aligned}$$

于是我们“改变参变量”并不改变这积分:

(2) $$\int_{\gamma_1} f(z)dz=\int_\gamma f(z)dz$$

当(2)对一对路径 $\gamma$ 及 $\gamma_1$ (且对所有 $f$)成立时，我们认为 $\gamma$ 和 $\gamma_1$ 是等价的.

可以用等价的路径代替一条路径，也就是说，可以按我们的愿望选择参数区间，这一点对我们是会方便的. 例如，如果 $\gamma_1$ 的终点重合于 $\gamma_2$ 的起点，我们就可以设置它们的参数区间，使得 $\gamma_1$ 及 $\gamma_2$ 联成一条路径 $\gamma$，对每个在 $\gamma^*=\gamma_1^*\cup\gamma_2^*$ 上的连续函数 $f$，具有性质

(3) $$\int_\gamma f=\int_{\gamma_1} f+\int_{\gamma_2} f$$

假设 $[0,1]$ 是路径 $\gamma$ 的参数区间，且 $\gamma_1(t)=\gamma(1-t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 我们称 $\gamma_1$ 为 $\gamma$ 的反向路径. 理由是，对任何 $\gamma_1^*=\gamma^*$ 上连续的函数 $f$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt\\ &=-\int_0^1 f(\gamma(1-t))\gamma'(1-t)dt\end{aligned}$$

$$= -\int_0^1 f(\gamma(s))\gamma'(s)ds$$

于是

(4) $$\int_{\gamma_1} f = -\int_\gamma f$$

由(1)我们得到不等式

(5) $$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \|f\|_\infty \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt$$

这里$\|f\|_\infty$是$|f|$在$\gamma^*$上的最大值，并且(5)式后面的积分（由定义）是$\gamma$的长度.

10.9 特殊情形

(a) 如果$a$是一个复数且$\gamma>0$，则由

(1) $$\gamma(t)=a+re^{it} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

定义的路径称为中心在$a$，半径为$r$的正向圆周. 我们有

(2) $$\int_\gamma f(z)dz = ir\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$$

且$\gamma$的长为$2\pi r$，如所期望的一样.

(b)如果$a$和$b$是复数，由

(3) $$\gamma(t)=a+(b-a)t \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

给出的路径$\gamma$是有向区间$[a,b]$，它的长为$|b-a|$，且

(4) $$\int_{[a,b]} f(z)dz = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]dt$$

如果

(5) $$\gamma_1(t)=\frac{a(\beta-t)+b(t-\alpha)}{\beta-\alpha} \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

便得到一条等价的路径. 我们仍记为$[a,b]$. $[a,b]$的反向路径是$[b,a]$.

(c) 设$\{a,b,c\}$是复数的三元序组，设

$$\Delta=\Delta(a,b,c)$$

是顶点在 $a,b,c$ 的三角形($\triangle$为包含 $a,b$ 及 $c$ 的最小凸集)，且对任意在$\triangle$边界上连续的函数 $f$,定义

(6) $$\int_{\partial\triangle} f=\int_{[a,b]} f+\int_{[b,c]} f+\int_{[c,a]} f$$

我们可以认为(6)是它左边式子的定义，或者我们也可以把 $\partial\triangle$看作为如定义 10.8 所描述的，联结$[a,b]$、$[b,c]$到$[c,a]$而得的路径. 这时容易证明公式(6)是正确的.

如果把$\{a,b,c\}$轮换，由(6)我们看出对(6)式的左边并无影响. 若$\{a,b,c\}$被$\{a,c,b\}$代替,则(6)式左边改变符号.

我们现在给出一个定理,它在函数论中起着非常重要的作用.

**10.10 定理** 设 $\gamma$ 是一条闭路径,设 $\Omega$ 为 $\gamma^*$的余集(相对于平面),并定义

(1) $$\operatorname{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z}\qquad(z\in\Omega)$$

则 $\operatorname{Ind}_\gamma$是$\Omega$上的一个整数值函数. 它在$\Omega$的每一分支内是常数，并且在$\Omega$的无界分支内为零.

我们称 $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$为 $z$ 关于 $\gamma$ 的指数. 注意 $\gamma^*$是紧的,因此 $\gamma^*$在一有界圆盘$D$内. $D$ 的余集 $D^c$是连通的. 这样, $D^c$就在$\Omega$的某一分支内. 这表明$\Omega$确实有一个无界分支.

**证明** 令$[\alpha,\beta]$为 $\gamma$ 的参数区间, 固定 $z\in\Omega$,则

(2) $$\operatorname{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds$$

由于当且仅当 $e^w=1$ 时, $w/2\pi i$ 才是整数，定理的第一个论断,就是 $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$是整数,等价于断言 $\varphi(\beta)=1$. 这里

(3) $$\varphi(t)=\exp\left\{\int_\alpha^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds\right\}\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

(3)的微分表明,除了可能在使 $\gamma$ 不可微的有限集$S$ 外, 都有

(4) $$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$$

因此$\varphi/(\gamma-z)$是$[\alpha,\beta]$上的连续函数，它在$[\alpha,\beta]-S$内的导数为零. 因为$S$有限，$\varphi/(\gamma-z)$在$[\alpha,\beta]$上是常数. 又因为$\varphi(\alpha)=1$，我们得出

$$\varphi(t)=\frac{\gamma(t)-z}{\gamma(\alpha)-z} \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{5}$$

我们现在利用$\gamma$为闭路径，也就是$\gamma(\beta)=\gamma(\alpha)$的假设. (5)表示$\varphi(\beta)=1$，而这正如我们上面已看到的，蕴涵着$\mathrm{Ind}_\gamma(z)$是个整数.

由定理 10.7，(1)表明$\mathrm{Ind}_\gamma\in H(\Omega)$. 由于在连续映射下连通集的像是连通的([26]，定理 4.22)，又由于$\mathrm{Ind}_\gamma$是一个整数值函数，故$\mathrm{Ind}_\gamma$在$\Omega$的每一个分支上必须是常数.

最后，(2)表明当$|z|$充分大时，$|\mathrm{Ind}_\gamma(z)|<1$，这就推出在$\Omega$的无界分支上$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=0$.

**评注** 如果记(3)式中的积分为$\lambda(t)$，上述的证明说明$2\pi\mathrm{Ind}_\gamma(z)$是当$t$由$\alpha$跑到$\beta$时，$\lambda(t)$的虚部的纯增量，并且与$\gamma(t)-z$幅角的纯增量相同. (我们没有定义"幅角"，将来也不需要它. )如果我们将这增量除以$2\pi$，我们就得到"$\gamma$环绕$z$的次数". 这说明为什么常常把指数称为"环绕数". 上述证明的一个优点就是它确立了指数的主要性质，而并不涉及复数的幅角.

**10.11 定理** 如果$\gamma$是中心在$a$，半径为$r$的正向圆周，则

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=\begin{cases}1 & 若\ |z-a|<r\\ 0 & 若\ |z-a|>r\end{cases}$$

**证明** 我们如 10.9(a)一节那样取$\gamma$，由定理 10.10，只要计算出$\mathrm{Ind}_\gamma(a)$就够了. 而 10.9(2)表明它等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}=\frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}(re^{it})^{-1}e^{it}dt=1$$

## 局部 Cauchy 定理

Cauchy 定理有好几种形式. 它们全都断言，当 $\gamma$ 为 $\Omega$ 内的闭路径或圈，并且当 $\gamma$ 及 $\Omega$ 满足某些拓扑条件时，每个 $f\in H(\Omega)$ 在 $\gamma$ 上的积分是零. 我们将首先引出它的简单的局部的形式(定理 10.14)，它对许多应用来说是很够的了. 至于更一般的整体的形式，将在稍晚一些时候建立.

**10.12 定理** 假设 $F\in H(\Omega)$，且 $F'$ 在 $\Omega$ 内连续. 则对 $\Omega$ 内的每一条闭路径 $\gamma$

$$\int_\gamma F'(z)dz=0$$

**证明** 如果 $[\alpha,\beta]$ 为 $\gamma$ 的参数区间，因为 $\gamma(\beta)=\gamma(\alpha)$，微积分学基本定理表明

$$\int_\gamma F'(z)dz=\int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$
$$=F(\gamma(\beta))-F(\gamma(\alpha))=0$$

**系** 因为对所有整数 $n\neq-1$，$z^n$ 是 $z^{n+1}/n+1$ 的导数，当 $n=0,1,2,\cdots$ 时，对每一闭路径 $\gamma$；当 $n=-2,-3,-4,\cdots$，$0\notin\gamma^*$ 时，对每一闭路径 $\gamma$，我们都有

$$\int_\gamma z^n dz=0$$

$n=-1$ 的情况，已在定理 10.10 讨论.

**10.13 对三角形的 Cauchy 定理** 假设 $\triangle$ 是平面开集 $\Omega$ 内的一个闭三角形，$p\in\Omega$，$f$ 在 $\Omega$ 上连续，且 $f\in H(\Omega-\{p\})$. 则

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz=0 \tag{1}$$

$\partial\triangle$ 的定义按照第 10.9 节的(c). 稍后一些将看到，我们的假设确实蕴涵着 $f\in H(\Omega)$. 也就是，所排除的点 $p$ 并不是真正要排

除的. 然而，定理的上述形式，在 Cauchy 公式的证明中将是有用的.

**证明** 我们首先假设$p\notin\triangle$. 设$a, b, c$是$\triangle$的顶点. 设$a', b', c'$分别是$[b, c]$, $[c, a]$和$[a, b]$的中点. 考虑由三元序组

$$\{a, c', b'\}, \{b, a', c'\}, \{c, b', a'\}, \{a', b', c'\} \tag{2}$$

构成的四个三角形$\triangle^j$. 若$J$为积分(1)的值，由 10.9(6) 得

$$J=\sum_{j=1}^{4}\int_{\partial\triangle^j} f(z)dz \tag{3}$$

(3)式右边积分中至少有一个绝对值至少是$|J/4|$. 称这个对应的三角形为$\triangle_1$. 用$\triangle_1$代替$\triangle$重复这论证，并继续这一过程，就得出一三角形$\triangle_n$的序列，使得$\triangle\supset\triangle_1\supset\triangle_2\supset\cdots$，且若$L$为$\partial\triangle$的长，则$\partial\triangle_n$的长为$z^{-n}L$，并使得

$$|J|\leqslant 4^n\left|\int_{\partial\triangle_n} f(z)dz\right| \qquad (n=1, 2, 3, \cdots) \tag{4}$$

三角形$\triangle_n$有(唯一)公共点$z_0$. 由于$\triangle$是紧的，故$z_0\in\triangle$. 于是$f$在$z_0$可微.

设给定$\varepsilon>0$. 则存在$r>0$，使得$|z-z_0|<r$时，

$$\begin{aligned}&|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|\\ &\leqslant\varepsilon|z-z_0|\end{aligned} \tag{5}$$

并且存在$n$，使得对所有$z\in\triangle_n$, $|z-z_0|<r$. 对这个$n$和所有$z\in\triangle_n$，我们同时有$|z-z_0|\leqslant 2^{-n}L$. 由定理 10.12的系

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\triangle_n} f(z)dz\\ &=\int_{\partial\triangle_n}[f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)]dz\end{aligned} \tag{6}$$

于是(5)推出

$$\left|\int_{\partial\triangle_n} f(z)dz\right|\leqslant\varepsilon(2^{-n}L)^2 \tag{7}$$

现在(4)式指出$|J|\leqslant\varepsilon L^2$. 因此,若$p\notin\triangle$,则$J=0$.

其次假设$p$为$\triangle$的一个顶点,例如$p=a$. 若$a$、$b$、$c$共线,则对任何连续函数$f$,(1)是平凡的. 如若不然,选取点$x\in[a,b]$,$y\in[a,c]$,使$x$,$y$均接近$a$,并且注意$f$沿$\partial\triangle$的积分是沿三角形$\{a,x,y\}$,$\{x,b,y\}$,$\{b,c,y\}$边界积分之和. 由于后两三角形不包含$p$,故后面两积分为零. 因此沿$\partial\triangle$的积分是沿$[a,x]$,$[x,y]$,$[y,a]$积分之和. 又由于这些区间可以任意地短及$f$在$\triangle$上有界,我们再次得到(1).

最后,若$p$为$\triangle$的任意一点. 应用上述结果于$\{a,b,p\}$,$\{b,c,p\}$及$\{c,a,p\}$,就完成了证明.

**10.14 在凸集内的 Cauchy 定理** 假设$\Omega$是一个凸开集,$p\in\Omega$,$f$在$\Omega$上连续,且$f\in H(\Omega-\{p\})$,则对某些$F\in H(\Omega)$,有$f=F'$,因此,对$\Omega$内每一闭路径$\gamma$,

$$\int_\gamma f(z)dz=0 \tag{1}$$

**证明** 固定$a\in\Omega$. 由于$\Omega$是凸集,对每个$z\in\Omega$,$\Omega$包含由$a$到$z$的直线区间. 于是,我们能定义

$$F(z)=\int_{[a,z]}f(\xi)d\xi \qquad (z\in\Omega) \tag{2}$$

对任意$z$及$z_0\in\Omega$,顶点在$a$,$z_0$,$z$的三角形位于$\Omega$内,因此,由10.13,$f$沿$[z_0,z]$的积分是$F(z)-F(z_0)$. 固定$z_0$,若$z\neq z_0$,我们就得出

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)=\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]}[f(\xi)-f(z_0)]d\xi \tag{3}$$

给定$\varepsilon>0$,$f$在$z_0$的连续性表明,存在$\delta>0$,使得当$|\xi-z_0|<\delta$时,有$|f(\xi)-f(z_0)|<\varepsilon$;因此,当$|z-z_0|<\delta$时,(3)式左边的绝

对值小于$\varepsilon$. 这证明了$f=F'$. 特别有$F\in H(\Omega)$. 由定理10.12就可得出(1).

**10.15 凸集内的 Cauchy 公式** 假设$\gamma$为凸开集$\Omega$内一条闭路径，且$f\in H(\Omega)$. 如果$z\in\Omega$且$z\notin\gamma^*$，则

$$(1)\qquad f(z)\cdot\operatorname{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

当然，最有兴趣的情形是$\operatorname{Ind}_\gamma(z)=1$.

**证明** 固定$z$，使上述条件成立，并且定义

$$(2)\qquad g(\xi)=\begin{cases}\dfrac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z} & \text{若 } \xi\in\Omega,\xi\neq z\\ f'(z) & \text{若 } \xi=z\end{cases}$$

于是$g$满足定理10.14的假设. 因此

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\xi)d\xi=0$$

如果我们把(2)代入(3)，便得到(1).

如果我们取$\gamma$为一圆周，关于全纯函数能用幂级数表示的这个定理是定理10.15容易得到的结论:

**10.16 定理** 对平面内任意开集$\Omega$，每一个$f\in H(\Omega)$都在$\Omega$内可表示为幂级数.

**证明** 假设$f\in H(\Omega)$且$D(a;R)\subset\Omega$. 若$\gamma$为中心在$a$，半径为$r<R$的正向圆周，$D(a;R)$的凸性允许我们应用定理10.15; 由定理10.11，我们得出

$$(1)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\qquad (z\in D(a;r))$$

但现在我们可以对$X=[0,2\pi]$，$\varphi=\gamma$，

$$d\mu(t)=f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

来应用定理10.7，并得出结论: 存在序列$\{c_n\}$，使得

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (z\in D(a;r)) \tag{2}$$

$\{c_n\}$的唯一性(见定理10.6之系)表明,对每一个 $r<R$(当 $a$ 固定时)得到相同的幂级数. 因此,对每个 $z\in D(a;R)$, 表示式(2)是正确的, 这就完成了证明.

**系** 若 $f\in H(\Omega)$,则 $f'\in H(\Omega)$.

**证明** 结合定理 10.6 及10.16.

Cauchy 定理有一个有用的逆定理:

**10.17 Morera 定理** 假设 $f$ 是开集 $\Omega$ 内的连续复函数, 若对每个闭三角形 $\triangle\subset\Omega$,都有

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz=0$$

则 $f\in H(\Omega)$.

**证明** 设 $V$ 为 $\Omega$ 内的凸开集, 象在定理 10.14 证明中一样, 我们能构造 $F\in H(V)$, 使得 $F'=f$. 由于全纯函数的导数是全纯函数(定理 10.16), 故对每个凸开集 $V\subset\Omega$, 都有 $f\in H(\Omega)$. 因此, $f\in H(\Omega)$.

## 幂级数表示

每个全纯函数在局部范围内都是一个收敛的幂级数之和这一事实,有大量有趣的推论. 在本节,将展示其中一小部分.

**10.18 定理** 假设 $\Omega$ 是一区域, $f\in H(\Omega)$, 且

$$Z(f)=\{a\in\Omega: f(a)=0\} \tag{1}$$

则或者 $Z(f)=\Omega$, 或者 $Z(f)$ 在 $\Omega$ 内无极限点. 在后一情况下, 每个 $a\in Z(f)$ 都对应有唯一的正整数 $m=m(a)$, 使得

$$f(z)=(z-a)^m g(z) \qquad (z\in\Omega) \tag{2}$$

这里 $g\in H(\Omega)$, 且 $g(a)\neq 0$; 而且, $Z(f)$ 最多是可数的.

(我们重提一下，区域就是开连通集．)

整数 $m$ 称为 $f$ 在点 $a$ 所具有的零点的阶．很清楚，当且仅当 $f$ 在 $\Omega$ 内恒等于零时 $Z(f)=\Omega$．我们称 $Z(f)$ 为 $f$ 的零点集．当然，对 $f$ 的 $\alpha$-点集，也就是，$f-\alpha$ 的零点集，也有类似的结果．这里 $\alpha$ 是任意复数．

**证明** 设 $A$ 为 $\Omega$ 内 $Z(f)$ 所有极限点的集．因为 $f$ 是连续的，$A\subset Z(f)$．

固定 $a\in Z(f)$，并选取 $r>0$，使得 $D(a;r)\subset\Omega$．由定理 10.16

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (z\in D(a;r)) \tag{3}$$

这里有两种可能．或者所有 $c_n$ 为零，在这种情形下 $D(a;r)\subset A$，且 $a$ 为 $A$ 的内点；或者有最小的整数 $m$（必须是正数，因 $f(a)=0$），使得 $c_m\neq 0$．在这种情况下，定义

$$g(z)=\begin{cases}(z-a)^{-m}f(z) & (z\in\Omega-\{a\})\\ c_m & (z=a)\end{cases} \tag{4}$$

于是(2)成立．很清楚，$g\in H(\Omega-\{a\})$．但由(3)可以推出

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{m+k}(z-a)^k \qquad (z\in D(a;r)) \tag{5}$$

因此 $g\in H(D(a;r))$，于是确实有 $g\in H(\Omega)$．

进而言之，$g(a)\neq 0$，并且 $g$ 的连续性表明，存在 $a$ 的一个邻域，在这个邻域内 $g$ 没有零点．这样，由(2)，$a$ 就是 $Z(f)$ 的孤立点．

若 $a\in A$，这就必然出现第一种情况．于是 $A$ 为开集．若 $B=\Omega-A$，由 $A$ 作为极限点的集的定义，很明显，$B$ 是开集．这样 $\Omega$ 就是不相交的开集 $A$ 和 $B$ 的并．由于 $\Omega$ 是连通的，我们得出或者 $A=\Omega$，在这种情况时 $Z(f)=\Omega$，或者 $A=\varnothing$．在后一种情况下，在 $\Omega$ 每个紧子集上，$Z(f)$ 最多有有限个点，而因为 $\Omega$ 是 $\sigma$-紧的，$Z(f)$

最多可数.

**系** 如果 $f$ 和 $g$ 是区域 $\Omega$ 内的全纯函数，且对 $\Omega$ 内某一个具有极限点的集的所有点 $z$，有 $f(z)=g(z)$，则对所有的 $z\in\Omega$，$f(z)=g(z)$ 成立.

换句话说，在区域 $\Omega$ 内的全纯函数，由 $\Omega$ 内任何一个具有极限点的集上的函数值决定. 这是一个重要的唯一性定理.

注 如果我们去掉 $\Omega$ 是连通的假设，这定理是不成立的！例如，若 $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1$，而且 $\Omega_0$ 及 $\Omega_1$ 为不相交的开集，在 $\Omega_0$ 内令 $f=0$，在 $\Omega_1$ 内令 $f=1$.

**10.19 定义** 如果 $a\in\Omega$ 而 $f\in H(\Omega-\{a\})$，则 $f$ 称为在点 $a$ 具有孤立奇点. 如果 $f$ 能在 $a$ 点给予定义，使得扩充后的函数在 $\Omega$ 内全纯，这个奇点就称为可去的.

**10.20 定理** 假设 $f\in H(\Omega-\{a\})$，且对某个 $r>0$，$f$ 在 $D'(a;r)$ 内有界，则 $f$ 在 $a$ 具有可去奇点.

注意 $D'(a;r)=\{z: 0<|z-a|<r\}$.

**证明** 定义 $h(a)=0$，且在 $\Omega-\{a\}$ 内，$h(z)=(z-a)^2f(z)$，有界性的假设表明 $h'(a)=0$. 由于 $h$ 在 $\Omega$ 其他点明显地可微，我们有 $h\in H(\Omega)$，于是

$$h(z)=\sum_{n=2}^{\infty}c_n(z-a)^n \quad (z\in D(a;r))$$

令 $f(a)=c_2$，我们就得到所求的 $f$ 的全纯开拓. 因此

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+2}(z-a)^n \quad (z\in D(a;r))$$

**10.21 定理** 如果 $a\in\Omega$，且 $f\in H(\Omega-\{a\})$，则必然出现下列三种情况之一：

(a) $f$ 在 $a$ 具有可去奇点.

(b) 存在复数 $c_1, \cdots, c_m$, 这里 $m$ 是一正整数, 且 $c_m \neq 0$. 使得

$$f(z)-\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{(z-a)^k}$$

在 $a$ 点具有可去奇点.

(c) 若 $r>0, D(a;r)\subset\Omega$, 则 $f(D'(a;r))$ 在平面内稠密.

在(b)情形下, $f$ 称为在 $a$ 具有 $m$ 阶极点. 函数

$$\sum_{k=1}^{m}c_k(z-a)^{-k}$$

作为 $(z-a)^{-1}$ 的多项式, 称为 $f$ 在 $a$ 的主要部分. 很清楚, 在这种情形下, 当 $z\to a$ 时, $|f(z)|\to\infty$.

在(c)的情形下, $f$ 称为在 $a$ 点具有本性奇点. (c)的一个等价的陈述是, 对每一个复数 $w$, 存在对应的序列 $\{z_n\}$, 使得当 $n\to\infty$ 时, $z_n\to a$, 且 $f(z_n)\to w$.

**证明** 假设(c)不成立. 则存在 $r>0, \delta>0$, 和复数 $w$, 使得在 $D'(a;r)$ 内 $|f(z)-w|>\delta$. 我们记 $D(a;r)$ 为 $D$, $D'(a;r)$ 为 $D'$. 定义

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w}\qquad(z\in D')\tag{1}$$

则 $g\in H(D')$, 而且 $|g|<1/\delta$. 由定理 10.20, $g$ 可以扩充为在 $D$ 内的全纯函数.

若 $g(a)\neq 0$. (1)表明存在某个 $\rho>0$, $f$ 在 $D'(a;\rho)$ 内有界. 因此由定理 10.20, (a)成立.

若 $g$ 在 $a$ 有 $m\geqslant 1$ 阶零点, 则定理 10.18表明

$$g(z)=(z-a)^m g_1(z)\qquad(z\in D)\tag{2}$$

此处 $g\in H(D)$, 而且 $g_1(a)\neq 0$. 同时由(1)得知, $g_1$ 在 $D'$ 内没有零点. 在 $D$ 内令 $h=1/g_1$, 则 $h\in H(D)$, $h$ 在 $D$ 内没有零点, 而且

$$f(z)-w=(z-a)^{-m}h(z)\qquad(z\in D')\tag{3}$$

但 $h$ 具有形如

$$(4)\qquad h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n \qquad (z\in D)$$

的展开式，并有 $b_0\neq 0$. 现在，(3)表明($b$)成立，且有 $c_k=b_{m-k}$，$k=1,2,\cdots,m$.

这就完成了证明.

现在我们将利用当一个幂级数 $\sum c_n(z-a)^n$ 限制在中心为 $a$ 的圆周上时是一个三角级数这一事实.

**10.22 定理** 如果

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (z\in D(a;R))$$

且若 $0<r<R$，则

$$(2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(a+re^{i\theta})|^2d\theta$$

**证明** 我们有

$$(3)\qquad f(a+re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^ne^{in\theta}$$

对 $r<R$，级数(3)在$[-\pi,\pi]$上一致收敛. 因此

$$(4)\qquad c_nr^n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(a+re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

并且可以看出(2)就是 Parseval 公式的一种特款.

下面是几个推论:

**10.23 Liouville 定理** 每个有界整函数都是常数.

回忆一下，如果函数在整个平面全纯则为整函数.

**证明** 假设 $f$ 是整的，并且对所有 $z$ 有: $|f(z)|<M$, $f(z)=\sum c_nz^n$. 由定理 10.22，对所有 $r$，应有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}<M^2$$

但这只有对所有 $n\geqslant 1$, $c_n=0$ 时, 才可能成立.

**10.24 最大模定理** 假设$\Omega$是区域,$f\in H(\Omega)$,且$\bar{D}(a;r)\subset\Omega$,则

(1) $$|f(a)|\leqslant\max_{\theta}|f(a+re^{i\theta})|$$

当且仅当 $f$ 在$\Omega$内为常数等式成立.

因此, $|f|$ 在$\Omega$的任何点都不会有局部的极大值, 除非 $f$ 是常数.

**证明** 假设对所有实数 $\theta$, $|f(a+re^{i\theta})|\leqslant|f(a)|$. 那末, 用定理 10.22 的记号, 可以得出

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}\leqslant|f(a)|^2=|c_0|^2$$

因此, $c_1=c_2=c_3=\cdots=0$. 由此推出在 $D(a;r)$内, $f(z)=f(a)$. 由于$\Omega$是连通的, 定理 10.18 表明 $f$ 在$\Omega$内是常数.

**10.25 定理** 若 $n$ 为正整数, 而且

$$P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

这里 $a_0,\cdots a_{n-1}$均为复数, 则$P$在平面内恰好有 $n$ 个零点.

当然, 这些零点是根据它们的重数来计算的: 一个$m$阶零点, 计算为$m$个零点. 这个定理包括了下述的事实: 复数域是代数封闭的, 也就是, 每个复系数的非常数多项式至少有一个复的零点.

**证明** 选取 $r>1+2|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|$. 则

$$|P(re^{i\theta})|>|P(0)| \qquad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

若$P$没有零点, 则函数 $f=1/P$ 将是整的, 且对所有 $\theta$, 满足 $|f(0)|>|f(re^{i\theta})|$, 与最大模定理矛盾. 这样, 对某个 $z_1$, $P(z_1)=0$. 因此, 存在 $n-1$ 次多项式 $Q$, 使得 $P(z)=(z-z_1)Q(z)$. 对

$n$应用有限归纳法即可完成证明.

**10.26 定理**（**Cauchy 估值**） 如果 $f\in H(D(a;R))$，且对所有 $z\in D(a;R)$，$|f(z)|\leqslant M$，则

$$(1)\qquad |f^{(n)}(a)|\leqslant\frac{n!M}{R^n}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

**证明** 对每个 $r<R$，级数 10.22(2)每一项都有上界$M^2$.

若我们取 $a=0$，$R=1$，及 $f(z)=z^n$，则 $M=1$，$f^n(0)=n!$. 由此看出(1)的结果不能再改进.

**10.27 定义** 如果对每个紧集 $K\subset\Omega$ 和每个 $\varepsilon>0$，对应有 $N=N(K,\varepsilon)$，使得当 $j>N$时，对所有 $z\in K$，有$|f_j(z)-f(z)|<\varepsilon$. 则称$\Omega$内的函数序列$\{f_j\}$在$\Omega$的紧子集上一致收敛于 $f$.

例如，序列$\{z^n\}$在$D(0;1)$的紧子集上一致收敛于零. 但在$D(0;1)$内却不是一致收敛的. 紧子集上一致收敛这一概念，在与全纯函数的极限运算有关的问题上，最自然地提了出来. 这个概念有时也采用"几乎一致收敛"一词.

**10.28 定理** 假设对 $j=1,2,3,\cdots$，$f_j\in H(\Omega)$，而且在$\Omega$的紧子集上 $f_j$一致收敛于 $f$. 则 $f\in H(\Omega)$，而且在$\Omega$的紧子集上$f'_j$一致收敛于$f'$.

**证明** 由于在$\Omega$内每个紧圆盘上的是一致收敛的，故 $f$ 连续. 设$\triangle$为 $\Omega$内的三角形，则$\triangle$是紧的，于是由 Cauchy 定理

$$\int_{\partial\triangle}f(z)dz=\lim_{j\to\infty}\int_{\partial\triangle}f_j(z)dz=0$$

因此由 Morera 定理推出 $f\in H(\Omega)$.

设$K$是紧的，$K\subset\Omega$. 则存在 $r>0$，对所有 $z\in K$，闭圆盘$\bar{D}(z;r)$的并$E$是$\Omega$的紧子集. 应用定理 10.26 于 $f-f_j$，我们有

$$|f'(z)-f'_j(z)|\leqslant r^{-1}\|f-f_j\|_E\qquad (z\in K)$$

这里$\|f\|_E$为$|f|$在$E$上的上确界. 由于在$E$上$f_j$一致收敛于$f$,

得出在$K$上$f'_j$一致收敛于$f'$.

**系** 在同样的假设下，当$j\to\infty$时，在每个紧集$K\subset\Omega$和对每个正整数$n$，有$f_j^{(n)}\to f^{(n)}$.

与实直线上的情况相比较，在那里无限次可微函数的序列能够一致收敛于处处不可微的函数.

## 开映射定理

若$\Omega$为区域且$f\in H(\Omega)$，则$f(\Omega)$或者是区域或者是一个点.

全纯函数的这个重要性质将以更为详细的形式在定理 10.32 予以证明.

**10.29 引理** 如果$f\in H(\Omega)$，且$g$由

$$g(z,w)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & 若\ w\neq z\\ f'(z) & 若\ w=z\end{cases}$$

定义于$\Omega\times\Omega$内. 则$g$在$\Omega\times\Omega$内连续.

**证明** $g$的连续性值得怀疑的那些点$(z,w)\in\Omega\times\Omega$只有$z=w$.

固定$a\in\Omega$. 固定$\varepsilon>0$. 则存在$r>0$，使得$D(a;r)\subset\Omega$，并且对所有$\zeta\in D(a;r)$，$|f'(\zeta)-f'(a)|<\varepsilon$. 若$z$及$w$均在$D(a;r)$内，且若

$$\zeta(t)=(1-t)z+tw$$

则对$0\leqslant t\leqslant 1$，有$\zeta(t)\in D(a;r)$，并且

$$g(z,w)-g(a,a)=\int_0^1[f'(\zeta(t))-f'(a)]dt$$

对每个$t$，被积函数的绝对值$<\varepsilon$. 这样$|g(z,w)-g(a,a)|<\varepsilon$. 这就证明了$g$在$(a,a)$连续.

**10.30 定理** 假设 $\varphi\in H(\Omega)$，$z_0\in\Omega$，而且 $\varphi'(z_0)\neq 0$. 则 $\Omega$ 包含 $z_0$ 的一个邻域 $V$，使得

(a) $\varphi$ 在 $V$ 内是一一的，

(b) $W=\varphi(V)$ 是一开集，且

(c) 如果 $\psi$：$W\to V$ 由 $\psi(\varphi(z))=z$ 定义，则 $\psi\in H(W)$.

这样，$\varphi:V\to W$ 就有一个全纯的逆映射.

**证明** 在引理 10.29 中用 $\varphi$ 代替 $f$. 应用该引理可证明，$\Omega$ 包含 $z_0$ 的一个邻域 $V$，使得当 $z_1\in V$ 及 $z_2\in V$ 时，有

$$|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|\geq\frac{1}{2}|\varphi'(z_0)||z_1-z_2| \tag{1}$$

于是(a)成立. 同时

$$\varphi'(z)\neq 0\qquad(z\in V) \tag{2}$$

要证明(b)，固定 $\zeta\in V$. 选取 $r>0$，使得 $\bar{D}(\zeta;r)\subset V$. 由(1)，存在 $\delta>0$，使得

$$|\varphi(\zeta+re^{i\theta})-\varphi(\zeta)|>2\delta\qquad(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi) \tag{3}$$

设 $\alpha$ 为不在 $\varphi(V)$ 内的复数，则 $h=1/(\alpha-\varphi)$ 在 $V$ 内全纯. 由于对所有 $\theta$

$$2\delta<|\alpha-\varphi(\zeta)|+|\alpha-\varphi(\zeta+re^{i\theta})|$$

由最大模定理推出

$$\frac{1}{|\alpha-\varphi(\zeta)|}=|h(\zeta)|\leqslant\sup_\theta|h(\zeta+re^{i\theta})|\leqslant\frac{1}{2\delta-|\alpha-\varphi(\zeta)|}$$

因此 $|\alpha-\varphi(\zeta)|\geqslant\delta$.

这证明了 $\varphi(V)\supset D(\varphi(\zeta);\delta)$. 因为 $\zeta$ 是 $V$ 的任意一点，故 $\varphi(V)$ 是开的.

要证明(c)，固定 $w_1\in W$，则有唯一的一点 $z_1\in V$，$\varphi(z_1)=w_1$. 若 $w\in W$，而且 $\psi(w)=z\in V$，我们有

$$\frac{\psi(w)-\psi(w_1)}{w-w_1}=\frac{z-z_1}{\varphi(z)-\varphi(z_1)} \tag{4}$$

由(1)，当 $w\to w_1$ 时，$z\to z_1$。因此(2)推出 $\psi'(w_1)=1/\varphi'(z_1)$。这样 $\psi\in H(W)$。

**10.31 定义** 对 $m=1,2,3,\cdots$，我们记"$m$ 次幂函数"$z\to z^m$ 为 $\pi_m$。

每个 $w\neq 0$ 都刚好是 $m$ 个不同的 $z$ 值的 $\pi_m(z)$：若 $w=re^{i\theta}$，$r>0$，则 $\pi_m(z)=w$ 当且仅当 $z=r^{1/m}e^{i(\theta+2k\pi)/m}$，$k=1,\cdots,m$。

同时注意每个 $\pi_m$ 都是一个开映射：若 $V$ 开且不包含零，则由定理 10.30，$\pi_m(V)$ 开。另一方面，$\pi_m(D(0;r))=D(0;r^m)$。

开映射的复合显然是开的。特别，若 $\varphi'$ 没有零点，由定理 10.30，$\pi_m\circ\varphi$ 是开的。下面的定理(它包含引理 10.29 前面已经指出的开映射定理更详细的叙述)，陈述了一个相反的命题：在一个区域内非常数的全纯函数，除了附加上一个常数外，都局部地有 $\pi_m\circ\varphi$ 的形式。

**10.32 定理** 假设 $\Omega$ 是一区域，$f\in H(\Omega)$，$f$ 不是常数，$z_0\in\Omega$，且 $w_0=f(z_0)$。设 $m$ 为函数 $f-w_0$ 在点 $z_0$ 的零点的阶数。

则存在 $z_0$ 的邻域 $V$，$V\subset\Omega$，且存在 $\varphi\in H(V)$，使得

(a) 对所有的 $z\in V$，$f(z)=w_0+[\varphi(z)]^m$，

(b) $\varphi'$ 在 $V$ 内没有零点，且 $\varphi$ 为 $V$ 到圆盘 $D(0;\ r)$ 上的可逆映射。

这样，在 $V$ 内，$f-w_0=\pi_m\circ\varphi$。由此得出 $f$ 恰好是 $V-\{z_0\}$ 到 $D'(w_0;\ r^m)$ 上的 $m$ 对一的映射。并且每个 $w_0\in f(\Omega)$ 都是 $f(\Omega)$ 的一个内点。因此 $f(\Omega)$ 是开的。

**证明** 不失一般性，我们可以假设 $\Omega$ 是 $z_0$ 的一个凸邻域，而且它如此地小，使得若 $z\in\Omega-\{z_0\}$ 时，$f(z)\neq w_0$，则对某个在 $\Omega$ 内无零点的 $g\in H(\Omega)$，有

$$f(z)-w_0=(z-z_0)^m g(z)\qquad (z\in\Omega)\tag{1}$$

因此 $g'/g\in H(\Omega)$。由定理 10.14，存在 $h\in H(\Omega)$，使 $g'/g=h'$。

在$\Omega$内$g\cdot\exp(-h)$的导数为零．如果$h$通过附加上一个适当的常数加以修正，便得出$g=\exp(h)$．定义

$$\varphi(z)=(z-z_0)\exp\frac{h(z)}{m}\qquad(z\in\Omega)\tag{2}$$

则对所有$z\in\Omega$，$(a)$成立．

同时，$\varphi(z_0)=0$而$\varphi'(z_0)\neq0$．根据定理10.30，现在可以得出满足$(b)$的开集$V$的存在性．这就完成了证明．

下一定理其实已经包含在前述的结论中．不过，看起来还是值得明显地加以叙述．

**10.33　定理**　假设$\Omega$是一区域，$f\in H(\Omega)$，且$f$在$\Omega$内是一一的．则对每个$z\in\Omega$，$f'(z)\neq0$，且$f$的逆是全纯的．

**证明**　若对某个$z_0\in\Omega$，$f'(z_0)=0$，定理10.32的假设将对某个$m>1$成立．于是$f$将是在$z_0$的某个去心邻域内是$m$对一的．现在再应用10.30的$(c)$即可．

注意定理10.33的逆是不成立的：若$f(z)=e^z$，则对每个$z$，$f'(z)\neq0$．但$f$在整个复平面内并非一一的．

## 整体Cauchy定理

在陈述并证明这个定理之前（这个定理将取消定理10.14中有关凸区域的限制），给迄今为止曾经是够用的积分工具，再加上一些工具将是很方便的．实质上，这主要是使我们不再限于沿单一的路径积分，而是代之以考虑路径的有限“和”．在第10.9$(c)$给出了一个简单的例子．

**10.34　链与圈**　假设$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$是平面上的路径，并令$K=\gamma_1^*\cup\cdots\cup\gamma_n^*$．每个$\gamma_i$在向量空间$C(K)$上由公式

$$\tilde{\gamma}_i(f)=\int_{\gamma_i}f(z)dz\tag{1}$$

导出一个线性泛函$\tilde{\gamma}_i$．定义

(2) $$\tilde{\Gamma}=\tilde{\gamma}_1+\cdots+\tilde{\gamma}_n$$

显然，对所有 $f\in C(K)$，$\tilde{\Gamma}(f)=\tilde{\gamma}_1(f)+\cdots+\tilde{\gamma}_n(f)$. 关系式(2)提示我们引出"形式和"

(3) $$\Gamma=\gamma_1\dotplus\cdots\dotplus\gamma_n$$

并定义

(4) $$\int_\Gamma f(z)dz=\tilde{\Gamma}(f)$$

则(3)仅是陈述

(5) $$\int_\Gamma f(z)dz=\sum_{i=1}^n\int_{\gamma_i}f(z)dz \qquad (f\in C(K))$$

的一个缩写. 注意(5)式可用来作为它左边的定义.

这样定义的$\Gamma$称为链.

如果$\Omega$是一个开集，对 $1\leqslant i\leqslant n$，$\gamma_i^*\subset\Omega$，且$\Gamma$由(3)定义，则$\Gamma$就是$\Omega$内的一个链.

若(3)成立，且每个 $\gamma_i$ 为闭路径，则$\Gamma$称为圈.

一个链可以用多种方式表示为路径的和. 我们说

$$\gamma_1\dotplus\cdots\dotplus\gamma_n=\delta_1\dotplus\cdots\dotplus\delta_k$$

的意思，简单说来是指对于 $\gamma_1^*\cup\cdots\cup\gamma_n^*\cup\delta_1^*\cup\cdots\cup\delta_k^*$ 上的每个连续函数 $f$，有

$$\sum_i\int_{\gamma_i}f(z)dz=\sum_j\int_{\delta_j}f(z)dz$$

特别，一个圈能很好地表示为不是闭路径的和.

如果(3)成立，我们定义

(6) $$\Gamma^*=\gamma_1^*\cup\cdots\cup\gamma_n^*$$

如果$\Gamma$是一个圈，且 $\alpha\notin\Gamma^*$，我们定义 $\alpha$ 关于$\Gamma$的指数为

(7) $$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dz}{z-\alpha}$$

这正和定理 10.10 中的一样. 很明显，由(3)可推出

(8) $$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Ind}_{\gamma_i}(\alpha)$$

如果在(3)中每个 $\gamma_i$ 都用它的反向路径代替，（见 10.8 节），所得的链将记为 $-\Gamma$. 这样

(9) $$\int_{-\Gamma} f(z)dz=-\int_{\Gamma} f(z)dz \qquad (f\in C(\Gamma^*))$$

特别，如果 $\Gamma$ 是一个圈，且 $\alpha\notin\Gamma^*$，则 $\operatorname{Ind}_{-\Gamma}(\alpha)=-\operatorname{Ind}_{\Gamma}(\alpha)$.

最后，注意链能通过用其对应泛函的加或减这种明显的方式来进行加法和减法：$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ 这个式子意味着对每个 $f\in C(\Gamma_1^*\cup\Gamma_2^*)$

(10) $$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma_1} f(z)dz+\int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

**10.35 Cauchy 定理** 假设 $f\in H(\Omega)$，这里 $\Omega$ 是复平面上的任意开集. 若 $\Gamma$ 是 $\Omega$ 内的一个圈，并对每个不在 $\Omega$ 内的 $\alpha$，满足

(1) $$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(\alpha)=0$$

则当 $z\in\Omega-\Gamma^*$ 时有

(2) $$f(z)\cdot\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

并且

(3) $$\int_{\Gamma} f(z)dz=0$$

若 $\Gamma_0$ 及 $\Gamma_1$ 均为 $\Omega$ 内的圈，使得对每个不在 $\Omega$ 内的 $\alpha$ 有

(4) $$\operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha)=\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha)$$

则

(5) $$\int_{\Gamma_0} f(z)dz=\int_{\Gamma_1} f(z)dz$$

**证明** 设

$$(6)\qquad g(z,w)=\begin{cases}\dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & 若\ w\neq z\\ f'(z) & 若\ w=z\end{cases}$$

是在$\Omega\times\Omega$内定义的函数. $g$ 在$\Omega\times\Omega$内是连续的(引理 10.29). 因此我们能定义

$$(7)\qquad h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}g(z;w)dw \qquad (z\in\Omega)$$

对 $z\in\Omega-\Gamma^*$, Cauchy 公式(2)显然等价于断言

$$(8)\qquad h(z)=0$$

要证明(8), 我们首先证明 $h\in H(\Omega)$. 注意 $g$ 在 $\Omega\times\Omega$ 的每一个紧子集上一致连续. 若 $z\in\Omega$, $z_n\in\Omega$, 且 $z_n\to z$, 便可得出对 $w\in\Gamma^*$($\Omega$的一个紧子集), 有 $g(z_n, w)$一致地趋于 $g(z, w)$. 这证明了 $h$ 在$\Omega$内连续. 设$\triangle$是$\Omega$内一个闭三角形, 则

$$(9)\qquad \int_{\partial\Delta}h(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\int_{\partial\Delta}g(z,w)dz\right)dw$$

对每个 $w\in\Omega$, $z\to g(z,w)$ 在$\Omega$内是全纯的. (在 $z=w$ 时的奇点是可去的.)因此(9)式右边里面的积分对每个 $w\in\Gamma^*$都为零. 这时, Morera 定理表明 $h\in H(\Omega)$.

其次, 我们设$\Omega_1$是使 $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z)=0$ 的所有复数 $z$ 的集, 并且定义

$$(10)\qquad h_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}dz \qquad (z\in\Omega_1)$$

如果 $z\in\Omega\cap\Omega_1$, 由$\Omega_1$ 的定义, 显然有 $h_1(z)=h(z)$. 因此存在一函数 $\varphi\in H(\Omega\cup\Omega_1)$, 它限制在$\Omega$上时是 $h$, 限制在$\Omega_1$ 上时是 $h_1$.

我们的假设(1)表明 $\Omega_1$ 包含 $\Omega$ 的余集, 这样, $\varphi$ 是一个整函数. 由 $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z)$在$\Omega_1$ 为零, 故$\Omega_1$ 也包含 $\Gamma^*$的余集的无界分支. 因此

$$(11)\qquad \lim_{|z|\to\infty}\varphi(z)=\lim_{|z|\to\infty}h_1(z)=0$$

这时，由 Liouville 定理推出，对每个 $z$，$\varphi(z)=0$. 这就证明了(8)，因此也证明了(2).

为了由(2)导出(3)，取$a\in\Omega-\Gamma^*$，并定义$F(z)=(z-a)f(z)$. 则因为 $F(a)=0$，故

$$(12)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(z)}{z-a}dz=F(a)\cdot\mathrm{Ind}_{\Gamma}(\alpha)=0$$

最后，把(3)应用于圈 $\Gamma=\Gamma_1-\Gamma_0$，由(4)可得出(5). 这就完成了证明.

**10.36 评注**

(*a*) 如果 $\gamma$ 是凸区域$\Omega$内的闭路径，且 $\alpha\notin\Omega$，应用定理 10.14 于 $f(z)=(z-\alpha)^{-1}$，可以证明 $\mathrm{Ind}_{\gamma}(\alpha)=0$. 如果$\Omega$是凸的，则$\Omega$内每一个圈都满足定理 10.35 的假设(1). 这表明定理 10.35 是定理 10.14 及 10.15 的推广.

(*b*) 定理 10.35 的最后部分表明，在什么情况下沿一个圈的积分能用沿另一个圈的积分代替而不改变其积分值. 例如设$\Omega$为去掉三个不相交闭圆盘 $D_i$ 的平面. 若 $\Gamma$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ 为$\Omega$内正向圆周，使得$\Gamma$围绕 $D_1\cup D_2\cup D_3$ 和 $\gamma_i$ 围绕 $D_i$，但 $j\neq i$ 时，$\gamma_i$ 不围绕$D_j$，则对每个 $f\in H(\Omega)$，有

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\sum_{j=1}^{3}\int_{\gamma_i} f(z)dz$$

(*c*) 为了应用定理 10.35，可以期望会有一种合理而有效的方法，来寻求一个点关于一条闭路径的指数. 下面一个定理对实际中所出现的所有路径都能做到这一点. 它实质上是说，当一条路径“由右到左”地交叉时，指数增加 1. 如果我们回忆一下，当 $\alpha$ 在 $\gamma^*$ 的余集$W$的无界分支内时，$\mathrm{Ind}_{\gamma}(\alpha)=0$. 假若$W$仅有有限多个分支，并且 $\gamma$ 穿越它们时，没有一段弧会穿过一次以上. 我们就能成功地决定$W$的其它分支中的 $\mathrm{Ind}_{\gamma}(\alpha)$.

**10.37 定理** 假设$\gamma$为平面上一条闭路径，具有参数区间$[\alpha,\beta]$. 假设$\alpha<u<v<\beta$, $a$和$b$为复数，$|b|=r>0$, 并且

(i) $\gamma(u)=a-b$, $\gamma(v)=a+b$,

(ii) $|\gamma(s)-a|<r$ 当且仅当 $u<s<v$,

(iii) $|\gamma(s)-a|=r$ 当且仅当 $s=u$ 或 $s=v$.

进一步假设$D(a;r)-\gamma^*$是两个区域$D_+$及$D_-$之并，它们按照$a+bi\in\bar{D}_+$及$a-bi\in\bar{D}_-$作为标志，则当$z\in D_+$, $w\in D_-$时，有

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=1+\mathrm{Ind}_\gamma(w)$$

当$\gamma(t)$由$a-b$穿越$D(a;r)$到$a+b$时，$D_-$是在这条路径的"右边"而$D_+$是在这条路径的"左边".

**证明** 为了书写简单，改变$\gamma$的参数，使得$u=0$, $v=\pi$. 定义

$$C(s)=a-be^{is}\quad(0\leqslant s\leqslant 2\pi)$$

$$f(s)=\begin{cases}C(s) & (0\leqslant s\leqslant\pi)\\ \gamma(2\pi-s) & (\pi\leqslant s\leqslant 2\pi)\end{cases}$$

$$g(s)=\begin{cases}\gamma(s) & (0\leqslant s\leqslant\pi)\\ C(s) & (\pi\leqslant s\leqslant 2\pi)\end{cases}$$

$$h(s)=\begin{cases}\gamma(s) & (\alpha\leqslant s\leqslant 0\ \text{或}\ \pi\leqslant s\leqslant\beta)\\ C(s) & (0\leqslant s\leqslant\pi)\end{cases}$$

由于$\gamma(0)=C(0)$及$\gamma(\pi)=C(\pi)$，所以$f$, $g$, $h$都是闭路径.

如果$E\subset\bar{D}(a;r)$, $|\zeta-a|=r$, 且$\zeta\notin E$, 则$E$位于圆盘$D(2a-\zeta;2r)$之内，而这个圆盘不包含$\zeta$. 应用这结果于$E=g^*$, $\zeta=a-bi$, 则看出[由评注10.36(a)]，$\mathrm{Ind}_g(a-bi)=0$. 由于$\bar{D}_-$是连通的，且$D_-$与$g^*$不交，便得出

$$\mathrm{Ind}_g(w)=0\qquad\text{若 } w\in D_-\tag{1}$$

相同的理由证明

$$\mathrm{Ind}_f(z)=0\qquad\text{若 } z\in D_+\tag{2}$$

我们得到结论

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z)=\operatorname{Ind}_h(z)=\operatorname{Ind}_h(w)$$
$$=\operatorname{Ind}_C(w)+\operatorname{Ind}_\gamma(w)=1+\operatorname{Ind}_\gamma(w)$$

由于 $h=\gamma\dotplus f$，第一个等式由(2)得出．因为 $z$ 及 $w$ 均在 $D(a;r)$ 内，而这是一个与 $h^*$ 不相交的连通集，故第二个等式成立．由于 $h\dotplus g=C\dotplus\gamma$，第三个等式由(1)得出．第四个等式则是定理 10.11 的一个推论．这就完成了证明．

我们现在转到与 Cauchy 定理有关的另一个拓扑概念的简短讨论．

**10.38 同伦** 假设 $\gamma_0$ 及 $\gamma_1$ 均为拓扑空间 $X$ 内的闭曲线，两者都具有参数区间 $I=[0,1]$．我们称 $\gamma_0$ 及 $\gamma_1$ 是 $X$-同伦的，假如存在由单位正方形 $I^2=I\times I$ 到 $X$ 内的一个连续映射 $H$，使得对所有 $s\in I$ 和 $t\in I$，都有

(1) $\qquad H(s,0)=\gamma_0(s),\ H(s,1)=\gamma_1(s),\ H(0,t)=H(1,t)$

令 $\gamma_t(s)=H(s,t)$．则(1)定义连接 $\gamma_0$ 及 $\gamma_1$ 的、$X$ 内的一个单参数闭曲线族 $\gamma_t$．直观地说，这意味着在 $X$ 内，$\gamma_0$ 能够连续地变形到 $\gamma_1$．

若 $\gamma_0$ 是 $X$-同伦到一常数映射 $\gamma_1$（也就是，$\gamma_1^*$ 仅由一点组成），我们称 $\gamma_0$ 在 $X$ 内是零伦的．如果 $X$ 是连通的，且 $X$ 内每条闭曲线都是零伦的，则 $X$ 称为单连通的．

例如，每个凸区域 $\Omega$ 都是单连通的．为了看出这个结论，令 $\gamma_0$ 为 $\Omega$ 内的闭曲线，固定 $z_1\in\Omega$，并定义

(2) $\qquad H(s,t)=(1-t)\gamma_0(s)+tz_1\quad(0\leqslant s\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 1)$

定理 10.40 将证明 Cauchy 定理 10.35 的条件(4)当 $\Gamma_0$ 及 $\Gamma_1$ 是 $\Omega$-同伦的闭路径时成立．作为它一种特殊情况，注意若 $\Omega$ 是单连通，对 $\Omega$ 内每条闭路径 $\Gamma$，定理 10.35 的条件(1)均成立．

**10.39 引理** 如果 $\gamma_0$ 及 $\gamma_1$ 都是具有参数区间[0,1]的闭路径，$\alpha$ 为一复数，且

(1) $\qquad |\gamma_1(s)-\gamma_0(s)|<|\alpha-\gamma_0(s)|\qquad(0\leqslant s\leqslant 1)$

则 $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)=\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)$.

**证明** 首先注意由(1)推出 $\alpha\notin\gamma_0^*$ 及 $\alpha\notin\gamma_1^*$. 因此能定义 $\gamma=(\gamma_1-\alpha)/(\gamma_0-\alpha)$. 于是

$$(2)\qquad \frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{\gamma_1'}{\gamma_1-\alpha}-\frac{\gamma_0'}{\gamma_0-\alpha}$$

且由(1)得 $|1-\gamma|<1$. 因此 $\gamma^*\subset D(1;1)$. 这就推出 $\mathrm{Ind}_\gamma(0)=0$. 现在, (2)式沿 $[0,1]$ 的积分给出了所求结果.

**10.40 定理** 如果 $\Gamma_0$ 及 $\Gamma_1$ 都是区域 $\Omega$ 内 $\Omega$-同伦的闭路径, 并且 $\alpha\notin\Omega$, 则

$$(1)\qquad \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha)=\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha)$$

**证明** 由定义, 存在连续映射 $H: I^2\to\Omega$, 使得

$$(2)\qquad H(s,0)=\Gamma_0(s),\quad H(s,1)=\Gamma_1(s),\quad H(0,t)=H(1,t)$$

由于 $I^2$ 是紧的, 于是 $H(I^2)$ 也是紧的. 因此, 存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$(3)\qquad 当(s,t)\in I^2 时, |\alpha-H(s,t)|>2\varepsilon$$

由于 $H$ 一致连续, 存在正数 $n$, 使得

$$(4)\qquad 当|s-s'|+|t-t'|\leqslant 1/n 时, |H(s,t)-H(s',t')|<\varepsilon$$

若 $i-1\leqslant ns\leqslant i$ 且 $i=1,\cdots,n$, 由

$$(5)\qquad \gamma_k(s)=H\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)(ns+1-i)+H\left(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n}\right)(i-ns)$$

定义多边形闭路径 $\gamma_0,\cdots,\gamma_n$. 由(4)及(5)得

$$(6)\qquad |\gamma_k(s)-H(s,k/n)|<\varepsilon\qquad (k=0,\cdots,n;\ 0\leqslant s\leqslant 1)$$

特别, 取 $k=0$ 和 $k=n$,

$$(7)\qquad |\gamma_0(s)-\Gamma_0(s)|<\varepsilon,\quad |\gamma_n(s)-\Gamma_1(s)|<\varepsilon$$

由(6)和(3)

$$(8)\qquad |\alpha-\gamma_k(s)|>\varepsilon\qquad (k=0,\cdots,n;\ 0\leqslant s\leqslant 1)$$

另一方面, (4)和(5)也给出

$$(9)\qquad |\gamma_{k-1}(s)-\gamma_k(s)|<\varepsilon\qquad (k=1,\cdots,n;\ 0\leqslant s\leqslant 1)$$

现由(7)、(8)、(9)并将引理 10.39 应用 $n+2$ 次，便得出 $\alpha$ 关于路径 $\Gamma_0$, $\gamma_0$、$\gamma_1$, …, $\gamma_n$, $\Gamma_1$ 的每一个都具有相同的指数. 这就证明了定理.

注: 上述证明中若 $\Gamma_t(s)=H(s,t)$, 因为 $H$ 并没有假设可微, 所以每个 $\Gamma_t$ 乃是一条闭曲线, 而不一定是一条路径. 基于这个理由, 才引出了路径 $\gamma_k$. 另一个(或者是更合适的)克服这一困难的方法是, 把指数的定义扩充到闭曲线上. 这将在习题 28 中略述.

## 残数计算

**10.41 定义** 一函数 $f$ 称为开集 $\Omega$ 内的亚纯函数, 如果存在一个集 $A\subset\Omega$, 使得

(a) $A$ 在 $\Omega$ 内无极限点.

(b) $f\in H(\Omega-A)$.

(c) $f$ 在 $A$ 每一点具有极点.

注意并没有排除 $A=\varnothing$ 的可能. 这样, 每个 $f\in H(\Omega)$ 在 $\Omega$ 内也都是亚纯的.

同时要注意由(a)可推出 $\Omega$ 内没有一个紧子集能包含 $A$ 的无限多个点, 因此 $A$ 最多是可数的.

如果 $f$ 及 $A$ 如上所述, $\alpha\in A$, 且

$$Q(z)=\sum_{k=1}^{m}c_k(z-\alpha)^{-k} \tag{1}$$

如定理10.21所定义的一样, 是 $f$ 在 $\alpha$ 的主要部分(也就是, 若 $f-Q$ 具有可去奇点 $\alpha$). 则数 $c_1$ 称为 $f$ 在 $\alpha$ 的残数:

$$c_1=\mathrm{Res}(f;\alpha) \tag{2}$$

如果 $\Gamma$ 是一个圈, 且 $\alpha\notin\Gamma^*$, 由(1)推出:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q(z)dz=c_1\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha)=\mathrm{Res}(Q;\alpha)\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) \tag{3}$$

这是下列定理的一个很特殊的情况，并且将在该定理的证明中用到.

**10.42 残数定理** 假设 $f$ 是 $\Omega$ 内的亚纯函数. 令 $A$ 为 $\Omega$ 内的使 $f$ 具有极点的点集. 若 $\Gamma$ 为 $\Omega-A$ 内的一个圈, 使得

(1)
$$\text{对所有 } \alpha\notin\Omega, \mathrm{Ind}_{\Gamma}(\alpha)=0$$

则

(2)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(z)dz=\sum_{a\in A}\mathrm{Res}(f;a)\mathrm{Ind}_{\Gamma}(a)$$

**证明** 设 $B=\{a\in A;\ \mathrm{Ind}_{\Gamma}(a)\neq 0\}$. 令 $W$ 为 $\Gamma^*$ 的余集, 则 $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z)$ 在 $W$ 的每个分支 $V$ 上是常数. 若 $V$ 是无界的, 或者当 $V$ 与 $\Omega^c$ 相交时, (1)推出对每个 $z\in V, \mathrm{Ind}_{\Gamma}(z)=0$. 由于 $A$ 在 $\Omega$ 内无极限点, 我们得出 $B$ 是一个有限集.

因此(2)中的和式虽然形式上是无限的, 而实际上是有限的.

令 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $B$ 中的点, $Q_1,\cdots,Q_n$ 为 $f$ 在 $a_1,\cdots,a_n$ 的主要部分, 并令 $g=f-(Q_1+\cdots+Q_n)$. (若 $B=\varnothing$, 这种可能性并没有排除在外, 则 $g=f$.) 令 $\Omega_0=\Omega-(A-B)$. 由于 $g$ 在 $a_1,\cdots a_n$ 具有可去奇点, 应用定理 10.35 于函数 $g$ 及开集 $\Omega_0$, 可得

(3)
$$\int_{\Gamma}g(z)dz=0$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}Q_k(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(Q_k;a_k)\mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_k)$$

且由于 $f$ 及 $Q_k$ 在 $a_k$ 具有相同的残数, 我们便得到(2).

我们用残数定理两个典型的应用来结束这一章. 第一个涉及到全纯函数的零点. 第二个是某些积分的计算.

**10.43 定理** 假设 $\gamma$ 是区域 $\Omega$ 内的闭路径, 使得对不在 $\Omega$ 内的每个 $\alpha$, $\mathrm{Ind}_{\gamma}(\alpha)=0$. 同时假设对每个 $\alpha\in\Omega-\gamma^*$, $\mathrm{Ind}_{\gamma}(\alpha)=0$ 或

1, 并设具有 $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)=1$ 的所有 $\alpha$ 的集为 $\Omega_1$.

对任何 $f\in H(\Omega)$, 令 $N_f$ 为 $f$ 在 $\Omega$ 内的按重数计算的零点的个数.

(a) 若 $f\in H(\Omega)$, 且 $f$ 在 $\gamma^*$ 上没有零点, 则

$$(1)\qquad N_f=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\mathrm{Ind}_\Gamma(0)$$

此处 $\Gamma=f\circ\gamma$.

(b) 若同时有 $g\in H(\Omega)$, 且

$$(2)\qquad |f(z)-g(z)|<|f(z)| \quad \text{对所有 } z\in\gamma^*$$

则 $N_g=N_f$.

(b) 这一部分通常称为 Rouche 定理. 它说明如果两个全纯函数, 如同(2)所明确表示出来的那样, 在 $\Omega_1$ 的边界上互相接近, 则在 $\Omega_1$ 内具有相同的零点个数.

**证明** 令 $\varphi=f'/f$. 它是 $\Omega$ 内的一个亚纯函数. 若 $a\in\Omega$, 而且 $f$ 在 $a$ 具有 $m=m(a)$ 阶零点, 则 $f(z)=(z-a)^m h(z)$. 此处 $h$ 及 $1/h$ 均在 $a$ 的某邻域 $V$ 全纯. 在 $V-\{a\}$ 内

$$(3)\qquad \varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{h'(z)}{h(z)}$$

这样

$$(4)\qquad \mathrm{Res}(\varphi;a)=m(a)$$

令 $A=\{a\in\Omega_1: f(a)=0\}$. 如果我们把关于 $\gamma$ 的指数的假设与残数定理结合起来, 就得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{a\in A}\mathrm{Res}(\varphi;\ a)=\sum_{a\in A}m(a)=N_f$$

这就证明了(1)的一半. 另一半是直接计算得出的结果:

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f'(\gamma(s))}{f(\gamma(s))}\gamma'(s)ds=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

这里 $\gamma$ 的参数区间取为$[0, 2\pi]$.

其次,(2)表明 $g$ 在 $\gamma^*$ 上没有零点. 因此用 $g$ 代替 $f$ 时, (1)成立. 令 $\Gamma_0=g\circ\gamma$, 则由(1)、(2)及引理 10.39 得出

$$N_g=\operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(0)=\operatorname{Ind}_\Gamma(0)=N_f.$$

**10.44 问题** 对实数 $t$, 当 $A\to\infty$ 时, 求

$$\int_{-A}^{A}\frac{\sin x}{x}e^{itx}dx \tag{1}$$

的极限.

**解** 因为 $z^{-1}\cdot\sin z\cdot e^{itz}$ 是整函数, 由 Cauchy 定理, 它沿$[-A, A]$的积分等于沿路径 $\Gamma_A$ 的积分, 其中 $\Gamma_A$ 沿实轴 $-A$ 到 $-1$, 沿单位圆下半圆周由 $-1$ 到 $1$, 沿实轴由 $1$ 到 $A$ 得出. $\Gamma_A$ 避开了原点, 因此我们可以通过恒等式

$$2i\sin z=e^{iz}-e^{-iz}$$

看出(1)等于 $\varphi_A(t+1)-\varphi_A(t-1)$. 这里

$$\frac{1}{\pi}\varphi_A(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A}\frac{e^{isz}}{z}dz \tag{2}$$

用两种方法把 $\Gamma_A$ 补充成为闭路径: 第一种, 用由 $A$ 到 $-Ai$ 到 $-A$ 的半圆周; 第二种, 用 $A$ 到 $Ai$ 到 $-A$ 的半圆周. 函数 $e^{isz}/z$ 在 $z=0$ 具有一个极点, 在这点它的残数为 1. 于是得到

$$\frac{1}{\pi}\varphi_A(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\exp(isAe^{i\theta})d\theta \tag{3}$$

和

$$\frac{1}{\pi}\varphi_A(s)=1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\exp(isAe^{i\theta})d\theta \tag{4}$$

注意到

$$|\exp(isAe^{i\theta})|=\exp(-As\sin\theta) \tag{5}$$

并且这是$<1$的，且若$s$与$\sin\theta$具有相同符号，当$A\to\infty$时，它趋于零。因此，控制收敛定理表明若$s<0$，则(3)的积分趋于零，若$s>0$，则(4)的积分趋于零。这样

$$
(6)\qquad \lim_{A\to\infty}\varphi_A(s)=\begin{cases}\pi & \text{若 } s>0\\ 0 & \text{若 } s<0\end{cases}
$$

若我们应用(6)于$s=t+1$及$s=t-1$，我们就得到

$$
(7)\qquad \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{\sin x}{x}e^{itx}dx=\begin{cases}\pi & \text{若 } -1<t<1\\ 0 & \text{若 } |t|>1\end{cases}
$$

又由于$\varphi_A(0)=\frac{\pi}{2}$，故当$t=\pm1$时，(7)中的极限是$\frac{\pi}{2}$。

注意(7)给出$\sin x/x$的 Fourier 变式。我们把对照反演定理来验证这结果作为一个习题。

## 习　题

1　在这章内暗中使用了下列事实：如果$A$及$B$为平面的不相交子集，$A$是紧的而$B$是闭的，则存在$\delta>0$，使得对所有$\alpha\in A$及$\beta\in B$，有$|\alpha-\beta|\geqslant\delta$。用任意度量空间代替平面证明这个结果。

2　在10.8节末尾出现了路径长度的定义。这是否与第8章习题10给出的定义相一致？

3　若$f$和$g$均为整函数，且对每个$z$，$|f(z)|\leqslant|g(z)|$，你能推出什么结果？

4　假设$f$为整函数，且对所有的$z$，

$$|f(z)|\leqslant A+B|z|^k$$

此处$A$、$B$、和$k$都是正数。证明$f$必然是一个多项式。

5　假设$\{f_n\}$是$\Omega$内一致有界的全纯函数序列，使得对每个$z\in\Omega$，$\{f_n\}$收敛。证明在$\Omega$的每个紧子集上，这个收敛性是一致的。

提示：把控制收敛定理应用于$f_n-f_m$的 Cauchy 公式。

6　存在区域$\Omega$，使得$\exp(\Omega)=D(1;1)$。证明$\exp$在$\Omega$内是一一的，但有许多这样的$\Omega$。固定一个，并对$|z-1|<1$，定义$\log z$为使$e^w=z$的$w$。有

$w\in\Omega$. 证明 $\log'(z)=\frac{1}{z}$. 在

$$\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n$$

中求出系数 $a_n$, 并由此求出展开式

$$\log z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$$

的系数 $c_n$. 在其它哪些圆盘上能够这样做?

7 若 $f\in H(\Omega)$, $f$ 的导数的 Cauchy 公式

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

在关于 $z$ 和 $\Gamma$ 的某些条件下是正确的. 陈述出这些条件, 并证明这个公式.

8 假设 $P$ 和 $Q$ 为多项式, $Q$ 的次数比 $P$ 至少高 2 次, 且有理函数 $R=P/Q$ 在实轴上无极点. 证明 $R$ 沿 $(-\infty,\infty)$ 的积分是 $R$ 在上半平面残数和的 $2\pi i$ 倍. (以沿合适的半圆周的积分代替沿 $(-A,A)$ 的积分, 并应用残数定理.) 对下半平面类似的陈述应是怎样? 用这方法计算:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$$

9 用习题 8 所述的方法, 对实数 $t$ 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}dx$. 对照 Fourier 变式的反演定理核对你的答案.

10 设 $\gamma$ 为正向单位圆周, 计算

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^z-e^{-z}}{z^4}dz$$

11 假设 $\alpha$ 为一复数, $|\alpha|\neq 1$. 通过沿单位圆周对 $(z-\alpha)^{-1}(z-1/\alpha)^{-1}$ 积分来计算

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}$$

12 计算

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{itx}dx \quad (\text{对实数 } t)$$

13 计算

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n} \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

[对偶数 $n$, 可用习题 8 的方法. 然而, 可以选取一条不同的路径: 由 0 到 $R$ 到 $R\exp(2\pi i/n)$ 到 0, 它能简化计算, 同时也能对奇数 $n$ 进行计算.]

答: $(\pi/n)/\sin(\pi/n)$.

14 假设 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 都是平面区域, $f$ 和 $g$ 分别在 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 内定义, 并且都是非常数的复函数, 且 $f(\Omega_1)\subset\Omega_2$. 令 $h=g\circ f$. 如果 $f$ 和 $g$ 是全纯的, 我们知道 $h$ 也是全纯的. 假设我们知道 $f$ 和 $h$ 是全纯的, 关于 $g$ 我们能得出什么结论? 若知道 $g$ 和 $h$ 是全纯的, 又怎么样?

15 假设 $\Omega$ 是一个区域, $\varphi\in H(\Omega)$, $\varphi'$ 在 $\Omega$ 内没有零点. $f\in H(\varphi(\Omega))$, $g=f\circ\varphi$, $z_0\in\Omega$ 且 $w_0=\varphi(z_0)$. 证明如果 $f$ 在 $w_0$ 有 $m$ 阶零点, 则 $g$ 在 $z_0$ 也有 $m$ 阶零点. 如果 $\varphi'$ 在 $z_0$ 有 $k$ 阶零点, 结论应该怎样改变?

16 假设 $\mu$ 为测度空间 $X$ 上的复测度, $\Omega$ 是平面内的开集, $\varphi$ 为 $\Omega\times X$ 上的有界函数, 使得对每个 $z\in\Omega$, $\varphi(z,t)$ 是 $t$ 的可测函数, 且 $\varphi(z,t)$ 对每个 $t\in X$, 在 $\Omega$ 内是全纯的. 对 $z\in\Omega$, 定义

$$f(z)=\int_X\varphi(z,t)\,d\mu(t)$$

证明 $f\in H(\Omega)$. 提示: 证明对每个紧集 $K\subset\Omega$, 对应一个常数 $M<\infty$, 使得

$$\left|\frac{\varphi(z,t)-\varphi(z_0,t)}{z-z_0}\right|<M \qquad (z \text{ 和 } z_0\in K,\ t\in X)$$

17 决定下列函数有定义且全纯的区域:

$$f(z)=\int_0^1\frac{dt}{1+tz},\quad g(z)=\int_0^\infty\frac{e^{tz}}{1+t^2}dt,\quad h(z)=\int_{-1}^1\frac{e^{tz}}{1+t^2}dt$$

提示: 或者用习题 16, 或者结合使用 Morera 定理和 Fubini 定理.

18 假设 $f\in H(\Omega)$, $\bar D(a;r)\subset\Omega$, $\gamma$ 为中心在 $a$, 半径为 $r$ 的正向圆周, 且 $f$ 在 $\gamma^*$ 上没有零点. 对 $p=0$, 积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}z^p\,dz$$

等于 $f$ 在 $D(a;r)$ 内的零点数. 对 $p=1,2,3,\cdots$, 这些积分的值是多少? (利用 $f$ 的零点). 如果用任意的 $\varphi\in H(\Omega)$ 代替 $z^p$, 答案又是什么?

19 假设 $f\in H(U)$, $g\in H(U)$, 且 $f$ 和 $g$ 在 $U$ 内都没有零点. 若

$$\frac{f'}{f}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{g'}{g}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

求 $f$ 和 $g$ 之间另一个简单关系.

20　假设$\Omega$为一区域，对$n=1,2,3,\cdots,f_n\in H(\Omega)$，没有任何一个函数$f_n$在$\Omega$内有零点，且在$\Omega$的紧子集上$\{f_n\}$一致收敛于$f$. 证明：或者$f$在$\Omega$内没有零点，或者对所有$z\in\Omega, f(z)=0$.

如果$\Omega'$是一个包含每一个$f_n(\Omega)$的区域，且$f$不是常数，证明$f(\Omega)\subset\Omega'$.

21　假设$f\in H(\Omega)$、$\Omega$包含闭单位圆盘，且$|z|=1$时，$|f(z)|<1$. $f$在这圆盘内必须有多少个不动点？就是说，方程$f(z)=z$在圆盘内有多少解？

22　假设$f\in H(\Omega)$, $\Omega$包含闭单位圆盘，$|z|=1$时，$|f(z)|>2$，且$f(0)=1$. $f$在单位圆盘内是否一定有一零点？

23　假设$P_n(z)=1+z/1!+\cdots+z^n/n!$, $Q_n(z)=P_n(z)-1$，此处$n=1,2,3,\cdots$. 对大的$n$，关于$P_n$及$Q_n$的零点位置你能说些什么？要尽可能地指明.

24　证明下列Rouché定理的一般形式：设$\Omega$为平面上紧集$K$的内部. 假设$f$和$g$在$K$上连续，在$\Omega$内全纯，且对所有$z\in K-\Omega$, $|f(z)-g(z)|<|f(z)|$，则$f$和$g$在$\Omega$内具有相同数目的零点.

25　设$A$为圆环区域$\{z: r_1<|z|<r_2\}$，这里$r_1$及$r_2$都是给定的正数.

(*a*) 证明Cauchy公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}\right)\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

在下列条件下是正确的：$f\in H(A)$,

$$r_1+\varepsilon<|z|<r_2-\varepsilon$$

且

$$\gamma_1(t)=(\gamma_1+\varepsilon)e^{-it},\quad \gamma_2(t)=(r_2-\varepsilon)e^{it}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

(*b*) 运用(*a*)证明每个$f\in H(A)$都能分解为和式$f=f_1+f_2$，这里$f_1$在$\overline{D}(0;r_1)$的外部全纯，而$f_2\in H(D(0;r_2))$. 如果我们要求当$|z|\to\infty$时，$f_1(z)\to 0$，证明这个分解式是唯一的.

(*c*) 用这分解式使每个$f\in H(A)$，对应于在$A$内收敛于$f$的"Laurent级数"

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n z^n$$

证明对每个$f$仅有一个这样的级数，并证明在$A$的紧子集上，这级数一致收敛于$f$.

(d) 若$f\in H(A)$且$f$在$A$内有界，证明$f_1$和$f_2$这两部分也都是有界的.

(e) 上述结论有那些能扩充到$r_1=0$的情形（或者$r_2=\infty$，或两者同时出现）？

(f) 上述结论有那些能扩充到界于有限多个（多于两个）圆周的区域？

26 要求展开函数

$$\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{3-z}$$

为形如$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n z^n$的级数.

这样的展开式有多少个？它们中的每一个在什么区域内是正确的？对每个这样的展开式，明确地求出系数$c_n$.

27 假设$\Omega$是由不等式$a<y<b$决定的水平带形，假设$f\in H(\Omega)$，并且对所有的$z\in\Omega$，$f(z)=f(z+1)$. 证明$f$在$\Omega$内具有Fourier展开式

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi inz}$$

且对每个$\varepsilon>0$，这个级数在$\{z: a+\varepsilon\leqslant y\leqslant b-\varepsilon\}$内一致收敛.

提示：映射$z\to e^{2\pi iz}$将$f$变为圆环内的一个函数.

找出一个积分公式，使系数$c_n$能按这个公式由$f$计算出来.

28 假设$\Gamma$是平面内一条闭曲线，具有参数区间$[0, 2\pi]$，取$\alpha\notin\Gamma^*$. 用三角多项式$\Gamma_n$一致逼近$\Gamma$. 证明当$m$和$n$充分大时，$\text{Ind}_{\Gamma_n}(\alpha)=\text{Ind}_{\Gamma_m}(\alpha)$. 定义这公共值为$\text{Ind}_\Gamma(\alpha)$. 证明这结果不依赖于$\{\Gamma_n\}$的选择. 证明引理10.39现在对闭曲线也真确，并用以给出定理10.40的一个不同的证明.

# 第十一章 调和函数

## Cauchy-Riemann 方程

**11.1 算子 $\partial$ 和 $\bar{\partial}$** 设 $f$ 是定义在平面开集 $\Omega$ 内的复函数. 把 $f$ 看作是将 $\Omega$ 映到 $R^2$ 内的变换，且设 $f$ 在某点 $z_0\in\Omega$ 有 8.22 的意义下的微分. 为简单起见，设 $z_0=f(z_0)=0$. 这样，$f$ 的可微性假定等价于两个复数 $\alpha$ 和 $\beta$（在 $z_0=0$ 处 $f$ 关于 $x$ 和 $y$ 的偏导数）的存在，使得

$$f(z)=\alpha x+\beta y+\eta(z)z \qquad (z=x+iy) \tag{1}$$

此处当 $z\to 0$ 时，$\eta(z)\to 0$.

由于 $2x=z+\bar{z}$ 和 $2iy=z-\bar{z}$，故(1)可写为

$$f(z)=\frac{\alpha-i\beta}{2}z+\frac{\alpha+i\beta}{2}\bar{z}+\eta(z)z \tag{2}$$

的形式. 这就启发我们引进微分算子

$$\partial=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \bar{\partial}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3}$$

现在(2)变成

$$\frac{f(z)}{z}=(\partial f)(0)+(\bar{\partial}f)(0)\cdot\frac{\bar{z}}{z}+\eta(z)\quad (z\neq 0) \tag{4}$$

对实数 $z$，$\bar{z}/z=1$；对纯虚数 $z$，$\bar{z}/z=-1$. 因此，当且仅当 $(\bar{\partial}f)(0)=0$ 时，$f(z)/z$ 的极限为零，并且得到全纯函数的如下特征:

**11.2 定理** 设 $f$ 是 $\Omega$ 内的复函数. 在 $\Omega$ 的每一点上 $f$ 可微，则 $f\in H(\Omega)$ 当且仅当对每一点 $z\in\Omega$，Cauchy-Riemann 方程

(1) $$(\bar{\partial} f)(z)=0$$

成立. 在那种情况下,我们有

(2) $$f'(z)=(\partial f)(z) \qquad (z\in\Omega)$$

如果 $f=u+iv$, $u$ 和 $v$ 是实的,则(1)分解成一对方程

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$$

此处的下标表示对所指的变量求偏导数. 这些就是全纯函数的实部和虚部所必须满足的 Cauchy-Riemann 方程.

**11.3 Laplace 算子** 设 $f$ 是平面开集 $\Omega$ 内的复函数,使得在 $\Omega$ 内每一点 $f_{xx}$ 和 $f_{yy}$ 存在. 则 $f$ 的 Laplace 算子值定义为

(1) $$\Delta f=f_{xx}+f_{yy}$$

如果 $f$ 在 $\Omega$ 内连续,且在 $\Omega$ 的每一点

(2) $$\Delta f=0$$

则称 $f$ 在 $\Omega$ 内是调和的.

由于实函数的 Laplace 算子是实的(如果存在的话),显然,一个复函数当且仅当它的实部和虚部都在 $\Omega$ 内调和时, $f$ 在 $\Omega$ 内是调和的.

注意,假定 $f_{xy}=f_{yx}$,则

(3) $$\Delta f=4\partial\bar{\partial} f$$

当 $f$ 具有连续二阶导数时,这个假定是成立的.

如果 $f$ 是全纯函数,则 $\bar{\partial} f=0$,且具有任意阶的连续导数,因而(3)式表明:

**11.4 定理** 全纯函数是调和的.

现在我们转过来关注调和函数的积分表示. 它与全纯函数的 Cauchy 公式有着密切关系. 其中它将证明每一个实调和函数局部地是一个全纯函数的实部. 同时它将指出关于开圆盘内一些全纯函数类的边界状况的信息.

## Poisson 积分

**11.5 Poisson 核** 这是指的函数

(1) $$P_r(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{int} \qquad (0\leqslant r<1,\ t \text{ 为实数})$$

我们可以把 $P_r(t)$ 看作是两个变量 $r$ 和 $t$ 的函数，或者以 $r$ 为指标，把 $P_r(t)$ 看作是 $t$ 的函数族.

如果 $z=re^{i\theta}(0\leqslant r<1,\ \theta$ 为实数)，则用 5.24 节做过的简单计算便可证明.

(2) $$P_r(\theta-t)=\text{Re}\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right]=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$$

从(1)看出

(3) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)dt=1 \qquad (0\leqslant r<1)$$

从(2)得到 $P_r(t)>0,\quad P_r(t)=P_r(-t)$,

(4) $$P_r(t)<P_r(\delta) \qquad (0<\delta<|t|\leqslant\pi)$$

而且

(5) $$\lim_{r\to 1}P_r(\delta)=0 \qquad (0<\delta\leqslant\pi)$$

**11.6 记号** 今后，$U$ 表示开单位圆盘，即 $U=D(0;1)$，而 $T$ 表示单位圆周，即复平面内 $U$ 的边界.

如果 $f$ 是 $T$ 上的函数而 $\mu$ 是 $T$ 上的一个测度，用

(1) $$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(t)d\mu(t)$$

代替 $\int_T fd\mu$ 经常是合意的，此处 $\alpha$ 是一个适当选取的实数. (1)理解为沿半开区间

$$[\alpha,\alpha+2\pi)$$

积分. 当然(1)的严格解释没有什么意义，$f$ 和 $\mu$ 是定义在 $T$ 上而

不是定义在实轴的一个区间上. 然而,如果 $f$ 和 $\mu$ 定义在 $T$ 上,且对 $\alpha \leqslant t < \alpha + 2\pi$, $E \subset [\alpha, \alpha + 2\pi)$, 定义

(2) $$\tilde{f}(t) = f(e^{it}), \quad \tilde{\mu}(E) = \mu(\varphi(E))$$

此处 $\varphi(t) = e^{it}$, 则

(3) $$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \tilde{f}(t) d\tilde{\mu}(t) = \int_T f d\mu$$

是正确的. 因此,记号(1)相当于将 $\tilde{f}$ 和 $f$、并将 $\tilde{\mu}$ 和 $\mu$ 视为相同,而且不应当引起混乱.

关于(1)优于 $\int_T f d\mu$ 的地方. 简单地说就是,形如(1)的积分处理起来要比较容易.

如同 4.23 节那样,我们继续把空间 $L^p(T)$ 和 $C(T)$ 与 $R^1$ 上以 $2\pi$ 为周期的相应的函数空间看作是同一的.

**11.7 Poisson积分** 如果 $f \in L^1(T)$ 且

(1) $$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt$$

则在 $U$ 内这样定义的函数 $F$ 称为 $f$ 的 Poisson 积分. 我们有时将关系式(1)缩写为

(2) $$F = P[f]$$

类似地,在 $T$ 上的复 Borel 测度 $\mu$ 的 Poisson 积分 $F = P[d\mu]$ 定义为

(3) $$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$$

如果把每一个 $f \in L^1(T)$ 对应于其不定积分 $\mu(E) = \int_E f(t) dt$, 我们看出形式(1)的函数 $F$ 组成由(3)定义的那类函数的一个子类.

如果 $\mu$ 是实的,则公式 11.5(2)表明 $P[d\mu]$ 是

(4) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t) \qquad (z=re^{i\theta};z\in U)$$

的实部. 但根据定理 10.7,(4)定义了$U$内的一个全纯函数. 因此$P[d\mu]$是一个调和函数. 由于调和函数的线性组合(关于常系数的)是调和函数,所以我们证明了下面的定理:

**11.8 定理** 对$T$上的每一个复 Borel 测度$\mu$,它的 Poisson 积分$P[d\mu]$是$U$内的调和函数,因而对每一个$f\in L^1(T)$, $P[f]$在$U$内是调和的.

下面的定理表明, 连续函数的 Poisson 积分在接近$U$的边界时表现得特别理想.

**11.9 定理** 如果$f\in C(T)$,并且在闭单位圆盘$\bar{U}$上, $Hf$由

(1) $$(Hf)(re^{i\theta})=\begin{cases}f(e^{i\theta}) & 当\ r=1\\ P[f](re^{i\theta}) & 当\ 0\leqslant r<1\end{cases}$$

定义,则$Hf\in C(\bar{U})$.

**证明** 由于$P_r(t)>0$,所以对每一个$g\in C(T)$, 公式 11.5(3)表明

(2) $$|P[g](re^{i\theta})|\leqslant\|g\|_T \qquad (0\leqslant r<1)$$

因此

(3) $$\|Hg\|_{\bar{U}}=\|g\|_T \qquad (g\in C(T))$$

(如同 5.22 节那样,我们用记号$\|g\|_E$表示$|g|$在集$E$上的上确界.)如果

(4) $$g(e^{i\theta})=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{in\theta}$$

是任意三角多项式,则从 11.5(1)得到

(5) $$(Hg)(re^{i\theta})=\sum_{n=-N}^{N}c_nr^{|n|}e^{in\theta}$$

所以$Hg\in C(\bar{U})$.

最后，存在三角多项式 $g_k$，使得当 $k\to\infty$ 时，$\|g_k-f\|_T\to 0$（参看 4.24 节）．由(3)得到，当 $k\to\infty$ 时，

$$\|Hg_k-Hf\|_{\overline{U}}=\|H(g_k-f)\|_{\overline{U}}\to 0 \tag{6}$$

这就是说，函数 $Hg_k\in C(\overline{U})$ 在 $\overline{U}$ 上一致收敛于 $Hf$．因此 $Hf\in C(\overline{U})$．

注：这个定理提供了一个边值问题(Dirichlet 问题)的解：在 $T$ 上给出一个连续函数 $f$，要求在 $U$ 内找出"边界值为 $f$"的调和函数 $F$．借助于 $f$ 的 Poisson 积分，定理提出了一个解答，而且更精确地表述了 $f$ 和 $F$ 之间的关系．与这个存在性定理对应的唯一性定理包含在下面的结果中．

**11.10 定理** 设 $u$ 是闭单位圆盘 $\overline{U}$ 上的连续实函数，且 $u$ 在 $U$ 内调和，则(在 $U$ 内) $u$ 是限制在 $T$ 上的 Poisson 积分，且 $u$ 是全纯函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}u(e^{it})\,dt \qquad (z\in U) \tag{1}$$

的实部．

**证明** 定理 10.7 证明了 $f\in H(U)$．如果 $u_1=\mathrm{Re}\,f$，则(1)表明 $u_1$ 是 $u$ 的边界值的 Poisson 积分．而我们一旦证实了 $u=u_1$，本定理也就得到证明．

设 $h=u-u_1$，则 $h$ 在 $\overline{U}$ 上连续(应用定理11.9 于$u_1$)，$h$ 在 $U$ 内调和，并且对于 $T$ 的所有点，$h=0$．假设(这将引出矛盾)对某点 $z_0\in U$，$h(z_0)>0$．固定 $\varepsilon$，使得 $0<\varepsilon<h(z_0)$，同时定义

$$g(z)=h(z)+\varepsilon|z|^2 \qquad (z\in\overline{U}) \tag{2}$$

则 $g(z_0)\geqslant h(z_0)>\varepsilon$．由于 $g\in C(\overline{U})$ 且对于 $T$ 的所有各点有 $g=\varepsilon$，所以存在一点 $z_1\in U$，在这点 $g$ 有一个局部极大值．这就推出在 $z_1$，$g_{xx}\leqslant 0$ 和 $g_{yy}\leqslant 0$．但(2)表明 $g$ 的 Laplace 算子值是 $4\varepsilon>0$．这就得出了矛盾．

因此 $u-u_1\leqslant 0$. 相同的论证表明 $u_1-u\leqslant 0$, 因而 $u=u_1$, 并且完成了证明.

我们以下涉及到的，将是对于固定的 $\theta$, 当 $r\to 1$ 时 $P[d\mu](re^{i\theta})$ 的变化状况. 换言之，我们准备研究测度的 Poisson 积分的径向极限(如果它们存在的话). 下面的引理包含了这一研究的计算部分.

**11.11 引理** 设 $\mu$ 是 $T$ 上的实 Borel 测度. 固定 $\theta$, 设

(1) $$J(\theta;s)=\{e^{it}:\theta-s<t<\theta+s\}$$

于是 $J(\theta;\ s)$ 是以 $e^{i\theta}$ 为中心长为 $2s$ 的开圆弧，并且假定存在一个 $\delta$, $0<\delta<\pi$, 和一个实数 $A$, 使得 $0<s<\delta$ 时,

(2) $$\mu(J(\theta;s))<2sA$$

如果 $F=P[d\mu]$, 则由这些条件可以推出

(3) $$F(re^{i\theta})<A+|A|P_r(\delta)+\frac{1}{2\pi}P_r(\delta)\|\mu\| \quad (0\leqslant r<1)$$

此处 $\|\mu\|=|\mu|(T)$ 是 $\mu$ 的全变差.

**证明** 已知

(4) $$F(re^{it})=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t)$$

将这积分分成两部分. 如果 $\delta\leqslant|\theta-t|\leqslant\pi$, 则

$$P_r(\theta-t)\leqslant P_r(\delta)$$

因而沿这个区域的积分不大于(3)的最后一项. 剩下沿 $I(\delta)=(\theta-\delta,\theta+\delta)$ 的积分, 应用 Fubini 定理, 可以通过分部积分法进行估计. 我们求

(5) $$P'_r(s)dsd\mu(t)$$

(微分是对于 $s$ 来求的)沿三角形

(6) $$\{(s,\ t):\theta-s<t<\theta+s,0<s<\delta\}$$

的积分, 得到

$$(7)\qquad \int_0^\delta \mu(I(s))P_r'(s)ds=\int_{I(\delta)}[P_r(\delta)-P_r(\theta-t)]d\mu(t)$$

先对 $t$ 进行积分得到(7)的左边；先对 $s$ 进行积分得到(7)的右边. 因为根据假设(注意，如同 11.6 节那样，我们认为 $\mu$ 和 $\tilde{\mu}$ 是同一的)，有 $\mu(I(s))<2sA$，又由于在 $(0,\pi)$ 上 $P_r'(s)<0$(从不等式11.5(4)得到)，所以从(7)可以断定

$$\begin{aligned}\int_{I(\delta)}P_r(\theta-t)d\mu(t)&=P_r(\delta)\mu(I(\delta))+\int_0^\delta\mu(I(s))[-P_r'(s)]ds\\&<2A\left[\delta P_r(\delta)-\int_0^\delta sP_r'(s)ds\right]\\&=2A\int_0^\delta P_r(s)ds\\&=2\pi A-2A\int_\delta^\pi P_r(s)ds\\&\leqslant 2\pi A+2\pi|A|P_r(\delta)\end{aligned}$$

这就得出式(3).

**11.12 定理** 设 $\mu$ 是 $T$ 上的实 Borel 测度，$J(\theta;\ s)$ 与引理11.11 中的相同. 定义

$$(1)\qquad (\bar{D}\mu)(\theta)=\limsup_{s\to 0}\frac{\mu(J(\theta;s))}{2s}$$

类似地，用 lim 和 liminf 代替 limsup 而定义 $(D\mu)(\theta)$ 和 $(\underline{D}\mu)(\theta)$. 设

$$(2)\qquad F(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t)\qquad (0\leqslant r<1)$$

则对每个 $\theta$，

$$(3)\qquad (\underline{D}\mu)(\theta)\leqslant\liminf_{r\to 1}F(re^{i\theta})\leqslant\limsup_{r\to 1}F(re^{i\theta})\leqslant(\bar{D}\mu)(\theta)$$

同时

$$(4) \qquad \lim_{r\to 1} F(re^{i\theta}) = (D\mu)(\theta)$$

存在且对几乎所有的 $\theta$ 是有限的(关于 Lebesgue 测度).

注意，$(D\mu)(\theta)$在这里定义为 $\mu$ 在 $\theta$ 处的对称导数，而且对于在第八章中研究过的更一般意义下不是可微的那些点 $\theta$，它仍然有可能是存在的.

**证明** 固定 $\theta$，并设 $A>(\bar{D}\mu)(\theta)$. 则存在 $\delta>0$ 使得引理 11.11 的假设成立. 当 $r\to 1$ 时，$P_r(\delta)\to 0$，于是根据引理 11.11 得到(3)式中最后面的不等式. 如果用 $-\mu$ 代替 $\mu$ 并应用最后一个不等式，则得到(3)式中第一个不等式，而(4)是定理 8.6 在一维情况下的推论.

**系** 如果 $f\in L^1(T)$，且 $F=P[f]$，则

$$\lim_{r\to 1} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \quad \text{a. e.}$$

由于 $f$ 几乎处处等于它的不定积分的导数，所以从(4)得到上式.

**11.13** 到现在为止，我们只研究了单位圆盘 $U=D(0;\ 1)$的情况. 显然，通过一个简单的变量代换，以前的论述可以转移到任意圆盘上. 因此我们只扼要讲一些结果：

如果 $u$ 是圆盘 $D(a;R)$边界上的连续实函数，且在 $D(a;\ R)$内由Poisson 积分

$$(1) \qquad u(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2} u(a+Re^{it})dt$$

定义 $u$，则 $u$ 在 $\bar{D}(a;R)$上连续而在 $D(a;R)$内调和.

如果 $u$ 在开集 $\Omega$ 内调和(而且是实的)，又 $\bar{D}(a;\ R)\subset\Omega$，则在 $D(a;R)$内 $u$ 满足(1)，且存在一个定义在 $D(a;\ R)$内，其实部为 $u$ 的全纯函数 $f$，在纯虚的附加常数范围内，这个 $f$ 唯一地确定. 因为如果在同一区域内的两个全纯函数有相同的实部，则它们的差

必为常数(开映射定理或 Cauchy-Riemann 方程的推论).

我们把这些概括地说成每一个实调和函数局部地都是全纯函数的实部. 因此,每一个调和函数具有任意阶的连续偏导数.

Poisson 积分同样提供了关于调和函数序列的信息.

**11.14 Harnack 定理** 设$\{u_n\}$是区域$\Omega$内的调和函数序列.

(a) 如果$u_n \to u$在$\Omega$的紧子集上是一致的,则$u$在$\Omega$内调和.

(b) 如果$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \cdots$,则或者$\{u_n\}$在$\Omega$的紧子集上一致收敛,或者对每一个$z \in \Omega$, $u_n(z) \to \infty$.

**证明** 为了证明(a),假设$\bar{D}(a;R) \subset \Omega$,且在 Poisson 积分 11.13(1)中用$u_n$代替$u$. 由于$u_n \to u$在$\bar{D}(a;R)$的边界上是一致的,所以我们断定在$D(a;R)$内$u$满足 11.13(1).

在(b)的证明中,我们可以假定$u_1 \geqslant 0$(否则用$u_n - u_1$代替$u_1$). 设$u = \sup u_n$, $A = \{z \in \Omega : u(z) < \infty\}$,且$B = \Omega - A$. 选取$\bar{D}(a;R) \subset \Omega$. 对$0 \leqslant r < R$, Poisson 核满足不等式

$$\frac{R-r}{R+r} \leqslant \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2} \leqslant \frac{R+r}{R-r}$$

因此

$$\frac{R-r}{R+r}u_n(a) \leqslant u_n(a+re^{i\theta}) \leqslant \frac{R+r}{R-r}u_n(a)$$

用$u$代替$u_n$,不等式同样成立. 由此可见,对所有$z \in D(a;R)$, $u(z) = \infty$,或者对所有$z \in D(a;R)$, $u(z) < \infty$.

因此$A$和$B$都是开集;又由于$\Omega$是连通的,所以或者有$A = \varnothing$(这种情况下就没什么要证的),或者$A = \Omega$. 在后一情况下,单调收敛定理表明在$\Omega$的每一圆盘内, Poisson 公式对$u$成立. 因此$u$在$\Omega$内调和. 当连续函数序列单调收敛于一个连续函数时,在

紧集上收敛一定是一致的([26] 定理 7.13)。这便完成了定理的证明。

## 平均值性质

**11.15 定义** 如果对每一个 $z\in\Omega$，对应一个序列$\{r_n\}$，使得 $r_n>0$，当 $n\to\infty$ 时，$r_n\to 0$，且

(1) $$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z+r_n e^{it})dt \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

则称在开集 $\Omega$ 内的连续函数 $u$ 具有平均值性质。换句话说，$u(z)$ 等于 $u$ 在以 $z$ 为中心、半径为 $r_n$ 的圆周上的平均值。

注意，Poisson 公式表明，对每一个调和函数 $u$，且对每个 $r$，使得 $\bar{D}(z;r)\subset\Omega$，(1)是成立的。所以调和函数满足一个比刚才定义的还要强些的平均值性质。因此下述定理可能会使人感到意外。

**11.16 定理** 如果连续函数 $u$ 在开集$\Omega$内具有平均值性质，则 $u$ 在 $\Omega$ 内调和。

**证明** 为证此定理，只须对实的 $u$ 证明就够了。固定 $\bar{D}(a;R)\subset\Omega$。Poisson 积分给出一个在 $\bar{D}(a;R)$上连续、在 $D(a;R)$ 内调和、而在 $D(a;R)$的边界上与 $u$ 重合的函数 $h$。令 $v=u-h$，且令 $m=\sup\{v(z):z\in\bar{D}(a;R)\}$。假设 $m>0$，并且设$E$是使 $v(z)=m$ 的所有 $z\in\bar{D}(a;R)$的集。因为在 $D(a;R)$的边界上 $v=0$，所以$E$是 $D(a;R)$的一个紧子集。因此存在一个 $z_0\in E$，使得对所有 $z\in E$，

$$|z_0-a|\geqslant|z-a|$$

对于所有足够小的 $r$，以 $z_0$ 为中心，$r$为半径的圆至少有一半在 $E$ 的外部，所以对应的 $v$ 的平均值都小于 $m=v(z_0)$。但 $v$ 具有平均值性质，因而得出了矛盾。这样，$m=0$，故 $v\leqslant 0$。对 $-v$ 可应用相同的论证。因此有 $v=0$，或在 $D(a;R)$内 $u=h$；又由于 $\bar{D}(a;R)$是

$\Omega$ 内一个任意的闭圆盘. 所以 $u$ 在 $\Omega$ 内调和.

定理 11.16 导出了全纯函数的一个反射定理. 所谓上半平面 $\Pi^+$ 是指使 $y>0$ 的所有 $z=x+iy$ 的集;而下半平面 $\Pi^-$ 则是由虚部为负的所有 $z$ 组成.

**11.17 定理(Schwarz 反射原理)** 设 $L$ 是实轴上一条线段, $\Omega^+$ 是 $\Pi^+$ 的区域, 且每个 $t\in L$ 是一个开圆盘 $D_t$ 的中心, 使得 $\Pi^+\cap D_t$ 位于 $\Omega^+$ 内. 令 $\Omega^-$ 是 $\Omega^+$ 的反射:

(1) $$\Omega^-=\{z:\bar{z}\in\Omega^+\}$$

设 $f=u+iv$ 在 $\Omega^+$ 内全纯, 且对收敛于 $L$ 的某个点的 $\Omega^+$ 内的每一个序列 $\{z_n\}$, 有

(2) $$\lim_{n\to\infty} v(z_n)=0$$

则在 $\Omega^+\cup L\cup\Omega^-$ 内有一个全纯函数 $F$, 在 $\Omega^+$ 内使得 $F(z)=f(z)$; 这个 $F$ 满足关系

(3) $$F(\bar{z})=\overline{F(z)}\qquad (z\in\Omega^+\cup L\cup\Omega^-)$$

定理断定 $f$ 能扩展为关于实轴对称的一个区域内的全纯函数, 且(3)指出 $F$ 保持这个对称性. 注意, 连续性假设(2)只是对于 $f$ 的虚部提出的.

**证明** 设 $\Omega=\Omega^+\cup L\cup\Omega^-$, 当 $z\in L$ 时, 定义 $v(z)=0$; 当 $z\in\Omega^-$ 时, 定义 $v(z)=-v(\bar{z})$. 由此我们把 $v$ 扩展到 $\Omega$ 上. 这就立即得出, 在 $\Omega$ 内 $v$ 连续且具有平均值性质. 所以根据定理 11.16, $v$ 在 $\Omega$ 内调和.

因此 $v$ 在局部上是一个全纯函数的虚部. 这就意味着对每个圆盘 $D_t$ 对应一个 $f_t\in H(D_t)$, 使得 $\mathrm{Im}\, f_t=v$. 在附加一个实常数的范围内, 每个 $f_t$ 由 $v$ 所确定. 由于 $f-f_t$ 在区域 $D_t\cap\Pi^+$ 内是常数, 若这个常数选择得使之对某个 $z\in D_t\cap\Pi^+$ 有 $f_t(z)=f(z)$, 则对所有 $z\in D_t\cap\Pi^+$, 结论同样成立. 我们假定对函数 $f_t$ 是作过

这样修正的.

由于在 $L$ 上 $v=0$, 所以 $f_t$ 在 $t$ 处的所有各阶导数都是实数, 故 $f_t$ 按 $z-t$ 的幂级数展开式只有实系数. 由此可见

(4) $$f_t(\bar{z})=\overline{f_t(z)} \qquad (z\in D_t)$$

其次, 设 $D_s\cap D_t\neq\varnothing$, 则在 $D_t\cap D_s\cap\Pi^+$ 内 $f_t=f=f_s$; 又由于 $D_t\cap D_s$ 是连通的, 所以定理 10.18 表明

(5) $$f_t(z)=f_s(z) \qquad (z\in D_t\cap D_s)$$

因此定义

(6) $$F(z)=\begin{cases} f(z) & \text{当 } z\in\Omega^+ \\ f_t(z) & \text{当 } z\in D_t \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{当 } z\in\Omega^- \end{cases}$$

是相容的, 而尚待证明的是 $F$ 在 $\Omega^-$ 内全纯. 如果 $D(a;r)\subset\Omega^-$, 则 $D(\bar{a};r)\subset\Omega^+$, 所以对每个 $z\in D(a;r)$, 有

(7) $$f(\bar{z})=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\bar{z}-\bar{a})^n$$

因此

(8) $$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{c}_n(z-a)^n \qquad (z\in D(a;r))$$

这就完成了证明.

## 正调和函数

**11.18** 显然, 在单位圆周 $T$ 上的每一个正有限 Borel 测度 $\mu$ 的 Poisson 积分 $P[d\mu]$ 是开圆盘 $U$ 内的正调和函数. 问题是, 每个 $U$ 内的正调和函数是否都能按这种方式得到?

如下的观察将导致一个肯定的回答. 如果 $h=P[d\mu]$, 此处 $\mu$ 是 $T$ 上任意一个复 Borel 测度, 则 Fubini 定理表明

(1)
$$\int_{-\pi}^{\pi}|h(re^{i\theta})|d\theta$$
$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\theta\right]d|\mu|(t)$$
$$=\|\mu\|$$

此处$\|\mu\|$是$\mu$在$T$上的全变差.因此,式(1)的第一个积分在[0,1)上是$r$的有界函数,这是所有Poisson积分必须满足的条件.

现在,如果$h$是正调和函数,则$|h|=h$,所以对于每一个$r\in[0,1)$,式(1)的第一个积分等于$2\pi h(0)$.因此,正调和函数满足我们刚才找出的必要条件,并且导出如下更强的定理.

**11.19 定理** 映射$\mu\to P[d\mu]$是$T$上所有复Borel测度的空间和所有满足增长条件

(1)
$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|h(re^{i\theta})|d\theta<\infty$$

的$U$内调和函数$h$的空间之间的一个线性一一对应.

$T$上所有正有限Borel测度集因此与$U$内所有正调和函数集构成一一对应.

**系** 每一个满足(1)的$U$内调和函数$h$关于Lebesgue测度在$T$的几乎所有各点都有径向极限.

**证明** 显然,映射$\mu\to P[d\mu]$是线性的.第11.18节的讨论证实,对于每一个$P[d\mu]$,(1)是成立的.

为了证明$\mu\to P[d\mu]$是一一的,设在$U$内$P[d\mu]=0$,我们必须证明$\mu=0$.选取$f\in C(T)$,定理11.9表明

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\mu(\theta)=\lim_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}d\mu(\theta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)P_r(\theta-t)dt$$
$$=\lim_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\mu(\theta)$$
$$=\lim_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)P[d\mu](re^{it})dt=0$$

因此对每个 $f\in C(T)$, $\int f d\mu=0$. 由定理 6.19 的唯一性结论可推出 $\mu=0$.

我们着手证明定理的最重要部分: 每一个满足(1)的 $U$ 内调和函数都是 $T$ 上某个复 Borel 测度 $\mu$ 的 $P[d\mu]$. 这一证明依赖于"弱收敛"的概念. 在习题 18 中, 它将在更一般的情况下作出定义.

令 $h$ 为 $U$ 内的调和函数, 满足

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\theta})| d\theta \leqslant M < \infty \qquad (0 \leqslant r < 1) \tag{2}$$

对于 $0<s<1$, 定义

$$\Lambda_s f = \int_{-\pi}^{\pi} h(se^{it}) f(t) dt \qquad (f\in C(T)) \tag{3}$$

每个 $\Lambda_s$ 因此是 $C(T)$ 上的一个线性泛函, 其范数 $\|\Lambda_s\| \leqslant M$. 设 $\{f_j\}$ 是 $C(T)$ 的一个可数稠密子集(例如, 取系数在复平面的某个可数稠密子集内的所有三角多项式). 对每个 $j$, 数 $\Lambda_s f_j$ 组成一个有界集. 因此, 对角线过程(参看[26]p. 145)确保存在一个序列 $\{s_n\}$, 使 $s_n \to 1$, 且对每个 $f_j$,

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_{s_n} f_j \tag{4}$$

存在.

对每个 $f\in C(T)$, 我们断言 $\{\Lambda_{s_n} f\}$ 是 Cauchy 序列: 固定 $f\in C(T)$, $\varepsilon>0$, 选取 $f_j$ 使 $\|f-f_j\|_\infty<\varepsilon/M$, 然后选取这样大的 $N$, 使 $n>N$、$m>N$ 时,

$$|\Lambda_{s_n} f_j - \Lambda_{s_m} f_j| < \varepsilon \tag{5}$$

因为

$$|\Lambda_{s_n} f - \Lambda_{s_m} f| \leqslant |\Lambda_{s_n}(f-f_j)| + |\Lambda_{s_n} f_j - \Lambda_{s_m} f_j| + |\Lambda_{s_m}(f_j - f)|$$

若 $n>N$ 和 $m>N$, 则 $|\Lambda_{s_n} f - \Lambda_{s_m} f| < 3\varepsilon$. 因此对每个 $f\in C(T)$,

$$\Lambda f = \lim_{n\to\infty} \Lambda_{s_n} f \tag{6}$$

存在，且(6)定义了$T$上一个线性泛函，其范数$\|\Lambda\| \leqslant M$。Riesz 表示定理 6.19 现在引出$T$上一个复 Borel 测度$\mu$，使得关系式

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)h(s_n e^{it})\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,d\mu(t) \tag{7}$$

对每个$f\in C(T)$成立；这可以从(3)和(6)得到。

对每个$n$，$h(s_n re^{i\theta})$在包含$\bar{U}$的圆盘$D(0;1/s_n)$内调和。因此在$U$内这个函数是它限制于$T$上的 Poisson 积分。换言之，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)h(s_n e^{it})\,dt = h(s_n re^{i\theta}) \qquad (0\leqslant r<1) \tag{8}$$

如果在(8)中令$n\to\infty$并应用(7)，则得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,d\mu(t) = h(re^{i\theta}) \qquad (0\leqslant r<1,\ -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi) \tag{9}$$

这便是所期望的$h$的表示式：$h=P[d\mu]$。

根据原先确立的唯一性，如果$h$是实的，则$\mu$也是实的；如果$h>0$，则每个$\Lambda_s$是$T$上一个正线性泛函，因之$\Lambda$亦复如此。而$\mu$的正性可由 Riesz 表示定理 2.14 得到。

这便完成了定理的证明，而系则是定理 11.12 的一个推论。

这个定理当然有许多应用。我们现在提出的一个应用表明对于$U$内的有界全纯函数存在一个 Cauchy 公式，其积分路径被移动到$T$上。其它的应用见第十七章。

**11.20 定义** 令$H^\infty$为$U$内所有有界全纯函数的空间，由

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in U}|f(z)|$$

赋范。如同前面一样，$L^\infty(T)$是$T$上所有本性有界函数(等价类)的空间，由本性上确界范数（相对于 Lebesgue 测度）赋范。当

$g\in L^\infty(T)$时，用$\|g\|_\infty$表示$|g|$的本性上确界.

**11.21 定理** 对于每一个$f\in H^\infty$，对应于一个几乎处处由

(1) $$f^*(e^{it})=\lim_{r\to 1}f(re^{it})$$

定义的函数$f^*\in L^\infty(T)$. 则等式$\|f\|_\infty=\|f^*\|_\infty$成立. 对每个$z\in U$，Cauchy 公式

(2) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^*(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

成立，其中$\gamma$是正向单位圆周:

$$\gamma(t)=e^{it},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

照这种方式得到的函数$f^*\in L^\infty(T)$正好是满足关系式

(3) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it})e^{-int}dt=0$$

$$(n=-1,-2,-3,\cdots)$$

的那些函数.

每个$f\in H^\infty$在$T$的几乎所有各点都有径向极限这一点，曾由 Fatou 在把 Lebesgue 积分用于全纯函数研究的一个最早期的应用中证明.

**证明** $f^*$几乎处处存在可从定理 11.19 的系得到，而由(1)显然有$\|f^*\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$.

如果$z\in U$，且$|z|<r<1$，设$\gamma_r(t)=re^{it}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则

(4) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

$$=\frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}e^{it}dt$$

令$\{r_n\}$为一个序列，$r_n\to 1$，并应用 Lebesgue 控制收敛定理到(4)中最后一个积分上，结果得

(5) $$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f^*(e^{it})}{1-ze^{-it}}dt$$

这与(2)相同. Cauchy 定理给出

$$\int_{\gamma_r} f(\xi)\xi^n d\xi=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{6}$$

与上面类似,通过取极限证实 $f^*$ 满足(3). 因此我们可以把(5)写成 Poisson 积分: 如果 $z=re^{i\theta}$, 则

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)}dt \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)}dt \qquad (7)\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f^*(e^{it})dt \end{aligned}$$

据此,我们断定 $\|f\|_\infty\leqslant\|f^*\|_\infty$, 所以这两个范数相等.

最后,如果 $f^*\in L^\infty(T)$ 使得(3)成立,且对所有 $z\in U$, 由(5)定义 $f$, 则(5)表明 $f\in H(U)$, (3)蕴涵着 Cauchy 积分 (5)等于 Poisson 积分(7). 因而 $f$ 是有界的,并且根据定理 11.12 的系, $f$ 的表示式作为 $f^*$ 的 Poisson 积分指明了(1)几乎处处成立.

根据上述 Cauchy 公式容易得到一个唯一性定理.

**11.22 定理** 设 $f\in H^\infty$, $J$ 是 $T$ 的子弧, 且在 $J$ 上几乎处处有 $f^*(e^{it})=0$, 则对所有 $z\in U$, $f(z)=0$.

(在稍后的定理 15.19 中,将得到一个相当强的论断. 也可参看定理 17.18 和 17.19 节).

**证明** 令 $n$ 为正整数,使 $J$ 的长度大于 $2\pi/n$, 令 $\eta=\exp\{2\pi i/n\}$, 且设

$$g(z)=\prod_{k=1}^{n} f(\eta^k z) \qquad (z\in U) \tag{1}$$

由于 $f$ 有界,且在 $J$ 上几乎处处有 $f^*=0$, 所以看出在 $T$ 上几乎处处有 $g^*=0$, 且 $g\in H^\infty$. 由于 $g$ 是 $g^*$ 的 Cauchy 积分, 故对所有

$z\in U$, $g(z)=0$. 如果$U$内$f$的零点集$Z(f)$至多是可数的，则由于$Z(g)$是由$Z(f)$经旋转得到的$n$个集的并，所以$Z(g)$也至多是可数的. 但$Z(g)=U$. 因此根据定理10.18，$f=0$.

## 习　题

1 设$u$和$v$是平面区域$\Omega$内的实调和函数. 在什么条件下$uv$是调和的？(注意答案强烈地依赖于本问题是就实函数提出的这一事实.) 证明$u^2$在$\Omega$内不是调和的，除非$u$为常数. 对哪些$f\in H(\Omega)$，$|f|^2$是调和的？

2 设$f$是区域$\Omega$内的复函数，且$f$和$f^2$均在$\Omega$内调和. 证明：或者$f$或者$\bar{f}$在$\Omega$内是全纯的.

3 如果$u$是区域$\Omega$内的调和函数. 对于使$u$的梯度为零的点集你能说些什么？(这个集就是使$u_x=u_y=0$的点集).

4 证明调和函数的每个偏导数是调和的.

通过直接计算验证对每个固定的$t$，$P_r(\theta-t)$是$re^{i\theta}$的一个调和函数. 通过证明$P[d\mu]$的每个偏导数等于对应的核的偏导数的积分，推证(不涉及全纯函数)$T$上每个有限Borel测度$\mu$的Poisson积分$P[d\mu]$在$U$内调和.

5 设$f\in H(\Omega)$，且$f$在$\Omega$内没有零点. 通过计算$\log|f|$的Laplace算子值证明$\log|f|$在$\Omega$内调和. 有没有较容易的方法？

6 设$f\in H(U)$，此处$U$是开单位圆盘，$f$在$U$内是一一的，$\Omega=f(U)$，且$f(z)=\sum c_n z^n$. 证明$\Omega$的面积是

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2$$

提示：$f$的Jacobi行列式是$|f'|^2$.

7 (a) 如果$f\in H(\Omega)$，对$z\in\Omega$. $f(z)\neq 0$，且$-\infty<\alpha<\infty$. 通过证明公式

$$\partial\bar{\partial}(\psi\circ(f\bar{f}))=(\varphi\circ|f|^2)\cdot|f'|^2$$

其中$\psi$在$(0,\infty)$上是二次可微的，且

$$\varphi(t)=t\psi''(t)+\psi'(t)$$

来证明

$$\Delta(|f|^\alpha)=\alpha^2|f|^{\alpha-2}|f'|^2$$

(b) 设$f\in H(\Omega)$，而$\Phi$是定义域为$f(\Omega)$的复函数，它有连续二阶偏导

数. 证明

$$\Delta[\Phi\circ f]=[(\Delta\Phi\circ f]\cdot|f'|^2$$

证明在 $\Phi(w)=\varphi(|w|)$ 的特殊情况下, 上式就是(a)的结果.

8　利用引理 11.11 的证明方法可以引出一个一般的定理, 它使得对形如 $\int_I f d\mu$ 的积分应用分部积分法成为合法的, 此处 $\mu$ 是实直线的线段 $I$ 上的一个 Borel 测度. 叙述并证明这样的一个定理.

9　设 $u$ 是区域 $\Omega$ 内的一个 Lebesgue 可测函数, 且 $u$ 局部地属于 $L^1$. 这意味着 $|u|$ 在 $\Omega$ 的任何紧子集上的积分是有限的. 如果 $u$ 满足如下形式的平均值性质: 当 $\overline{D}(a;r)\subset\Omega$ 时,

$$u(a)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D(a;r)}u(x,y)\,dx\,dy$$

证明 $u$ 是调和的.

10　设 $I=[a,b]$ 是实轴上的一个区间, $\varphi$ 是 $I$ 上的连续函数, 且

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\varphi(t)}{t-z}dt\qquad(z\notin I)$$

证明对每个实数 $x$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[f(x+i\varepsilon)-f(x-i\varepsilon)]\qquad(\varepsilon>0)$$

存在, 并用 $\varphi$ 求出它.

如果我们只假定 $\varphi\in L^1$, 则对结果有怎样的影响? 在 $\varphi$ 具有左极限和右极限的点 $x$ 处会怎么样?

11　设 $I=[a,b]$, $\Omega$ 是一个区域, $I\subset\Omega$, $f$ 在 $\Omega$ 内连续, 且 $f\in H(\Omega-I)$. 证明实际上 $f\in H(\Omega)$.

用另一些集代替 $I$, 使之可以推断同样的结论.

12　设 $\Omega$ 是区域, $K$ 是 $\Omega$ 的紧子集, $z_0\in\Omega$. 证明存在正数 $\alpha$ 和 $\beta$ (依赖 $z_0$, $K$ 和 $\Omega$), 使得对 $\Omega$ 内每个正调和函数及对所有 $z\in K$,

$$\alpha u(z_0)\leqslant u(z)\leqslant\beta u(z_0)$$

如果 $\{u_n\}$ 是 $\Omega$ 内一个正调和函数序列, 且 $u_n(z_0)\to 0$, 描述 $\{u_n\}$ 在 $\Omega$ 的剩余部分的状况. 对 $u_n(z_0)\to\infty$ 作同样的叙述. 说明 $\{u_n\}$ 的正性这一假定对这些结果是本质的.

13　设 $u$ 是 $U$ 内的正调和函数且 $u(0)=1$. $u\left(\frac{1}{2}\right)$ 可以有多大? 可以有多小? 试给出最好的可能的界限.

14　设 $\mu$ 是 $T$ 上不恒为零的正 Borel 测度，且 $\mu$ 是奇异的(相对于 Lebesgue 测度)．如果 $u=P[d\mu]$，证明至少有一个 $\theta$，当 $r\to 1$ 时 $u(re^{i\theta})\to\infty$．提示：定理 8.10．

15　设 $u$ 是 $U$ 内的正调和函数，且对每个 $e^{i\theta}\neq 1$，当 $r\to 1$ 时 $u(re^{i\theta})\to 0$．证明存在常数 $c$，使得

$$u(re^{i\theta})=cP_r(\theta)$$

16　这里是 $U$ 内不恒为零但其所有的径向极限为零的调和函数的例子：

$$u(z)=\mathrm{Im}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right]$$

证明 $u$ 不是 $T$ 上任何测度的 Poisson 积分，并且不是 $U$ 内两个正调和函数的差．

17　令 $\Phi$ 为 $U$ 内使 $u(0)=1$ 的所有正调和函数的集．证明 $\Phi$ 是凸集并找出 $\Phi$ 的极值点．(称凸集 $\Phi$ 内的点 $x$ 为 $\Phi$ 的一个极值点，如果对于在 $\Phi$ 内的任何线段，其两个端点都与 $x$ 不同时，$x$ 就不会落在这个线段上．)提示：如果 $C$ 是凸集，该集的元素是 $T$ 上全变差为1的正 Borel 测度，证明 $C$ 的极值点恰好是那些 $\mu\in C$，使得 $\mu$ 的支集仅由 $T$ 的一个点组成．

18　令 $X^*$ 为 Banach 空间 $X$ 的对偶空间．如果对每个 $x\in X$，当 $n\to\infty$ 时，$\Lambda_n x\to\Lambda x$，则称 $X^*$ 内的序列 $\{\Lambda_n\}$ 弱收敛于 $\Lambda\in X^*$．注意，当按 $X^*$ 范数 $\Lambda_n\to\Lambda$ 时，则一定在弱收敛意义下 $\Lambda_n\to\Lambda$．(参看第五章习题 8．)逆命题不一定正确．例如，在 $L^2(T)$ 上，泛函 $f\to\hat{f}(n)$ 弱趋于 0 (根据 Bessel 不等式)，但这些泛函的每一个都具有范数 1．

(*a*)　如果 $\{\Lambda_n\}$ 弱收敛，证明 $\{\|\Lambda_n\|\}$ 必定有界．

(*b*)　设 $X$ 是一个可分的 Banach 空间，且 $\{\Lambda_n\}$ 是 $X^*$ 内的一个序列，使得 $\{\|\Lambda_n\|\}$ 有界．证明 $\{\Lambda_n\}$ 包含一个弱收敛子序列．(其证明与定理 11.19 的特款极为相似．)

19　如果 $h=P[d\mu]$，且 $f\in C(T)$，证明

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)h(re^{it})dt=\int_{-\pi}^{\pi}fd\mu$$

(把这个结果与定理 11.19 的证明相比较．)

20　设 $f\in L^p(T)$，$1\leqslant p<\infty$，且 $F=P[f]$．证明

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\theta})-f(e^{i\theta})|^p d\theta=0$$

(与定理 9.5 和 9.10 作比较．第三章习题 17 在这里也可以应用．)

21　如果 $1\leqslant p<\infty$ 和 $f\in L^p(R^1)$，证明 $(f*h_\lambda)(x)$ 是上半平面内 $x+i\lambda$ 的一个调和函数.（$h_\lambda$ 在 9.7 节中定义；它是半平面内的 Poisson 核.）

22　设 $\Omega$ 是一个区域，对 $n=1,2,3,\cdots$，$f_n\in H(\Omega)$，$u_n$ 是 $f_n$ 的实部，$\{u_n\}$ 在 $\Omega$ 的紧子集上一致收敛，且对至少一个点 $z\in\Omega$，$\{f_n(z)\}$ 收敛. 证明 $\{f_n\}$ 在 $\Omega$ 的紧子集上一致收敛.

# 第十二章　最大模原理

## 引言

**12.1**　最大模定理 (10.24) 断定常数是其绝对值在域$\Omega$的任意点具有局部极大值的唯一的全纯函数.

我们复述如下：如果$K$是有界域$\Omega$的闭包，若$f$在$K$上连续而在$\Omega$内全纯，则对每一$z\in\Omega$

(1)
$$|f(z)|\leqslant\|f\|_{\partial\Omega}$$

如果在一点$z\in\Omega$等式成立，则$f$是常数.

[(1)的右边是$|f|$在$\Omega$的边界$\partial\Omega$上的上确界.]

因为如果在某点$z\in\Omega$，$|f(z)|\geqslant\|f\|_{\partial\Omega}$，则$|f|$在$K$上的最大值实际上在$\Omega$的某点达到.（由于$K$是紧的，此最大值在$K$的某点达到.）根据定理 10.24，所以$f$是常数.

等式$\|f\|_\infty=\|f^*\|_\infty$是定理 11.21 的一部分，它蕴涵

(2)
$$|f(z)|\leqslant\|f^*\|_\infty\qquad (z\in U, f\in H^\infty(U))$$

类似于(1)的陈述，这就是说(大略地说)，$|f(z)|$不大于$f$的边界值的上确界. 但这时不需要$f$在$\bar{U}$上连续，而只要在$U$上有界就够了.

本章包括最大模定理的进一步的推广及一些相当显著的应用，并用一个定理作为结束，它指出最大值性质“几乎”完全刻划了全纯函数类.

## Schwarz 引理

这是通常给如下定理的一个称呼. 我们仍然使用定义 11.20

中规定的记号.

**12.2 定理** 设$f\in H^\infty$, $\|f\|_\infty\leqslant 1$, 且$f(0)=0$,则

(1) $$|f(z)|\leqslant|z| \quad (z\in U)$$

(2) $$|f'(0)|\leqslant 1$$

如果对一个$z\in U-\{0\}$, (1)的等号成立,或者(2)的等号成立, 则$f(z)=\lambda z$,此处$\lambda$是常数,$|\lambda|=1$.

用几何语言来说, 这一假设就是说$f$是保持原点不动的$U$到$U$内的一个全纯映射. 结论部分则是说或者$f$是一个旋转,或者$f$将每一个$z\in U-\{0\}$变到比原来更靠近原点的地方.

**证明** 由于$f(0)=0$,所以$f(z)/z$在$z=0$有一个可去奇点. 因此存在一个$g\in H(U)$,使得$f(z)=zg(z)$. 由于$1/|z|$在接近$U$的边界时是有界的, 所以$g\in H^\infty$. 其径向极限满足关系式$|g^*|=|f^*|$. 因此$\|g^*\|_\infty\leqslant 1$. 根据定理 11.21, $\|g\|_\infty\leqslant 1$,这时, 最大模定理表明: 当且仅当$g$是常数时, 对某个$z\in U$, $|g(z)|=1$. 既然$f'(0)=g(0)$,这就完成了证明.

注: 我们没有真正使用径向极限在$T$上几乎处处存在; 我们能够在圆盘$D(0;\ 1-\varepsilon)$上对$g$应用定理 10.24 并令$\varepsilon\to 0$而得到最后结果.

藉助如下把$U$映到$U$上的映射,可以得到 Schwarz 引理的许多变形.

**12.3 定义** 对任意$\alpha\in U$, 定义

$$\varphi_\alpha(z)=\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

**12.4 定理** 固定$\alpha\in U$. 则$\varphi_\alpha$是将$T$映到$T$上, $U$映到$U$上和将$\alpha$映为0的一个一一映射. $\varphi_\alpha$的逆映射为$\varphi_{-\alpha}$. 我们有

(1) $$\varphi'_\alpha(0)=1-|\alpha|^2,$$

$$\varphi'_\alpha(\alpha)=\frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

**证明** 除去位于 $\bar{U}$ 外面的一个极点 $1/\bar{\alpha}$ 外，$\varphi_\alpha$ 在整个平面内全纯．用直接的代换证得

(2) $$\varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z))=z$$

因此，$\varphi_\alpha$ 是一、一的，而且 $\varphi_{-\alpha}$ 是它的逆映射．由于对实数 $t$，

(3) $$\left|\frac{e^{it}-\alpha}{1-\bar{\alpha}e^{it}}\right|=\left|\frac{e^{it}-\alpha}{e^{-it}-\bar{\alpha}}\right|=1$$

（$z$ 和 $\bar{z}$ 有相同的绝对值），所以 $\varphi_\alpha$ 把 $T$ 映射到 $T$ 内；对 $\varphi_{-\alpha}$ 有相同的结论；因而 $\varphi_\alpha(T)=T$．根据最大模定理得到 $\varphi_\alpha(U)\subset U$，且考虑到 $\varphi_{-\alpha}$，证得实际上有 $\varphi_\alpha(U)=U$．

**12.5 一个极值问题** 设 $\alpha$ 和 $\beta$ 是复数，$|\alpha|<1$ 和 $|\beta|<1$．如果 $f$ 满足条件：$f\in H^\infty$、$\|f\|_\infty\leqslant 1$ 和 $f(\alpha)=\beta$，问 $|f'(\alpha)|$ 能取到多大？

为解决这个问题，设

(1) $$g=\varphi_\beta\circ f\circ\varphi_{-\alpha}$$

由于 $\varphi_{-\alpha}$ 和 $\varphi_\beta$ 把 $U$ 映到 $U$ 上，我们看出 $g\in H^\infty$ 和 $\|g\|_\infty\leqslant 1$；同样 $g(0)=0$．从 $f$ 过渡到 $g$ 就把我们的问题归结到 Schwarz 引理，并给出 $|g'(0)|\leqslant 1$．对(1)，链式法则给出

(2) $$g'(0)=\varphi'_\beta(\beta)f'(\alpha)\varphi'_{-\alpha}(0)$$

如果我们使用 12.4(1)的等式，便得到不等式

(3) $$|f'(\alpha)|\leqslant\frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$$

由于在(3)中等号可以成立，这就解决了我们的问题．而这当且仅当 $|g'(0)|=1$ 时就会发生．此时 $g$ 是一个旋转(定理 12.2)，所以对某个常数 $\lambda$，$|\lambda|=1$，有

(4) $$f(z)=\varphi_{-\beta}(\lambda\varphi_\alpha(z))\qquad(z\in U)$$

应当强调解的一个值得注意的特性．我们对 $f$ 靠近 $U$ 的边界

时的性态没有提出一些光滑性条件(如在 $\bar{U}$ 上连续). 然而, 在所述的限制之下使 $|f'(\alpha)|$ 取得最大值的函数实际上是有理函数. 也应注意这些极值函数是映 $U$ 到 $U$ 上的(不只是到 $U$ 内), 并且映射是一一的. 这一考察可以为第十四章中 Riemann 映射定理的证明提供一个启示.

现在, 我们只打算指出这一极值问题如何用来刻划把 $U$ 映到 $U$ 上的一一全纯映射.

**12.6 定理** 设 $f\in H(U)$, $f$ 是一一的, $f(U)=U$, $\alpha\in U$, 且 $f(\alpha)=0$, 则有一个常数 $\lambda$, $|\lambda|=1$, 使得

(1) $$f(z)=\lambda\varphi_\alpha(z) \qquad (z\in U)$$

换言之, 我们通过把映射 $\varphi_\alpha$ 和一个旋转复合起来以得到 $f$.

**证明** 设 $g$ 为 $f$ 的逆映射, 由 $g(f(z))=z$ $(z\in U)$ 确定. 由于 $f$ 是一一的, $f'$ 在 $U$ 内没有零点. 根据定理 10.33, 所以 $g\in H(U)$. 由链式法则, 有

(2) $$g'(0)f'(\alpha)=1$$

把 12.5 的解应用于 $f$ 和 $g$, 引出不等式

(3) $$|f'(\alpha)|\leqslant\frac{1}{1-|\alpha|^2}, \qquad |g'(0)|\leqslant 1-|\alpha|^2$$

根据(2), 式(3)中的等式必定成立. 如同我们在前述问题(此处 $\beta=0$)中观察到那样, 这就保证了 $f$ 满足(1).

## Phragmen-Lindelöf 方法

**12.7** 对于有界区域 $\Omega$ 我们在 12.1 节中看到, 如果 $f$ 在 $\Omega$ 的闭包上连续且 $f\in H(\Omega)$, 则最大模定理推出

(1) $$\|f\|_\Omega=\|f\|_{\partial\Omega}$$

对于无界域它就不再真确了.

请看一个例子, 设

(2) $$\Omega=\left\{z=x+iy:\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right\}$$

$\Omega$是以平行线 $y=\pm\pi/2$ 为界的开带域，它的边界 $\partial\Omega$ 是这两条直线的并. 设

(3) $$f(z)=\exp(\exp(z))$$

对实数 $x$,

(4) $$f\left(x\pm\frac{\pi i}{2}\right)=\exp(\pm ie^{x})$$

由于 $\exp(\pi i/2)=i$, 所以对 $z\in\partial\Omega$, $|f(z)|=1$. 但当 $x$ 沿位于$\Omega$内的正实轴趋于 $\infty$, 即 $x\to\infty$ 时, $f(z)$非常迅速地趋于 $\infty$.

在上句中"非常"是个关键性的词. 由 Phragmen 和 Lindelöf 发现的一种方法使之有可能证明如下类型的定理：如果 $f\in H(\Omega)$ 且 $|f|<g$, 此处, 在$\Omega$内当 $z\to\infty$ 时, $g(z)$"慢慢"地趋于$\infty$. ("慢"的含义是与$\Omega$有关的), 则 $f$ 实际上在$\Omega$内有界，并且根据最大模定理，常常包含关于 $f$ 的进一步结论.

我们不打算用一个包罗万象的定理来描述这个方法，而仅仅通过两种情况来指出它是怎样做的. 这两种情况中，$\Omega$都是一个带域. 第一种情况下, $f$ 假定是有界的，而定理将改进这个界限. 第二种情况下, 对 $f$ 提出一个增长条件以便排除(3)中的函数. 鉴于以后的应用, 定理 12.8 中的$\Omega$将是垂直的带形.

但是, 首先让我们提出另一个同样是很有意思的例子：设 $f$ 是一个整函数，且对所有 $z$

(5) $$|f(z)|<1+|z|^{1/2}$$

则 $f$ 是常数.

由于 Cauchy 估值 10.26 表明, 对 $n=1,2,3,\cdots$, $f^{(n)}(0)=0$, 从而立即得到上面的结果.

**12.8 定理** 设

(1)
$$\Omega=\{x+iy: a<x<b\},$$
$$\overline{\Omega}=\{x+iy: a\leqslant x\leqslant b\}$$

$f$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续，$f\in H(\Omega)$，又设对所有 $z\in\Omega$ 和某个固定的 $B<\infty$，$|f(z)|<B$. 如果

(2)
$$M(x)=\sup\{|f(x+iy)|: -\infty<y<\infty\}$$
$$(a\leqslant x\leqslant b)$$

则实际上有

(3)
$$M(x)^{b-a}\leqslant M(a)^{b-x}M(b)^{x-a} \qquad (a<x<b)$$

注：结论(3)蕴涵着不等式 $|f|<B$ 可以用 $|f|<\max(M(a), M(b))$ 代替，所以 $|f|$ 在 $\Omega$ 内不大于 $|f|$ 在 $\Omega$ 的边界上的上确界.

如果把定理应用到以直线 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$ 为界的带域上，此处 $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$，则结论可按以下方式来叙述：

**系** 在定理的假设下，$\log M$ 是 $(a,b)$ 上的一个凸函数.

**证明** 我们首先假定 $M(a)=M(b)=1$. 在这种情况下，我们需要证明对所有 $z\in\Omega$，$|f(z)|\leqslant 1$.

对每个 $\varepsilon>0$，我们定义一个辅助函数

(4)
$$h_\varepsilon(z)=\frac{1}{1+\varepsilon(z-a)} \qquad (z\in\overline{\Omega})$$

由于在 $\overline{\Omega}$ 内 $\mathrm{Re}\{1+\varepsilon(z-a)\}=1+\varepsilon(x-a)\geqslant 1$，故在 $\overline{\Omega}$ 内 $|h_\varepsilon|\leqslant 1$，所以

(5)
$$|f(z)h_\varepsilon(z)|\leqslant 1 \qquad (z\in\partial\Omega)$$

同样，$|1+\varepsilon(z-a)|\geqslant\varepsilon|y|$，因此

(6)
$$|f(z)h_\varepsilon(z)|\leqslant\frac{B}{\varepsilon|y|} \qquad (z=x+iy\in\overline{\Omega})$$

设 $R$ 是用直线 $y=\pm B/\varepsilon$ 从 $\overline{\Omega}$ 割出的矩形. 由(5)和(6)，在

$\partial R$ 上 $|fh_\varepsilon|\leqslant 1$，因此根据最大模定理，在 $R$ 上 $|fh_\varepsilon|\leqslant 1$. 但(6)表明在 $\overline{\Omega}$ 的剩余部分上 $|fh_\varepsilon|\leqslant 1$. 因此，对所有 $z\in\Omega$ 和所有 $\varepsilon>0$，$|f(z)h_\varepsilon(z)|\leqslant 1$. 如果我们固定 $z\in\Omega$，然后令 $\varepsilon\to 0$，则得到期望的结果 $|f(z)|\leqslant 1$.

现在我们转向一般情况，设

(7) $$g(z)=M(a)^{(b-z)/(b-a)}M(b)^{(z-a)/(b-a)}$$

此处，对 $M>0$ 及复数 $w$，$M^w$ 由

(8) $$M^w=\exp(w\log M)$$

定义，且 $\log M$ 是实数. 则在 $\overline{\Omega}$ 内 $g$ 是整函数，$g$ 没有零点，$1/g$ 有界，

(9) $$|g(a+iy)|=M(a)\qquad |g(b+iy)|=M(b)$$

从而 $f/g$ 满足我们原先的假定. 因此在 $\Omega$ 内 $|f/g|\leqslant 1$，而这便给出(3). (参看习题 7.)

**12.9 定理** 设

(1) $$\Omega=\left\{x+iy:|y|<\frac{\pi}{2}\right\},$$

$$\overline{\Omega}=\left\{x+iy:|y|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$

设 $f$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续，$f\in H(\Omega)$，则存在常数 $\alpha<1$，$A<\infty$，使得

(2) $$|f(z)|<\exp\{A\exp(\alpha|x|)\}\qquad (z=x+iy\in\Omega)$$

且

(3) $$\left|f\left(x\pm\frac{\pi i}{2}\right)\right|\leqslant 1\qquad(-\infty<x<\infty)$$

则对所有 $z\in\Omega$，$|f(z)|\leqslant 1$.

注意，如同由函数 $\exp(\exp z)$ 所指出的那样，当 $\alpha=1$ 时，是无法得到这个结论的.

**证明** 选取 $\beta>0$, 使 $\alpha<\beta<1$. 对 $\varepsilon>0$, 定义

$$(4) \qquad h_\varepsilon(z)=\exp\{-\varepsilon(e^{\beta z}+e^{-\beta z})\}$$

对$z\in\overline{\Omega}$

$$(5) \qquad \mathrm{Re}[e^{\beta z}+e^{-\beta z}]=(e^{\beta x}+e^{-\beta x})\cos\beta y \geqslant\delta(e^{\beta x}+e^{-\beta x})$$

此处因$|\beta|<1$, 故 $\delta=\cos(\beta\pi/2)>0$. 因此

$$(6) \qquad |h_\varepsilon(z)|\leqslant\exp\{-\varepsilon\delta(e^{\beta x}+e^{-\beta x})\}<1 \qquad (z\in\overline{\Omega})$$

可见在 $\partial\Omega$ 上$|fh_\varepsilon|\leqslant1$, 同时

$$(7) \qquad |f(z)h_\varepsilon(z)|\leqslant\exp\{Ae^{\alpha|x|}-\varepsilon\delta(e^{\beta x}+e^{-\beta x})\} \qquad (z\in\overline{\Omega})$$

固定 $\varepsilon>0$. 由于 $\varepsilon\delta>0$ 和 $\beta>\alpha$, 所以当 $x\to\pm\infty$ 时, (7)中的指数趋于 $-\infty$. 因而存在一个 $x_0$, 使得对所有 $x>x_0$(7)的右边小于1. 由于在顶点为$\pm x_0\pm(\pi i/2)$的矩形的边界上$|fh_\varepsilon|\leqslant1$, 故最大模定理表明, 实际上在这个矩形上, $|fh_\varepsilon|\leqslant1$. 因此, 对每个 $\varepsilon>0$ 在$\Omega$的每一点, $|fh_\varepsilon|\leqslant1$. 当$\varepsilon\to0$时, 对每一个 $z$, $h_\varepsilon(z)\to1$, 所以我们断定对所有的 $z\in\Omega$, $|f(z)|\leqslant1$.

## 一个插值定理

**12.10** 凸性定理 12.8 有时能用于证明某些线性变换关于某些$L^p$-范数是有界的. 我们只考虑此种类型的一个特殊情况, 而不作完整的一般性的讨论.

设$X$是具有正测度$\mu$的测度空间, 又设$\{\psi_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$是 $L^2(\mu)$内的一个规范正交函数集, 我们记住这里所指的意思是:

$$(1) \qquad \int_X \psi_n\bar{\psi}_m d\mu=\begin{cases}1 & 当\ m=n\\ 0 & 当\ m\neq n\end{cases}$$

我们同样假定$\{\psi_n\}$是 $L^\infty(\mu)$内的有界序列: 存在一个 $M<\infty$ 使得

(2) $$|\psi_n(x)|\leqslant M \qquad (n=1,2,3,\cdots;x\in X)$$

则对任意 $f\in L^p(\mu)$，此处 $1\leqslant p\leqslant 2$，积分

(3) $$\hat{f}(n)=\int_X f\bar{\psi}_n d\mu \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

存在并且在所有正整数集上定义了一个函数 $\hat{f}$.

现在有两个很容易的定理：对 $f\in L^1(\mu)$，(2)给出

(4) $$\|\hat{f}\|_\infty\leqslant M\|f\|_1$$

而对 $f\in L^2(\mu)$，则 Bessel 不等式给出

(5) $$\|\hat{f}\|_2\leqslant\|f\|_2$$

此处范数按通常的方式定义：

(6) $$\|f\|_p=\left[\int|f|^p d\mu\right]^{1/p},\quad \|\hat{f}\|_q=[\Sigma|\hat{f}(n)|^q]^{1/q}$$

并且 $\|\hat{f}\|_\infty=\sup_n|\hat{f}(n)|$.

由于 $(1,\infty)$ 和 $(2,2)$ 都是共轭指数对，所以人们可以推测，当 $f\in L^p(\mu)$ 和 $1<p<2$，$q=p/(p-1)$ 时，$\|\hat{f}\|_q$ 是有限的. 这结论确实是正确的，并且可以在前面的平凡情形 $p=1$ 和 $p=2$ 之间，通过"插值"来证明.

**12.11 Hausdorff-Young 定理** 在上面的假设下，如果 $1\leqslant p\leqslant 2$ 及 $f\in L^p(\mu)$，则不等式

(1) $$\|\hat{f}\|_q\leqslant M^{(2-p)/p}\|f\|_p$$

成立.

**证明** 我们首先证明定理的一个简化形式.

固定 $p$，$1<p<2$. 设 $f$ 是一个简单复函数，使得 $\|f\|_p=1$，又设 $b_1,\cdots,b_N$ 是复数，使得 $\Sigma|b_n|^p=1$. 我们的目标是证明不等式

(2) $$\left|\sum_{n=1}^N b_n\hat{f}(n)\right|\leqslant M^{(2-p)/p}$$

设 $F=|f|^p$，又设 $B_n=|b_n|^p$. 则有一个函数 $\varphi$ 和复数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N$，使得

$$f=F^{1/p}\varphi, \quad |\varphi|=1, \quad \int_X F d\mu=1 \tag{3}$$

和

$$b_n=B_n^{1/p}\beta_n, \quad |\beta_n|=1, \quad \sum_{n=1}^{N} B_n=1 \tag{4}$$

如果我们利用这些关系式和第 12.10 节给出的 $\hat{f}(n)$ 的定义，则得到

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \hat{f}(n)=\sum_{n=1}^{N} B_n^{1/p}\beta_n \int_X F^{1/p}\varphi\bar{\psi}_n d\mu \tag{5}$$

在(5)中现在用 $z$ 代替 $1/p$，且对任意复数 $z$，定义

$$\Phi(z)=\sum_{n=1}^{N} B_n^z\beta_n \int_X F^z\varphi\bar{\psi}_n d\mu \tag{6}$$

记住 $A>0$ 时，$A^z=\exp(z\log A)$；如果 $A=0$，我们约定 $A^z=0$. 由于 $F$ 是简单函数，$F\geqslant 0$ 及 $B_n\geqslant 0$，我们看到 $\Phi$ 就是这种指数函数的有限的线性组合，所以，对任意有限数 $a$ 和 $b$，$\Phi$ 在

$$\{z: a\leqslant \mathrm{Re}(z)\leqslant b\}$$

上是有界整函数. 我们将取 $a=\frac{1}{2}$ 和 $b=1$，并在这带形域的边缘上估计 $\Phi$，然后应用定理 12.8 去估计 $\Phi(1/p)$.

对 $-\infty<y<\infty$ 定义

$$c_n(y)=\int_X F^{1/2}F^{iy}\varphi\bar{\psi}_n d\mu \tag{7}$$

Bessel 不等式给出

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n(y)|^2\leqslant \int_X |F^{1/2}F^{iy}\varphi|^2 d\mu \tag{8}$$

$$=\int_X |F|\,d\mu=1$$

又 Schwarz 不等式表明

$$\text{(9)}\qquad \left|\Phi\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|=\left|\sum_{n=1}^{N} B_n^{1/2}B_n^{iy}\beta_n c_n\right|$$

$$\leqslant\left\{\sum_{n=1}^{N}B_n\cdot\sum_{n=1}^{N}|c_n|^2\right\}^{1/2}\leqslant 1$$

由于$\|\psi_n\|_\infty\leqslant M$，从(3)，(4)，和(6)很容易得到估计值

$$\text{(10)}\qquad |\Phi(1+iy)|\leqslant M \qquad (-\infty<y<\infty)$$

现在从式(9)，(10)和定理 12.8 可以断定

$$\text{(11)}\qquad |\Phi(x+iy)|\leqslant M^{2x-1}\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\ -\infty<y<\infty\right)$$

由于 $x=1/p$ 和 $y=0$，这就给出所期望的不等式(2)．

整个证明现在不难完成了．首先，注意到由于在任意测度空间上的任意函数的 $L^q$ 范数等于它作为 $L^p$ 上的一个线性泛函时的范数，于是

$$\text{(12)}\qquad \{\Sigma|\hat{f}(n)|^q\}^{1/q}$$

$$=\sup\left|\sum_{n=1}^{N}b_n\hat{f}(n)\right|$$

这里的上确界是通过使 $\Sigma|b_n|^p=1$ 的所有$\{b_1,\ \cdots,\ b_N\}$来取得的．因此，对每一个简单复函数 $f\in L^p(\mu)$，(2)表明

$$\text{(13)}\qquad \left\{\sum_{n=1}^{N}|\hat{f}(n)|^q\right\}^{1/q}\leqslant M^{(2-p)/p}\|f\|_p$$

如果 $f\in L^p(\mu)$，则有简单函数 $f_j$，使得当 $j\to\infty$ 时，$\|f_j-f\|_p\to 0$．因为 $\psi_n\in L^q(\mu)$，故对每一个 $n$，$\hat{f}_j(n)\to\hat{f}(n)$．这样，由于

(13)对每个 $f_j$ 成立，所以对 $f$ 同样成立．由于$N$是任意的，因而最后得到(1)．

## 最大模定理的逆定理

现在，我们回到本章引言中提到过的定理上．

字母 $j$ 表示恒等函数：$j(z)=z$．

对每个 $z\in\overline{U}$ 指定数值为 1 的函数用 1 表示．

**12.12 定理** 设$M$是闭单位圆盘$\overline{U}$上的连续复函数的向量空间，它具有如下性质：

(*a*) $1\in M$．

(*b*) 如果 $f\in M$，则亦有 $jf\in M$．

(*c*) 如果 $f\in M$，则$\|f\|_U=\|f\|_T$．

则每一个 $f\in M$在$U$内全纯．

注意(*c*)是最大模定理稍弱的形式；(*c*) 只是断定$|f|$在$\overline{U}$上的全局极大值在它边界$T$上的某点达到，但(*c*)并没有预先排除$|f|$在$U$内的局部极大值的存在性．

**证明** 根据(*a*)和(*b*)，$M$包含所有多项式．连同(*c*)一起便表明$M$满足定理 5.25 的假设．因此每一个$f\in M$ 在$U$内是调和的，我们将用 (*b*) 去证明每一个 $f\in M$ 实际上满足 Cauchy-Riemann 方程．

设$\partial$和$\bar{\partial}$是第 11.1 节中引进的微分算子．乘积的微分法则给出

$$(\partial\bar{\partial})(fg)=f\cdot(\partial\bar{\partial}g)+(\partial f)\cdot(\bar{\partial}g)+(\bar{\partial}f)\cdot(\partial g)+(\partial\bar{\partial}f)\cdot g$$

固定 $f\in M$，并取 $g=j$．则 $fj\in M$．因此 $f$ 和 $fj$ 是调和的，所以$\partial\bar{\partial}f=0$ 和$(\partial\bar{\partial})(fj)=0$．同样，$\bar{\partial}j=0$ 和 $\partial j=1$．因而上面的等式简化为$\bar{\partial}f=0$．所以 $f\in H(U)$．

这个结果将在下面的证明中使用.

**12.13 Rado 定理** 假定 $f\in C(\overline{U})$，$\Omega$ 是使 $f(z)\neq 0$ 的所有 $z\in U$ 的集，且 $f$ 在 $\Omega$ 内全纯. 则 $f$ 在 $U$ 内全纯.

特别，定理断定 $U-\Omega$ 至多是可数的，除非 $\Omega=\varnothing$.

**证明** 设 $\Omega\neq\varnothing$. 我们首先证明 $\Omega$ 在 $U$ 内稠密. 如果不是这样，则存在 $\alpha\in\Omega$ 和 $\beta\in U-\overline{\Omega}$，使得 $2|\beta-\alpha|<1-|\beta|$. 选择 $n$ 使得 $2^n|f(\alpha)|>\|f\|_T$. 对 $z\in\overline{\Omega}$，定义 $h(z)=(z-\beta)^{-n}f(z)$. 如果 $z\in U\cap\partial\Omega$，则 $f(z)=0$. 因此 $h(z)=0$. 如果 $z\in T\cap\partial\Omega$，则

$$|h(z)|\leqslant(1-|\beta|)^{-n}\|f\|_T<|\alpha-\beta|^{-n}|f(\alpha)|$$
$$=|h(\alpha)|$$

这与最大模定理发生矛盾.

因此 $\Omega$ 在 $U$ 内稠密.

其次，设 $M$ 是在 $\Omega$ 内全纯的所有 $g\in C(\overline{U})$ 的向量空间. 固定 $g\in M$. 当 $n=1,2,3,\cdots$，在 $U\cap\partial\Omega$ 上 $fg^n=0$. 因此，对每一个 $\alpha\in\Omega$，由最大模定理推出

$$|f(\alpha)||g(\alpha)|^n\leqslant\|fg^n\|_{\partial\Omega}$$
$$=\|fg^n\|_T\leqslant\|f\|_T\|g\|_T^n$$

如果我们取 $n$ 次根，然后令 $n\to\infty$，则对每一个 $\alpha\in\Omega$ 看出 $|g(\alpha)|\leqslant\|g\|_T$. 由于 $\Omega$ 在 $U$ 内稠密，所以 $\|g\|_U=\|g\|_T$.

由此可见，$M$ 满足定理 12.12 的假设. 因为 $f\in M$，所以 $f$ 在 $U$ 内全纯.

## 习 题

1 不要使用 $f$ 边界值的知识，证明定理 12.2.

2 设 $f\in H(\Pi^+)$，此处 $\Pi^+$ 是上半平面，且 $|f|\leqslant 1$. 问 $|f'(i)|$ 能取得多大？找出此极值函数.（比较 12.5 节的讨论）.

3 设 $f\in H(\Omega)$. 在什么条件下，$|f|$ 在 $\Omega$ 内有局部极小值？

4 (a) 设 $\Omega$ 是一区域，$D$ 是圆盘，$\overline{D}\subset\Omega$，$f\in H(\Omega)$，$f$ 不是常数，而在 $D$

的边界上$|f|$是常数．证明在$D$内$f$至少有一个零点．

(b) 找出所有整函数$f$，使得当$|z|=1$时就有$|f(z)|=1$．

5 设$\Omega$是一个有界区域，$\{f_n\}$是在$\overline{\Omega}$上连续而在$\Omega$内全纯的函数序列，且$\{f_n\}$在$\Omega$的边界上一致收敛．证明$\{f_n\}$在$\overline{\Omega}$上一致收敛．

6 设$f\in H(\Omega)$，$\Gamma$是$\Omega$内的一个圈，使得对所有$\alpha\notin\Omega$，$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha)=0$，对每一个$\zeta\in\Gamma^*$，$|f(\zeta)|\leqslant 1$，且$\mathrm{Ind}_\Gamma(z)\neq 0$．证明$|f(z)|\leqslant 1$．

7 在定理12.8的证明中，暗中假定了$M(a)>0$和$M(b)>0$．证明当$M(a)=0$时这个定理也成立，因而对所有$z\in\Omega$，$f(z)=0$．

8 如果$0<R_1<R_2<\infty$，令$A(R_1,R_2)$表示环域

$$\{z:R_1<|z|<R_2\}$$

则存在一个垂直带形域使指数函数把它映射到$A(R_1, R_2)$上．用此去证明Hadamard 三圆周定理：如果$f\in H(A(R_1,R_2))$，又

$$M(r)=\max_\theta|f(re^{i\theta})| \qquad (R_1<r<R_2)$$

且如果$R_1<a<r<b<R_2$，则

$$\log M(r)\leqslant\frac{\log(b/r)}{\log(b/a)}\log M(a)+\frac{\log(r/a)}{\log(b/a)}\log M(b)$$

[换言之，$\log M(r)$是$\log r$的一个凸函数．]对哪些$f$能使这个不等式成为等式？

9 设$\Pi$为开的右半平面（当且仅当$\mathrm{Re}z>0$时$z\in\Pi$）．设$f$在$\Pi$的闭包($\mathrm{Re}z\geqslant 0$)上连续，$f\in H(\Pi)$，且有常数$A<\infty$和$\alpha<1$使得对于所有$z\in\Pi$，

$$|f(z)|<A\exp(|z|^\alpha)$$

而且对所有实数$y$，$|f(iy)|\leqslant 1$．证明在$\Pi$内$|f(z)|\leqslant 1$．

证明当$\alpha=1$时结论是错误的．

如果用通过原点的，其角度不等于$\pi$的两条射线为界的区域来代替$\Pi$，则结果应如何修正？

10 设$\Pi$为开的右半平面．$f\in H(\Pi)$，对所有$z\in\Pi$，$|f(z)|<1$，且存在$\alpha$，$-\pi/2<\alpha<\pi/2$，使得当$r\to\infty$时

$$\frac{\log|f(re^{i\alpha})|}{r}\longrightarrow-\infty$$

证明$f=0$．

提示：设$g_n(z)=f(z)e^{nz}$，$n=1,2,3,\cdots$．将习题9应用到由$-\pi/2<\theta<\alpha$，$\alpha<\theta<\pi/2$所定义的两个角域上．推断每个$g_n$在$\Pi$内有界，且对所有

$n$，在$\Pi$内$|g_n|<1$.

11　设$\Gamma$是无界域$\Omega$的边界，$f\in H(\Omega)$，$f$在$\Omega\cup\Gamma$上连续，且有常数$B<\infty$和$M<\infty$使在$\Gamma$上$|f|\leqslant M$而在$\Omega$内$|f|\leqslant B$. 证明在$\Omega$内实际上有$|f|\leqslant M$.

提示：证明，不失一般性本题目可进一步假设$U\cap\Omega=\varnothing$. 固定$z_0\in\Omega$，令$n$为一个大的整数，令$V$为以0为中心的一个大圆盘，且在包含$z_0$的$V\cap\Omega$的分支内把最大模定理应用到函数$f^n(z)/z$上.

12　设$f$是整函数. 如果有一个连续映射$\gamma$把$[0,1)$映到复平面内，使得当$t\to1$时，$\gamma(t)\to\infty$和$f(\gamma(t))\to\alpha$，则说$\alpha$是$f$的一个渐近值. [在复平面内"当$t\to1$时，$\gamma(t)\to\infty$"是指对每个$R<\infty$，有一个对应的$t_R<1$，使得当$t_R<t<1$时，便有$|\gamma(t)|>R$]. 证明每一个非常数的整函数以$\infty$作为一个渐近值.

提示：令$E_n=\{z:|f(z)|>n\}$. 根据习题11，$E_n$的每个分支是无界的(如何证明？)且包含$E_{n+1}$的一个分支.

13　证明exp恰好有两个渐近值：0和$\infty$. 关于sin和cos怎样？注：对所有复数$z$，$\sin z$和$\cos z$定义为

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

14　如果$f$是整函数且$\alpha$不在$f$的值域内，证明$\alpha$是$f$的一个渐近值，除非$f$是常数.

15　设$f\in H(U)$. 证明在$U$内有一个序列$\{z_n\}$使得$|z_n|\to1$且$\{f(z_n)\}$有界.

16　设$\Omega$是有界区域，$f\in H(\Omega)$，且对$\Omega$内每一个收敛于$\Omega$的一个边界点的序列$\{z_n\}$

$$\limsup_{n\to\infty}|f(z_n)|\leqslant M$$

证明对所有$z\in\Omega$，$|f(z)|\leqslant M$.

# 第十三章　有理函数逼近

## 预备知识

**13.1 Riemann 球面**　用附加一个称为 $\infty$ 的新点来紧化复平面，对全纯函数的研究常常是方便的．由此而产生的集 $S^2$（Riemann 球面，即 $R^2$ 和 $\{\infty\}$ 的并）在下述意义上予以拓扑化．对任意 $r>0$，令 $D'(\infty;r)$ 为使 $|z|>r$ 的所有复数 $z$ 的集，设 $D(\infty;r)=D'(\infty;r)\cup\{\infty\}$，并且断言当且仅当 $S^2$ 的子集是圆盘 $D(a;r)$ 的并时，则该子集是开集，这里的 $a$ 是 $S^2$ 的任意点而 $r$ 是任意正数．在 $S^2-\{\infty\}$ 上当然给出通常的平面拓扑．容易看出，$S^2$ 与球面是同胚的（因此用这个记号）．事实上，$S^2$ 映到 $R^3$ 内的单位球面上的同胚 $\varphi$ 能明显地表示为：设 $\varphi(\infty)=(0,0,1)$，而对所有的复数 $re^{i\theta}$，设

$$\varphi(re^{i\theta})=\left(\frac{2r\cos\theta}{r^2+1},\frac{2r\sin\theta}{r^2+1},\frac{r^2-1}{r^2+1}\right). \tag{1}$$

我们留给读者去作出由(1)确定的几何图形．

如果 $f$ 在 $D'(\infty;r)$ 内全纯，则称 $f$ 有一个孤立奇点 $\infty$．在 $D'\left(0,\frac{1}{r}\right)$ 内定义函数 $\tilde{f}(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$，则 $f$ 在 $\infty$ 的奇点的性质与 $\tilde{f}$ 在 0 点的性质相同．

因此，如果 $f$ 在 $D'(\infty;r)$ 内有界，则 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 存在，并且是一个复数（如同我们把定理 10.20 应用到 $\tilde{f}$ 时所看到的那样）．我们把 $f(\infty)$ 定义为这个极限，因此在 $D(\infty;r)$ 内得到一个称为全纯的函数；注意此函数是用 $\tilde{f}$ 在 0 点近傍的特性而不是用 $f$ 在 $\infty$ 处的

可微性来定义的.

如果 $z=0$ 是 $\tilde{f}$ 的 $m$ 阶极点,则称$\infty$是 $f$ 的 $m$ 阶极点; $f$ 在$\infty$处的主部就是一个通常的$m$ 次多项式(与定理 10.21 相比较),如果我们从 $f$ 减去这个多项式,就得到一个以$\infty$为可去奇点的函数.

最后,如果 $z=0$ 为 $\tilde{f}$ 的本性奇点,则称$\infty$为 $f$ 的本性奇点.例如,每一个不是多项式的整函数在$\infty$处有一个本性奇点.

稍后,在本章中,我们将遇到"$S^2-\Omega$是连通的"这个条件,此处 $\Omega$ 是平面内的一个开集. 注意它与"$\Omega$ 相对于平面的余集是连通的"这一条件是不等价的. 例如,如果 $\Omega$ 是由所有复数 $z=x+iy$, $0<y<1$ 组成,则 $\Omega$ 相对于平面的余集有两个分支,但$S^2-\Omega$是连通的.

**13.2 有理函数** 根据定义,有理函数 $f$ 是两个多项式 $P$ 和 $Q$ 的商: $f=P/Q$. 由定理 10.25得到,每一个非常数值的多项式是次数为 1 的一些因子的乘积. 我们可以假定 $P$ 和 $Q$没有这样的公共因子,则 $f$ 在$Q$ 的每一零点处有一极点($f$ 的极点与 $Q$ 的零点同阶). 如果减去对应的主部,则得到一个有理函数,它唯一的奇点是$\infty$,因而是一个多项式.

因此,每一个有理函数 $f=P/Q$ 具有形如

$$f(z)=A_0(z)+\sum_{j=1}^{k}A_j((z-a_j)^{-1}) \tag{1}$$

的表达式,此处 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ 是多项式, $A_1, \cdots, A_k$ 没有常数项,且 $a_1, \cdots, a_k$ 是 $Q$ 的不同的零点; 我们称(1)为 $f$ 的部分分式分解.

我们转向某些拓扑方面的讨论. 已知平面内的每个开集是紧集的可数并(例如闭圆盘). 然而,为了方便起见,我们要求这些紧集满足某些附加性质:

**13.3 定理** 平面内的每一个开集 $\Omega$ 是紧集序列$\{K_n\}$, $n=1$,

2, 3, …, 的并, 使得

(a) 当 $n=1, 2, 3, \cdots$ 时, $K_n$ 落在 $K_{n+1}$ 的内部.

(b) $\Omega$ 的每一个紧子集落在某个 $K_n$ 内.

(c) 当 $n=1, 2, 3, \cdots$ 时, $S^2-K_n$ 的每一个分支包含 $S^2-\Omega$ 的一个分支.

粗略地说, 性质(c)是指: $K_n$ 除去那些强加在它上面的 $\Omega$ 的洞之外, 它是没有洞的. 注意 $\Omega$ 没有假定是连通的. 根据定义, 集 $E$ 的内部是 $E$ 的最大开子集.

**证明** 当 $n=1, 2, 3, \cdots$ 时, 设

$$V_n=D(\infty; n)\cup\bigcup_{a\notin\Omega}D\left(a;\ \frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

且 $K_n=S^2-V_n$. [当然在(1)内 $a\neq\infty$. ]则 $K_n$ 是 $\Omega$ 的有界闭子集(因此是紧集), 且 $\Omega=\bigcup K_n$. 如果 $z\in K_n$, 且 $r=n^{-1}-(n+1)^{-1}$, 则容易验证 $D(z;\ r)\subset K_{n+1}$. 这便给出(a). 因此, $\Omega$ 是 $K_n$ 的内部 $W_n$的并. 如果 $K$ 是 $\Omega$ 的一个紧子集, 则对某个 $N$, $K\subset W_1\cup\cdots\cup W_N$. 因此 $K\subset K_N$.

最后, (1)中的每个圆盘与 $S^2-\Omega$ 相交; 每个圆盘是连通的; 因而$V_n$的每个分支与 $S^2-\Omega$ 相交; 由于 $V_n\supset S^2-\Omega$, 所以没有 $S^2-\Omega$的分支能够相交 $V_n$ 的两个分支. 这就给出(c).

**13.4 定向区间的集** 令$\Phi$为平面内定向区间的有限类. 对每一点$p$, 令$m_I(p)[m_E(p)]$是起点[终点]为 $p$ 的$\Phi$的元的个数. 对每一个 $p$, 如果 $m_I(p)=m_E(p)$, 则称$\Phi$是平衡的.

如果$\Phi$是平衡的(且非空), 则可以作出如下的结构.

选择 $\gamma_1=[a_0, a_1]\in\Phi$. 设 $k\geqslant 1$, 且$\Phi$的不同元 $\gamma_1, \cdots\gamma_k$, 已经按这样的方法选取, 当 $1\leqslant i\leqslant k$ $\gamma_i=[a_{i-1},\ a_i]$. 如果 $a_k=a_0$, 则停止进行. 如果 $a_k\neq a_0$, 且恰好区间 $\gamma_1, \cdots\gamma_k$ 中有 $r$ 个以 $a_k$ 作为终点, 则这些区间中只有 $r-1$ 个以 $a_k$ 作为起点; 由于$\Phi$为平衡的,

所以$\Phi$至少包含另外一个区间，比如说$\gamma_{k+1}$，以$a_k$为起点. 由于$\Phi$为有限的，那末，比如说到第$n$步，我们最终都会回到$a_0$.

这样，$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$(按此顺序)连成一条闭路径.

$\Phi$的剩余元素仍然组成适用上面结构的一个平衡类. 由此可见，$\Phi$的元能如此计算，致使它们形成有限多条闭路径. 这些路径的和是一个圈. 因此得到下面的结论：

如果$\Phi=\{\gamma_1, \cdots \gamma_N\}$是有向区间的一个平衡类，且

$$\Gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_N$$

则$\Gamma$是一个圈.

**13.5 定理** 如果$K$是平面开集$\Omega(\neq\varnothing)$的一个紧子集，则在$\Omega-K$内有一个圈，使得对每一个$f\in H(\Omega)$和对每一个$z\in K$，Cauchy 公式

(1) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

成立.

**证明** 由于$K$是紧的且$\Omega$是开集，则存在一个$\eta>0$，使得从$K$的任意点到$\Omega$外部的任意点的距离至少为$2\eta$. 在平面内由水平线和垂直线构造一种格子，使得任意两条邻接的水平线之间的距离为$\eta$，且对垂直线也一样. 设$Q_1, \cdots, Q_m$是以$\eta$为边长的正方形(闭 2-胞腔)，这些正方形由格子组成且与$K$相交. 则当$\gamma=1, \cdots, m$时，$Q_r\subset\Omega$.

如果$a_r$为$Q_r$的中心而$a_r+b$为它的一个顶点，令$\gamma_{rk}$为定向区间

(2) $$\gamma_{rk}=[a_r+i^k b, a_r+i^{k+1}b]$$

且定义

(3) $$\partial Q_r=\gamma_{r1}+\gamma_{r2}+\gamma_{r3}+\gamma_{r4} \qquad (r=1, \cdots, m)$$

则容易验证(例如，作为定理 10.37 的特殊场合，或者用定理 10.11

和 10.40.)

(4) $$\mathrm{Ind}_{\partial Q_r}(\alpha)=\begin{cases}1 & \text{当 } \alpha \text{ 在 } Q_r \text{ 的内部}\\ 0 & \text{当 } \alpha \text{ 不在 } Q_r \text{ 内}\end{cases}$$

令$\Sigma$为所有$\gamma_{rk}(1\leqslant r\leqslant m, 1\leqslant k\leqslant 4)$的类. 显然, $\Sigma$是平衡的. 除去$\Sigma$中那些其反向亦属于$\Sigma$(参看 10.1 节). 设$\Phi$为$\Sigma$剩余元素的类, 则$\Phi$是平衡的, 令$\Gamma$是如同 13.4 节那样由$\Phi$构造出来的圈.

如果某个$Q_r$的一条边$E$与$K$相交, 则以$E$为边界的两个正方形都与$K$相交. 因此, $\Sigma$包含互相反向而范围为$E$的两个有向区间. 这些区间在$\Phi$内不出现, 所以$\Gamma$是$\Omega-K$内的一个圈.

如果$\alpha$不在任何$Q_r$的边界上, 则由$\Sigma$选出的$\Phi$结构同样表明

(5) $$\mathrm{Ind}_{\Gamma}(\alpha)=\sum_{r=1}^{m}\mathrm{Ind}_{\partial Q_r}(\alpha)$$

因此, (4)蕴涵着

(6) $$\mathrm{Ind}_{\Gamma}(\alpha)=\begin{cases}1 & \text{当 } \alpha \text{ 在某个 } Q_r \text{ 的内部}\\ 0 & \text{当 } \alpha \text{ 不在 } Q_r \text{ 内}\end{cases}$$

如果$z\in K$, 则$z\notin\Gamma^*$, 且$z$是某个$Q_r$内部的一个极限点. 由于在$\Gamma^*$的余集的每个分支内, (6)的左边是常数, 所以(6)给出

(7) $$\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z)=\begin{cases}1 & \text{当 } z\in K\\ 0 & \text{当 } z\notin\Omega\end{cases}$$

根据 Cauchy 定理 10..35 便得到(1).

## Runge 定理

本节主要目标是定理 13.9. 我们从一个稍为不同的说法开始, 其中着重的是在一个紧集上的一致逼近.

**13.6 定理** 设$K$是平面内的一个紧集, 且$\{\alpha_j\}$是一个集, 对于$S^2-K$的每个分支它都包含其中的一个点. 如果$\Omega$为开集, $\Omega$

$\supset K$, $f\in H(\Omega)$, 且 $\varepsilon>0$, 则存在一个有理函数 $R$, 其所有极点在预定的集 $\{\alpha_j\}$ 内, 使得对于每一个 $z\in K$

$$(1)\qquad |f(z)-R(z)|<\varepsilon$$

注意 $S^2-K$ 至多有可数多个分支. 同时注意在 $S^2-K$ 的无界分支内选定的点最好是 $\infty$; 事实上, 这恰好是最有趣的选择.

**证明** 我们考虑其元素为 $K$ 上的连续复函数, 具有上确界范数的 Banach 空间 $C(K)$. 设 $M$ 为 $C(K)$ 的子空间, 这个子空间由全部极点在 $\{\alpha_j\}$ 内的那些有理函数在 $K$ 上的限制所组成. 定理断言 $f$ 在 $M$ 的闭包内. 根据定理 5.19(Hahn-Banach 定理的推论), 这就等于说, 每一个在 $M$ 上为零的在 $C(K)$ 上的有界线性泛函在 $f$ 处亦为零, 因而 Riesz 表示定理(定理 6.19)指出必须要证明下面的结论:

如果 $\mu$ 为 $K$ 上的复 Berel 测度, 对其极点只在集 $\{\alpha_j\}$ 内的每一个有理函数 $R$, 满足

$$(2)\qquad \int_K R\,d\mu=0$$

且若 $f\in H(\Omega)$, 则同样有

$$(3)\qquad \int_K f\,d\mu=0$$

让我们就这样假设 $\mu$ 满足(2). 定义

$$(4)\qquad h(z)=\int_K\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta-z}\qquad (z\in S^2-K)$$

根据定理 10.7(使 $X=K$, $\varphi(\zeta)=\zeta$), 则 $h\in H(S^2-K)$.

设 $V_j$ 为 $S^2-K$ 的包含 $\alpha_j$ 的分支, 且设 $D(\alpha_j;\ r)\subset V_j$. 如果 $\alpha_j\neq\infty$ 且 $z$ 固定在 $D(\alpha_j;r)$ 内, 则

$$(5)\qquad \frac{1}{\zeta-z}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(z-\alpha_j)^n}{(\zeta-\alpha_j)^{n+1}}$$

对 $\zeta\in K$ 是一致的. 式(5)右边每个函数对(2)是适用的. 因此, 对

所有 $z\in D(\alpha_j;r)$, $h(z)=0$. 根据唯一性定理 10.18, 这就推出, 对所有 $z\in V_j$, $h(z)=0$.

如果 $\alpha_j=\infty$, 用

$$(6)\qquad \frac{1}{\zeta-z}=-\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}z^{-n-1}\zeta^{n}\qquad(\zeta\in K,\ |z|>r)$$

代替(5), 则在 $D(\infty;r)$内可以再一次推出 $h(z)=0$, 因而在 $V_j$ 内 $h(z)=0$. 因此由(2)我们已经证明

$$(7)\qquad h(z)=0\qquad(z\in S^2-K)$$

和定理 13.5 一样, 现在在 $\Omega-K$ 内选取一个圈 $\Gamma$, 且将 $f$ 的 Cauchy 积分表示对 $\mu$ 进行积分. 应用Fubini 定理(由于我们是处理 Berel 测度和紧空间上的连续函数, 所以是合法的)并结合(7)式, 给出

$$\begin{aligned}\int_K fd\mu&=\int_K d\mu(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)}{w-\zeta}dw\right]\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)dw\int_K\frac{d\mu(\zeta)}{w-\zeta}\\&=\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)h(w)dw=0\end{aligned}$$

最后的等式依赖于 $\Gamma^*\subset\Omega-K$ 的事实, 此处 $h(w)=0$.

因此(3)成立, 同时完成了定理的证明.

下面的特殊情况是特别有趣的.

**13.7 定理** 设$K$是平面内的紧集, $S^2-K$连通, 且$f\in H(\Omega)$, 此处$\Omega$为包含 $K$ 的某个开集. 则有一个多项式序列 $\{P_n\}$, 使得 $P_n(z)\longrightarrow f(z)$在 $K$上是一致的.

**证明** 由于 $S^2-K$现在只有一个分支, 所以只需要找一个点 $\alpha_j$ 以便于应用定理 13.6, 而我们可以取 $\alpha_j=\infty$.

**13.8 评注** 对于使$S^2-K$为非连通的平面内的每一个紧集 $K$, 前述结果不成立. 因为, 在那种情况下, $S^2-K$有一个有界分支

$V$. 选取 $\alpha \in V$, 令 $f(z)=(z-\alpha)^{-1}$, 且令 $m=\max\{|z-\alpha|: z\in K\}$. 设 $P$ 是一个多项式, 使得对所有 $z\in K$, $|P(z)-f(z)|<\frac{1}{m}$. 则

$$(1) \qquad |(z-\alpha)P(z)-1|<1 \qquad (z\in K)$$

特别, 如果 $z$ 在 $V$ 的边界上, 则(1)成立; 由于 $V$ 的闭包是紧的, 所以最大模定理表明对每一个 $z\in V$, (1)成立; 取 $z=\alpha$ 便得到 $1<1$. 因此一致逼近是不可能的.

同样的论证表明, 在定理 13.6 中, 没有一个 $\alpha_j$ 可以被省去.

现在我们应用先前的逼近定理在开集内作逼近. 我们强调指出, 在定理 13.6 和 13.7 中, 没有假定 $K$ 是连通的, 并且在如下的定理中, 将不假定 $\Omega$ 是连通的.

**13.9 定理** 令 $\Omega$ 为平面内的开集, 令 $A$ 是一个集, 它在 $S^2-\Omega$ 的每个分支内有一个点, 且设 $f\in H(\Omega)$. 则存在极点只在 $A$ 内的有理函数的一个序列 $\{R_n\}$, 使得 $R_n \longrightarrow f$ 在 $\Omega$ 的紧子集上是一致的.

在 $S^2-\Omega$ 为连通的特殊情况下, 可以取 $A=\{\infty\}$, 并因此得到多项式 $P_n$, 使得 $P_n \longrightarrow f$ 在 $\Omega$ 的紧子集上是一致的.

注意, $S^2-\Omega$ 可以有不可数个分支; 例如, $S^2-\Omega=\{\infty\}\cup C$, 此处 $C$ 是 Cantor 集.

**证明** 选取 $\Omega$ 内具有定理 13.3 中所规定性质的紧集 $K_n$ 的一个序列. 暂时固定 $n$. 由于 $S^2-K_n$ 的每个分支包含 $S^2-\Omega$ 的一个分支, 故 $S^2-K_n$ 的每个分支包含 $A$ 的一点, 所以定理 13.6 给出极点在 $A$ 内的一个有理函数 $R_n$, 使得

$$(1) \qquad |R_n(z)-f(z)|<\frac{1}{n} \qquad (z\in K_n)$$

现在, 如果 $K$ 为 $\Omega$ 内任意紧集, 则存在一个 $N$, 对所有 $n\geq N$, 使得 $K\subset K_n$. 从(1)得到

(2) $$|R_n(z)-f(z)|<\frac{1}{n} \qquad (z\in K, n\geqslant N)$$

这便完成了定理的证明.

## Mittag-Leffler 定理

现在将用 Runge 定理来证明,能够构造出具有任意预先指定极点的亚纯函数.

**13.10 定理** 设$\Omega$是平面内的开集,$A\subset\Omega$,$A$在$\Omega$内没有极限点,且对每个$\alpha\in A$,对应有一个正整数$m(\alpha)$和一个有理函数

$$P_\alpha(z)=\sum_{j=1}^{m(\alpha)}c_{j,\alpha}(z-\alpha)^{-j}$$

则在$\Omega$内存在一个亚纯函数$f$,它在每个$\alpha\in A$处的主要部份是$P_\alpha$且在$\Omega$内没有其他极点.

**证明** 如同定理 13.3 那样,我们选取$\Omega$内紧集的一个序列:对$n=1,2,3,\cdots$,$K_n$在$K_{n+1}$的内部,$\Omega$的每一个紧子集在某个$K_n$内,且$S^2-K_n$的每一个分支包含$S^2-\Omega$的一个分支.设$A_1=A\cap K_1$,且对$n=2,3,4,\cdots$,$A_n=A\cap(K_n-K_{n-1})$.由于$A_n\subset K_n$且$A$在$\Omega$内没有极限点(因而在$K_n$内没有极限点),所以每个$A_n$是一个有限集.设

(1) $$Q_n(z)=\sum_{\alpha\in A_n}P_\alpha(z) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

由于每个$A_n$为有限,所以每个$Q_n$是一个有理函数.当$n\geqslant2$时,$Q_n$的极点在$K_n-K_{n-1}$内.特别,$Q_n$在包含$K_{n-1}$的一个开集内是全纯的.现在从定理 13.6 得到,存在一个其所有极点在$S^2-\Omega$内的有理函数$R_n$,使得

(2) $$|R_n(z)-Q_n(z)|<2^{-n} \qquad (z\in K_{n-1})$$

我们断言

$$f(z)=Q_1(z)+\sum_{n=2}^{\infty}(Q_n(z)-R_n(z)) \qquad (z\in\Omega) \tag{3}$$

具有所想要的性质.

固定 $N$. 在 $K_N$ 上, 我们有

$$f=Q_1+\sum_{n=2}^{N}(Q_n-R_n)+\sum_{N+1}^{\infty}(Q_n-R_n) \tag{4}$$

根据(2), (4)中最后和式的每一项在 $K_N$ 上小于 $2^{-n}$; 因此在 $K_N$ 上, 此级数一致收敛于在 $K_N$ 内部全纯的一个函数. 由于每个 $R_n$ 的极点在 $\Omega$ 的外部, 所以

$$f-(Q_1+\cdots+Q_N)$$

在 $K_N$ 内部全纯. 因此, 在 $K_N$ 的内部 $f$ 恰好具有规定的主要部分. 由于 $N$ 是任意的, 因而在 $\Omega$ 内 $f$ 具有同样的性质.

## 单连通区域

我们现在将概述单连通区域的一些性质(参看 10.38 节), 这些性质阐明它在全纯函数理论中起的重要作用. 在这些性质中, (*a*)和(*b*)称为 $\Omega$ 的内拓扑性质; (*c*)和(*d*) 涉及 $\Omega$ 嵌入 $S^2$ 内的方式; 性质(*e*)到(*h*)按特征来说是分析性的; (*i*)是关于环 $H(\Omega)$ 的代数陈述. Riemann 映射定理 14.8 是单连通区域另一个十分重要的性质. 事实上, 我们将用它去证明(*i*)→(*a*).

**13.11 定理** 对于一个平面区域 $\Omega$, 下面九个条件中的每一个蕴涵着其余的各个条件.

(*a*) $\Omega$ 同胚于开单位圆盘 $U$.

(*b*) $\Omega$ 是单连通的.

(*c*) 对 $\Omega$ 内每一条闭路径 $\gamma$ 和对每一个 $\alpha\in S^2-\Omega$, $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)=0$.

(*d*) $S^2-\Omega$ 是连通的.

($e$) 每一个$f\in H(\Omega)$能用多项式在$\Omega$的紧子集上一致逼近.

($f$) 对每一个$f\in H(\Omega)$和在$\Omega$内每一条闭路径$\gamma$,

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$

($g$) 每一个$f\in H(\Omega)$对应一个$F\in H(\Omega)$, 使得$F'=f$.

($h$) 如果$f\in H(\Omega)$且$1/f\in H(\Omega)$, 则存在一个 $g\in H(\Omega)$, 使得

$$f=\exp(g).$$

($i$) 如果$f\in H(\Omega)$且$1/f\in H(\Omega)$, 则存在一个$\varphi\in H(\Omega)$, 使得$f=\varphi^2$.

断言($h$)是$f$有一个$\Omega$内的"全纯的对数"$g$; ($i$)断言$f$有一个$\Omega$内的"全纯的平方根"$\varphi$; 而($f$)断言, 对单连通区域内的每条闭路径, Cauchy 定理成立.

在第十六章中, 我们将看到单值性定理还描述了单连通区域的另一特性.

**证明** ($a$)蕴涵($b$). 这就是说, $\Omega$是同胚于$U$的, 意味着有一个将$\Omega$映到$U$上的连续的一一映射$\psi$, 其逆$\psi^{-1}$亦为连续. 如果$\gamma$是$\Omega$内具有参数区间[0, 1]的一条闭曲线, 设

$$H(s, t)=\psi^{-1}(t\psi(\gamma(s)))$$

则$H$: $I^2\longrightarrow\Omega$是连续的; $H(s, 0)=\psi^{-1}(0)$是常数; $H(s,1)=\gamma(s)$; 且因$\gamma(0)=\gamma(1)$有$H(0, t)=H(1, t)$. 因此$\Omega$是单连通的.

($b$)蕴涵($c$). 如果($b$)成立且$\gamma$是$\Omega$内一条闭路径, 则$\gamma$是$\Omega$-同伦于一条不变的路径(由"单连通"的定义). 因此, 根据定理10.40, ($c$)成立.

($c$)蕴涵($d$). 设($d$)不成立. 则$S^2-\Omega$是$S^2$的一个非连通的闭子集. 如10.1节所指出的, 得知$S^2-\Omega$是两个非空不交的闭集$H$和$K$的并. 令$H$包含$\infty$. 令$W$为相对于平面的$H$的余集. 则

$W=\Omega\cup K$. 由于 $K$ 是紧的，所以定理 13.5(令 $f=1$)表明有$W-K=\Omega$内的一个圈$\Gamma$，对 $z\in K$ 使得 $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)=1$. 由于 $K\neq\varnothing$，所以(c)不成立.

(d)蕴涵(e). 这是定理 13.9 的一部分.

(e)蕴涵(f). 选择 $f\in H(\Omega)$，设 $\gamma$ 为$\Omega$内一条闭路径，且选取在$\gamma^*$上一致收敛于 $f$ 的多项式 $P_n$. 由于对所有 $n$, $\int_\gamma P_n(z)dz=0$，所以我们断定(f)成立.

(f)蕴涵(g). 设(f)成立，固定 $z_0\in\Omega$，且设

$$F(z)=\int_{\Gamma(z)}f(\zeta)d\zeta \qquad (z\in\Omega) \tag{1}$$

此处 $\Gamma(z)$是$\Omega$内从 $z_0$ 到 $z$ 的任意路径. 这便定义了$\Omega$内的一个函数 $F$. 因若$\Gamma_1(z)$是从 $z_0$ 到 $z$ 的另一条路径(在$\Omega$内)，则$\Gamma$之后跟着 $\Gamma_1$ 的反向路径形成$\Omega$内的一条闭路径，$f$ 沿这条闭路的积分为零. 所以若用$\Gamma_1(z)$代替$\Gamma(z)$，则(1)不受影响. 现在论证 $F'=f$. 固定 $a\in\Omega$. 存在 $r>0$，使得 $D(a;r)\subset\Omega$. 对 $z\in D(a;r)$，我们可以通过 $f$ 沿着由区间$[a,z]$得到的路径$\Gamma(a)$的积分来计算 $F(z)$. 因而，对 $z\in D'(a;r)$

$$\frac{F(z)-F(a)}{z-a}=\frac{1}{z-a}\int_{[a,z]}f(\zeta)d\zeta \tag{2}$$

如同定理 10.14 的证明一样，由 $f$ 在 $a$ 处的连续性推出 $F'(a)=f(a)$.

(g)蕴涵(h). 如果 $f\in H(\Omega)$且 $f$ 在$\Omega$内没有零点，则 $f'/f\in H(\Omega)$，且由(g)推出存在 $g\in H(\Omega)$，使得 $g'=f'/f$. 我们能够对 $g$ 加上一个常数，使得对某个 $z_0\in\Omega$ 有 $\exp\{g(z_0)\}=f(z_0)$. $g$ 的选择表明，在$\Omega$内 $fe^{-g}$ 的导数为零. 因此 $fe^{-g}$ 为常数(因$\Omega$为连通)，且由此得到 $f=e^g$.

$(h)$蕴涵$(i)$. 由$(h)$, $f=e^g$. 设 $\varphi=\exp\left(\frac{1}{2}g\right)$.

$(i)$蕴涵$(a)$. 如果$\Omega$为整个平面, 则$\Omega$是同胚于$U$的: 将 $z$ 映为 $z/(1+|z|)$.

如果$\Omega$是满足$(i)$的平面的一个真子区域, 则确实存在把$\Omega$映到$U$上的一个全纯的同胚(保形映射). 此结论就是 Riemann 映射定理, 它是下一章的主要对象. 因此, Riemann 映射定理的证明与定理 13.11 的证明将一道完成(参看定理 14.8 陈述后面的注).

$(h)$在每个单连通区域内成立这个事实具有如下的推论(此结论也可以用很初等的工具去证明).

**13.12 定理** 如果$f\in H(\Omega)$, 此处$\Omega$为平面内任意开集, 且$f$在$\Omega$内没有零点, 则$\log|f|$在$\Omega$内调和.

**证明** 对每一个圆盘$D\subset\Omega$, 对应一个函数$g\in H(D)$, 在$D$内使得$f=e^g$. 如果$u=\mathrm{Re}\,g$, 则$u$在$D$内调和, 且$|f|=e^u$. 因此, $\log|f|$在$\Omega$内的每一个圆盘内调和, 这就得出所希望的论断.

## 习 题

1 证明在$S^2$上的每一个亚纯函数是有理函数.

2 令$\Omega=\{z: |z|<1$ 和 $|2z-1|>1\}$, 且设 $f\in H(\Omega)$.

(a) 是否必定存在一个多项式 $P_n$ 的序列, 使得 $P_n\to f$ 在$\Omega$的紧子集上是一致的?

(b) 是否必定存在这样一个在$\Omega$内一致收敛于$f$的序列?

(c) 如果我们对$f$要求的条件更多些, 即$f$在包含$\Omega$的闭包的某个开集内全纯, 则对(b)的回答有改变吗?

3 有没有多项式 $P_n$ 的序列, 使得对 $n=1, 2, 3, \cdots$, $P_n(0)=1$, 但当 $n\to\infty$时, 对每一个 $z\neq0$, $P_n(z)\to0$?

4 有没有多项式 $P_n$ 的序列, 使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n(z)=\begin{cases}1 & 当\ \mathrm{Im}\,z>0,\\ 0 & 当\ z\ 为实数,\\ -1 & 当\ \mathrm{Im}\,z<0?\end{cases}$$

5　对 $n=1,2,3,\cdots$，令 $\Delta_n$ 为 $U$ 内的闭圆盘，且令 $L_n$ 为 $U-\Delta_n$ 内的与 $U$ 的每一条半径相交的一段弧（$[0,1]$的同胚像）．存在多项式 $P_n$，在 $\Delta_n$ 上十分小而在 $L_n$ 上或多或少是任意的．证明 $\{\Delta_n\}$，$\{L_n\}$ 和 $\{P_n\}$ 可以这样选择，使得级数 $f=\sum P_n$ 定义一个在 $T$ 的任意点没有径向极限的函数 $f\in H(U)$．换言之，没有实数 $\theta$，使得 $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ 存在．

6　下面是这种函数的另一种构造法．令 $\{n_k\}$ 为整数序列，使得 $n_1>1$ 和 $n_{k+1}>2kn_k$．定义

$$h(z)=\sum_{k=1}^{\infty}5^k z^{n_k}$$

证明若 $|z|<1$，则级数收敛．并证明有一个常数 $c>0$，对所有使 $|z|=1-(1/n_m)$ 的 $z$，$|h(z)|>c\cdot 5^m$．［提示：对那样的 $z$，在所定义的 $h(z)$ 级数中第 $m$ 项必远远大于所有其他项的和］．

因而 $h$ 没有有限的径向极限．

同时证明 $h$ 在 $U$ 内必有无限多个零点（与第十二章习题 15 作比较）．事实上，证明对每一个复数 $\alpha$ 都对应有无限多个 $z\in U$，使 $h(z)=\alpha$．

7　证明在定理 13.9 中，我们不必假设 $A$ 与 $S^2-\Omega$ 的每个分支相交．只要假定 $A$ 的闭包与 $S^2-\Omega$ 的每个分支相交就够了．

8　对 $\Omega$ 为全平面的情况，通过直接论证而不求助于 Runge 定理，证明 Mittag-Leffler 定理．

9　设 $\Omega$ 为单连通区域，$f\in H(\Omega)$，$f$ 在 $\Omega$ 内没有零点，且 $n$ 为正整数．证明存在一个 $g\in H(\Omega)$，使得 $g^n=f$．

10　设 $\Omega$ 为一个区域，$f\in H(\Omega)$，且 $f\neq 0$．证明：当且仅当 $f$ 在 $\Omega$ 内对每一个正整数 $n$ 有全纯的 $n$ 次方根时，$f$ 在 $\Omega$ 内有一个全纯的对数．

11　设 $f_n\in H(\Omega)$ $(n=1,2,3,\cdots)$，$f$ 是 $\Omega$ 内的复函数，且对每一个 $z\in\Omega$，$f(z)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$．证明 $\Omega$ 有一个稠密开子集 $V$，$f$ 在 $V$ 上全纯．提示：设 $\varphi=\sup|f_n|$．利用 Baire 定理证明：$\Omega$ 内每一个圆盘包含一个在其上 $\varphi$ 为有界的圆盘．应用第十章习题 5．（在一般情况下，$V\neq\Omega$．与习题 3 和 4 比较．）

# 第十四章　保 形 映 射

## 角的保持性

**14.1　定义**　每一个复数 $z\neq0$ 可以决定一个从原点发出的方向，这方向是由在单位圆周上的点

$$A[z]=\frac{z}{|z|} \tag{1}$$

确定的.

假设 $f$ 是一个将区域 $\Omega$ 映入平面内的映射，$z_0\in\Omega$ 并且 $z_0$ 有去心邻域 $D'(z_0,r)\subset\Omega$，在这邻域里 $f(z)\neq f(z_0)$. 如果

$$\lim_{r\to0}e^{-i\theta}A[f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)]\qquad(r>0) \tag{2}$$

存在并与 $\theta$ 无关，我们称 $f$ 在 $z_0$ 保角.

粗略地说，这个要求就是对任意两条由 $z_0$ 发出的射线 $L'$ 和 $L''$，它们的象 $f(L')$ 和 $f(L'')$ 在 $f(z_0)$ 所作成的角与 $L'$ 和 $L''$ 作成的角，其大小和定向都一样.

在一个区域内每一点保角这个性质，是在这区域内导数不为零的全纯函数的特征. 这是定理 14.2 的一个推论，也是把导数不为零的全纯函数称为保形映射的理由.

**14.2　定理**　设 $f$ 将一区域 $\Omega$ 映入平面内. 若对于某个 $z_0\in\Omega$，$f'(z_0)$ 存在并且 $f'(z_0)\neq0$，则 $f$ 在 $z_0$ 保角. 相反，若 $f$ 在 $z_0$ 的微分存在并且不为零，又如果 $f$ 在 $z_0$ 保角，则 $f'(z_0)$ 存在并且不为零.

这里像平常一样，$f'(z_0)=\lim[f(z)-f(z_0)]/(z-z_0)$. 而 $f$ 在 $z_0$ 的微分是 $R^2$ 到 $R^2$ 的一个线性变换 $L$，使得记 $z_0=(x_0,\ y_0)$

时，

$$(1)\qquad f(x_0+x,y_0+y)=f(x_0,y_0)+L(x,y)+(x^2+y^2)^{1/2}\eta(x,y)$$

象在定义 8.22 中一样，这里当 $x\to 0$ 及 $y\to 0$ 时，$\eta(x,y)\to 0$.

**证明** 为简单起见，取 $z_0=f(z_0)=0$. 若 $f'(0)=a\neq 0$，则立即得到

$$(2)\qquad e^{-i\theta}A[f(re^{i\theta})]=\frac{e^{-i\theta}f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|}\to\frac{a}{|a|}\qquad (r\to 0)$$

于是 $f$ 在 0 保角. 反之，若 $f$ 在 0 的微分存在且不为零，则(1)式可改写成这样的形式

$$(3)\qquad f(z)=\alpha z+\beta\bar{z}+|z|\eta(z)$$

其中当 $z\to 0$ 时，$\eta(z)\to 0$，并且 $\alpha$ 和 $\beta$ 是不同时为零的复数. 如果 $f$ 也在 0 保角，则

$$(4)\qquad \lim_{r\to 0}e^{-i\theta}A[f(re^{i\theta})]=\frac{\alpha+\beta e^{-2i\theta}}{|\alpha+\beta e^{-2i\theta}|}$$

存在并且与 $\theta$ 无关. 我们可以除掉那些使(4)式中分母为零的 $\theta$；而这样的 $\theta$ 在 $[0,2\pi)$ 内最多有两个. 对所有其他的 $\theta$，我们断定 $\alpha+\beta e^{-2i\theta}$ 位于一条通过 0 的固定的射线上，这只有当 $\beta=0$ 时才有可能. 因此 $\alpha\neq 0$，从(3)式就推出 $f'(0)=\alpha$.

注：没有全纯函数能在其导数为零的任何一点是保角的. 我们省去这个容易的证明. 但是，一个变换在微分为零的点还有可能保角. 例如，$f(z)=|z|z$，$z_0=0$.

## 线性分式变换

**14.3** 如果 $a,b,c$ 和 $d$ 都是复数，并且 $ad-bc\neq 0$，则映射

$$(1)\qquad z\to\frac{az+b}{cz+d}$$

称为线性分式变换. 由于考虑点∞会带来明显的方便，将(1)式看作由球面 $S^2$ 映入球面 $S^2$ 是合适的. 例如，当 $c\neq 0$ 时，$-d/c$ 映

为$\infty$,而$\infty$映为$a/c$. 于是容易明白每个线性分式变换是一个将$S^2$映到$S^2$上的一一映射. 而且, 每个线性分式变换可由叠加下列形式的变换得到:

(a) 平移: $z\to z+b$.

(b) 旋转: $z\to az$, $|a|=1$.

(c) 相似: $z\to rz$, $r>0$.

(d) 反演: $z\to 1/z$.

若在(1)式中, $c=0$, 这时是很明显的. 若$c\neq 0$, 可从恒等式

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{\lambda}{cz+d}, \quad \lambda=\frac{bc-ad}{c} \tag{2}$$

得出.

易知前三个变换将直线变为直线, 圆变为圆. 而对(d)这是不成立的. 但是, 如果我们设$\mathscr{F}$是所有直线和圆组成的族, 则$\mathscr{F}$对(d)是保持的. 因此, 我们得到一个重要的结论: $\mathscr{F}$对每个线性分式变换都是保持的. [读者可能会注意到, 当把$\mathscr{F}$看成$S^2$的一个子集族时, 则通过球极平面射影13.1(1), $\mathscr{F}$由$S^2$上的所有圆组成; 我们不打算采用$\mathscr{F}$这个性质, 并且省略其证明. ]

易证经过反演变换$\mathscr{F}$仍然保持, 初等解析几何表明$\mathscr{F}$中每一元素是方程

$$\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0 \tag{3}$$

的轨迹, 其中$\alpha$和$\gamma$是实常数, 而$\beta$是复常数, 并且$\beta\bar{\beta}>\alpha\gamma$. 若$\alpha\neq 0$, 则(3)式确定一个圆; $\alpha=0$, 则给出直线. 用$\frac{1}{z}$换$z$, 则(3)式变成

$$\alpha+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+\gamma z\bar{z}=0 \tag{4}$$

这是相同类型的方程.

设$a$, $b$和$c$是不同的复数. 我们构造一个线性分式变换$\varphi$, 它将有序三元组$\{a, b, c\}$映为$\{0, 1, \infty\}$, 即,

$$(5) \qquad \varphi(z)=\frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}$$

这样的 $\varphi$ 是唯一的. 因为若 $\varphi(a)=0$, 则必定在分子中有 $z-a$; 若 $\varphi(c)=\infty$, 则在分母中必定有 $z-c$; 若同时有 $\varphi(b)=1$, 我们就会得到(5)式. 如果 $a, b, c$ 中有一个是$\infty$, 类似(5)的公式是容易写出的. 如果我们在(5)之后再作一个相同类型变换的逆变换, 便得到下面的结果:

对 $S^2$ 内的任意两个有序三元组$\{a,b,c\}$和$\{a',b',c'\}$, 都有而且仅有一个线性分式变换将 $a$ 映射为 $a'$, $b$ 映射为 $b'$, 并且将 $c$ 映射为$c'$.

(当然, 假定 $a\neq b$, $a\neq c$, 和 $b\neq c$, 并且 $a'$, $b'$ 和 $c'$ 也是同样假设. )

我们从这个结果可以得出结论: 每一个圆周都可以经过一个线性分式变换映到任一个圆周上. 更有兴趣的是, 每一个圆都能映到任一条直线上(若将点$\infty$看作直线上的点), 因此, 每一开圆盘能够保形映射到任一开的半平面上.

我们来更详尽地讨论这种映射中的一个, 即

$$(6) \qquad \varphi(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

这个 $\varphi$ 映$\{-1,0,1\}$为$\{0,1,\infty\}$: 线段$(-1,1)$映射为正实轴, 单位圆周$T$经过$-1$和1. 因此, $\varphi(T)$是一条经过 $\varphi(-1)=0$的直线. 因为单位圆$T$在 $-1$ 处与实轴成一直角, 故 $\varphi(T)$在0与实轴成直角. 因此, $\varphi(T)$ 是虚轴. 因为 $\varphi(0)=1$, 可知 $\varphi$ 是一个将开单位圆盘映到开右半平面上的一一保形映射.

线性分式变换在保形映射理论中的作用也在定理 12.6 中得到很好的说明.

**14.4** 线性分式变换使得有可能把关于全纯函数在接近直线

时的性态的定理代以圆弧的情况. 反射原理的非正式讨论，将足以说明这个方法.

设 $\Omega$ 是 $U$ 内一个区域，它的边界有一部分是单位圆上的圆弧 $L$，$f$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续，在 $\Omega$ 内全纯，并且在 $L$ 上取实值. 函数

$$\psi(z)=\frac{z-i}{z+i} \tag{1}$$

把上半平面映到 $U$ 上. 若 $g=f\circ\psi$，则定理 11.17 给出 $g$ 的一个全纯开拓 $G$，于是 $F=G\circ\psi^{-1}$ 给出 $f$ 的一个全纯开拓 $F$，满足

$$f(z^*)=\overline{F(z)} \tag{2}$$

其中 $z^*=1/\bar{z}$.

最后一个断言可由 $\psi$ 的一个性质得出：若 $w=\psi(z)$ 和 $w_1=\psi(\bar{z})$，则 $w_1=w^*$. 这容易通过计算验证.

习题 2—5 提供这一技巧的其它应用.

## 正规族

Riemann 映射定理可以通过把映射函数展示为某个极值问题的解而予以证明. 这种解的存在有赖于我们现在要叙述的某些全纯函数族的一个非常有用的紧性.

**14.5 定义** 设对于区域 $\Omega$，$\mathscr{F}\subset H(\Omega)$. 若族 $\mathscr{F}$ 中任一序列包含一个子序列，它在 $\Omega$ 的每一个紧子集上一致收敛，则称族 $\mathscr{F}$ 为正规族. 这个极限函数并不要求属于 $\mathscr{F}$.

(有时采用一个比较广泛的定义，只要族 $\mathscr{F}$ 中任一序列在 $\Omega$ 的每一紧子集上或者一致收敛，或者一致地趋于 $\infty$. 这对于讨论亚纯函数是比较合适的. )

**14.6 定理** 设族 $\mathscr{F}$ 在区域 $\Omega$ 任一紧子集上一致有界并且 $\mathscr{F}\subset H(\Omega)$，则族 $\mathscr{F}$ 是正规族.

**证明** 这个假设意味着对于每一紧集 $K\subset\Omega$，都有一个数

$M(K)<\infty$与之对应，使得对所有 $f\in\mathscr{F}$ 及 $z\in K$ 均有 $|f(z)|\leqslant M(K)$.

设$\{K_n\}$是一个紧集序列，其并等于 $\Omega$，且 $K_n$ 包含在 $K_{n+1}$ 的内部. 这种序列在定理 13.3 中曾经构造过. 于是存在正数 $\delta_n$ 满足

(1) $$D(z;2\delta_n)\subset K_{n+1}\qquad(z\in K_n)$$

考虑 $K_n$ 中两点 $z'$ 和 $z''$，使得 $|z'-z''|<\delta_n$. 令 $\gamma$ 为圆心在 $z'$ 半径是 $2\delta_n$ 的正向圆周，并用 Cauchy 公式估计 $|f(z')-f(z'')|$. 因为

$$\frac{1}{\zeta-z'}-\frac{1}{\zeta-z''}=\frac{z'-z''}{(\zeta-z')(\zeta-z'')}$$

我们得到

(2) $$f(z')-f(z'')=\frac{z'-z''}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z')(\zeta-z'')}d\zeta$$

又因为对所有 $\zeta\in\gamma^*$，$|\zeta-z'|=2\delta_n$ 及 $|\zeta-z''|>\delta_n$，所以(2) 式给出不等式

(3) $$|f(z')-f(z'')|<\frac{M(K_{n+1})}{\delta_n}|z'-z''|$$

它对于所有 $f\in\mathscr{F}$，所有 $z'$ 及 $z''\in K_n$，在假定$|z'-z''|<\delta_n$ 时成立.

这是证明的关键性步骤：我们已经证明，对于每一 $K_n$，$\mathscr{F}$ 中的函数在 $K_n$ 上的限制构成一个同等连续函数族. 根据定义，这意味着对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对于所有 $f\in\mathscr{F}$ 及所有 $z'$ 和 $z''\in K_n$，只要$|z'-z''|<\delta$，都有$|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$. 当取

(4) $$\delta=\frac{\varepsilon\delta_n}{\varepsilon+M(K_{n+1})}$$

时，略为考察一下(3)式就知道，这一要求能够满足.

现在设$\{f_m\}$是在 $\mathscr{F}$ 中的一个序列. 选一个可数集 $E\subset\Omega$，使

得对于 $n=1,2,3,\cdots$，$E\cap K_n$ 在 $K_n$ 内稠密. 将 $E$ 的点排成序列 $\{w_j\}$. 因为 $\{f_m(z)\}$ 对任意 $z\in\Omega$ 都是有界的，故 $\{f_m\}$ 有一子序列，比如说 $\{f_{m,1}\}$，它在 $w_1$ 收敛. 由 $\{f_{m,1}\}$ 我们可选出一子序列，比如说 $\{f_{m,2}\}$，它也在 $w_2$ 收敛. 依同样方法进行，我们得到在 $w_i$ 收敛的序列 $\{f_{m,i}\}$，并且 $\{f_{m,i}\}$ 是 $\{f_{m,i-1}\}$ 的一个子序列. 因此"对角线序列" $\{f_{m,m}\}$ 在 $E$ 的每一点收敛.

我们断言 $\{f_{m,m}\}$ 在每一个 $K_n$ 上一致收敛(因而在 $\Omega$ 的每一个紧子集上一致收敛).

固定 $K_n$，固定 $\varepsilon>0$，并像(4)式一样选取 $\delta$. 因为 $K_n$ 是紧集，$K_n$ 包含属于 $E$ 的点：$z_1,\cdots,z_p$，使得圆盘 $D(z_i;\delta)\ (i=1,\cdots,p)$ 的并覆盖 $K_n$，并且存在一个正整数 $N$，当 $r>N$，$s>N$ 及 $1\leqslant i\leqslant p$ 时，

(5) $$|f_{r,r}(z_i)-f_{s,s}(z_i)|<\varepsilon$$

对每一个 $z\in K_n$，存在有一个 $z_i$，使 $1\leqslant i\leqslant p$，$|z-z_i|<\delta$. 因此 $|f_{r,r}(z)-f_{s,s}(z)|$ 不大于

(6) $$|f_{r,r}(z)-f_{r,r}(z_i)|+|f_{r,r}(z_i)-f_{s,s}(z_i)|+|f_{s,s}(z_i)-f_{s,s}(z)|$$

由我们所选取的 $\delta$ 得知，(6)式中第一个和第三个差的模都小于 $\varepsilon$；第二个差的模当 $r>N$ 及 $s>N$ 时也小于 $\varepsilon$. 因此

(7) $$|f_{r,r}(z)-f_{s,s}(z)|<3\varepsilon$$

对每一个 $z\in K_n$，当 $r>N$ 及 $s>N$ 时成立.

这就完成了证明.

## Riemann 映射定理

**14.7 保形等价性** 我们称两个区域 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 是保形等价的，如果存在一个映射 $\varphi\in H(\Omega_1)$，$\varphi$ 在 $\Omega_1$ 中是一一的，并且 $\varphi(\Omega_1)=\Omega_2$，换句话说，如果存在一个 $\Omega_1$ 到 $\Omega_2$ 上的一一保形映射. 在这些条件下，$\varphi$ 的逆映射在 $\Omega_2$ 是全纯的(定理 10.33)，因而是一个 $\Omega_2$

到$\Omega_1$上的保形映射.

由此得知保形等价区域都是同胚的. 但是, 保形等价区域之间有一个更重要的关系: 设$\varphi$如上所述, 则$f\to f\circ\varphi$是$H(\Omega_2)$到$H(\Omega_1)$上的保持和与乘积的一一映射,即它是由$H(\Omega_2)$到$H(\Omega_1)$上的环同构. 如果$\Omega_1$有一个简单的结构,那末关于$H(\Omega_2)$的问题就能转化为$H(\Omega_1)$中的问题, 并且它的解可以借助于映射函数$\varphi$返回到$H(\Omega_2)$. 这个问题最重要的场合是基于Riemann映射定理(在那里$\Omega_2$是单位圆盘$U$), 对于平面上任一个单连通真子区域$\Omega$,它把$H(\Omega)$的研究化为$H(U)$的研究. 当然,为了求出问题的显解,可能需要对于映射函数具有相当精确的知识.

**14.8 定理** 平面内任一(与平面本身不同的)单连通区域$\Omega$都与开单位圆盘$U$保形等价.

注: 根据Liouville定理, 平面的情况显然已被排除. 因此,平面不能保形等价于$U$,尽管这两个区域是同胚的.

在证明中用到单连通区域的性质仅仅在于每一个在这区域中没有零点的全纯函数都有全纯的平方根.从这里将得出定理13.11中"$(i)$蕴涵$(a)$"的结论,并将完成这个定理的证明.

**证明** 设$\Omega$是平面内一个单连通区域, 并设$w_0$是一个复数; $w_0\notin\Omega$. 设$\Sigma$为所有$\psi\in H(\Omega)$构成的函数族,其中$\psi$是将$\Omega$映入$U$的一一映射. 我们必须证明有$\psi\in\Sigma$将$\Omega$映到$U$上.

我们先证$\Sigma$非空. 因为$\Omega$是单连通的, 于是存在一个$\varphi\in H(\Omega)$,使得$\varphi^2(z)=z-w_0$在$\Omega$内成立. 若$\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$,则也有$\varphi^2(z_1)=\varphi^2(z_2)$,从而$z_1=z_2$;于是$\varphi$是一一的. 同理可证, $\Omega$中没有两点$z_1$和$z_2$满足$\varphi(z_1)=-\varphi(z_2)$. 因为$\varphi$是一个开映射, $\varphi(\Omega)$包含一个圆盘$D(a;r)$, 其中$0<r<|a|$. 圆盘$D(-a;r)$,因此与$\varphi(\Omega)$不相交,并且,如果定义$\psi=r/(\varphi+a)$, 我们就会看出$\psi\in\Sigma$.

第二步在于证明，若$\psi \in \Sigma$，而$\psi(\Omega)$不覆盖整个$U$，且若$z_0 \in \Omega$，则存在一个$\psi_1 \in \Sigma$，满足

$$|\psi_1'(z_0)| > |\psi'(z_0)|$$

运用由

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

定义的函数$\varphi_\alpha$将是方便的．对$\alpha \in U$，$\varphi_\alpha$是一个将$U$映射到$U$上的一一映射；它的逆映射是$\varphi_{-\alpha}$(见定理 12.4)．

设$\psi \in \Sigma, \alpha \in U$而$\alpha \notin \psi(\Omega)$．则$\varphi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$，且$\varphi_\alpha \circ \psi$在$\Omega$内没有零点；因此，存在一个函数$g \in H(\Omega)$，使得$g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$．易知$g$是一个一一映射(像在证明$\Sigma \neq \varnothing$时一样)，因此$g \in \Sigma$；若$\psi_1 = \varphi_\beta \circ g$，其中$\beta = g(z_0)$，便得$\psi_1 \in \Sigma$．记$w^2 = s(w)$，我们现在得到

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ g = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta} \circ \psi_1$$

因为$\psi_1(z_0) = 0$，由链式法则得

$$\psi'(z_0) = F'(0)\psi_1'(z_0)$$

其中$F = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta}$．易知$F(U) \subset U$，并且$F$在$U$内不是一个一一映射．于是，由 Schwarz 引理(见 12.5 节)得$|F'(0)| < 1$，因而$|\psi'(z_0)| < |\psi_1'(z_0)|$．[注意，因为$\psi$在$\Omega$内是一个一一映射，故$\psi'(z_0) \neq 0$．]

固定$z_0 \in \Omega$，并设

$$\eta = \sup\{|\psi'(z_0)| : \psi \in \Sigma\}$$

从上面所述清楚地知道，任何函数$h \in \Sigma$，当$|h'(z_0)| = \eta$时，它将映$\Omega$到$U$上．因此，只要我们证明存在这样一个函数$h$，定理就证明了．

由于对所有$\psi \in \Sigma$及$z \in \Omega$，$|\psi(z)| < 1$，故定理 14.6 表明$\Sigma$是正规族．由$\eta$的定义知道在$\Sigma$内有序列$\{\psi_n\}$满足$|\psi_n'(z_0)| \to \eta$，并且由$\Sigma$的正规性，我们选取一个子序列(为简单起见，仍记为$\{\psi_n\}$)，

它在$\Omega$的紧子集上一致收敛于一个极限$h\in H(\Omega)$. 由定理10.28, $|h'(0)|=\eta$. 因为$\Sigma\neq\varnothing,\eta>0$,所以$h$不是常数. 因为$\psi_n(\Omega)\subset U$, $n=1,2,3,\cdots$, 我们得到$h(\Omega)\subset\bar{U}$,但是开映射定理指出确实有$h(\Omega)\subset U$.

余下的是要证明$h$是一个一一映射. 取定$\Omega$内不同的两点$z_1$和$z_2$; 令$\alpha=h(z_1)$及$\alpha_n=\psi_n(z_1)$, $n=1,2,3,\cdots$, 并设$\bar{D}$是$\Omega$内圆心在$z_2$的闭圆盘, 使得$z_1\notin\bar{D}$, 并且在$\bar{D}$的边界上$h-\alpha$没有零点. 这是可能的, 因为$h-\alpha$的零点在$\Omega$内没有极限点. 函数$\psi_n-\alpha_n$在$\bar{D}$上一致收敛于$h-\alpha$; 因为它们都是一一映射, 并且在$z_1$有零点, 所以它们在圆盘$D$内没有零点; 由 Rouche 定理得到$h-\alpha$在$D$内没有零点; 特别$h(z_2)\neq h(z_1)$.

于是$h\in\Sigma$, 并且定理证毕.

另一个更富有构造性的证明将略述于习题 26.

**14.9 评注** 前面的证明也指出了$h(z_0)=0$. 因为如果$h(z_0)=\beta$而$\beta\neq0$, 则$\varphi_\beta\circ h\in\Sigma$, 并且

$$|(\varphi_\beta\circ h)'(z_0)|=|\varphi'_\beta(\beta)h'(z_0)|=\frac{|h'(z_0)|}{1-|\beta|^2}>|h'(z_0)|$$

注意到下面这一点是很有意思的. 虽然$h$是通过对$\psi\in\Sigma$取$|\psi'(z_0)|$的极大值得出的, 如果容许$f$遍取由所有$\Omega$到$U$内的全纯映射(不需要是一一的)组成的类, $h$也是$|f'(z_0)|$的最大值. 因为, 如果$f$是这样的函数, 则$g=f\circ h^{-1}$映$U$到$U$内, 于是$|g'(0)|\leqslant 1$, 当且仅当$g$是旋转时等式才成立(由 Schwarz 引理得到), 这样由链式法则得到下述结果:

若$f\in H(\Omega)$, $f(\Omega)\subset U$, 并且$z_0\in\Omega$, 则$|f'(z_0)|\leqslant|h'(z_0)|$. 当且仅当$f(z)=\lambda h(z)$, 其中$\lambda$是$|\lambda|=1$的常数时, 等式成立.

## $\mathscr{S}$ 类

**14.10 定义** $\mathscr{S}$ 是由在 $U$ 中是一一的，并满足

(1) $$f(0)=0, \quad f'(0)=1$$

的全体 $f\in H(\Omega)$ 组成的类。

这样，每一个 $f\in\mathscr{S}$ 都有幂级数展开式

(2) $$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \qquad (z\in U)$$

$\mathscr{S}$ 类在加法及乘法下是不封闭的，但它有许多别的有趣性质。我们在本节中将仅仅讨论其中一小部分。在第二十章中证明 Mergelyan 定理时将用到定理 14.15。

**14.11 例** 函数

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$$

是 $\mathscr{S}$ 类的一个元素。

因为，若 $f(z)=f(w)$，则 $(z-w)(1-zw)=0$，且当 $|z|<1$ 和 $|w|<1$ 时，第二个因式不为零。

我们留给读者对这个函数 $f$ 求 $f(U)$。

**14.12 定理** (a) 若 $f\in\mathscr{S}$，$|\alpha|=1$，并且 $g(z)=\bar{\alpha}f(\alpha z)$，则 $g\in\mathscr{S}$。(b) 若 $f\in\mathscr{S}$，则存在一个 $g\in\mathscr{S}$，使得

(1) $$g^2(z)=f(z^2) \qquad (z\in U)$$

**证明** (a) 是显然的。往证 (b)，记 $f(z)=z\varphi(z)$，则 $\varphi\in H(U)$，$\varphi(0)=1$，并且 $\varphi$ 在 $U$ 中没有零点，因为 $f$ 在 $U-\{0\}$ 内没有零点。因此存在一个函数 $h\in H(U)$ 具有 $h(0)=1$，$h^2(z)=\varphi(z)$。令

(2) $$g(z)=zh(z^2) \qquad (z\in U)$$

则 $g^2(z)=z^2h^2(z^2)=z^2\varphi(z^2)=f(z^2)$，于是得到(1)式。显然 $g(0)$

$=0$ 和 $g'(0)=1$. 我们来证明 $g$ 是一一映射.

设 $z$ 和 $w\in U$, 并且 $g(z)=g(w)$. 因为 $f$ 是一一映射, (1)蕴涵着 $z^2=w^2$, 这样, 不是 $z=w$(这就是我们要证明的)就是 $z=-w$. 在后一种情形, (2) 式给出 $g(z)=-g(w)$; 由此即得 $g(z)=g(w)=0$, 又由于 $g$ 在 $U-\{0\}$ 内没有零点, 我们得到 $z=w=0$.

**14.13 定理** 如果 $F\in H(U-\{0\})$, $F$ 在 $U$ 内是一一的, 并且

(1) $$F(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n \qquad (z\in U)$$

则

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}n|\alpha_n|^2\leqslant 1$$

这就是通常说的面积定理, 其理由在证明中将会明白.

**证明** $\alpha_0$ 的选取显然是无关紧要的. 因而假设 $\alpha_0=0$. 如果用 $\lambda F(\lambda z)$ $(|\lambda|=1)$ 代替 $F(z)$, 则既不影响假设也不影响结论. 于是我们可设 $\alpha_1$ 是实数.

设对于 $0<r<1$ $U_r=\{z:|z|<r\}$, $C_r=\{z:|z|=r\}$, 并且设 $V_r=\{z:r<|z|<1\}$, 则 $F(U_r)$ 是点$\infty$的邻域 (对 $1/F$ 应用开映射定理得出); 因为 $F$ 是一一映射, 集 $F(U_r)$, $F(C_r)$ 和 $F(V_r)$ 是不相交的. 记

(3) $$F(z)=\frac{1}{z}+\alpha_1 z+\varphi(z) \qquad (z\in U)$$

$F=u+iv$, 且

(4) $$A=\frac{1}{r}+\alpha_1 r, \quad B=\frac{1}{r}-\alpha_1 r$$

当 $z=re^{i\theta}$ 时, 于是我们得到

(5) $$u=A\cos\theta+\mathrm{Re}\varphi \quad 和 \quad v=-B\sin\theta+\mathrm{Im}\varphi$$

在等式(5)中分别除以 $A$ 和 $B$, 平方, 然后相加得到

$$\frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}=1+\frac{2\cos\theta}{A}\mathrm{Re}\varphi+\left(\frac{\mathrm{Re}\varphi}{A}\right)^2-\frac{2\sin\theta}{B}\mathrm{Im}\varphi+\left(\frac{\mathrm{Im}\varphi}{B}\right)^2$$

由(3)式知道，$\varphi$ 在原点至少有二阶零点。如果我们仍用(4)式，得知存在 $\eta>0$，对所有足够小的 $r$，满足

$$\text{(6)}\qquad \frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}<1+\eta r^3\qquad (z=re^{i\theta})$$

这说明 $F(C_r)$ 在椭圆 $E_r$ 的内部，$E_r$ 的半轴是 $A\sqrt{1+\eta r^3}$ 及 $B\sqrt{1+\eta r^3}$，因此围成一块面积

$$\text{(7)}\qquad \pi AB(1+\eta r^3)=\pi\left(\frac{1}{r}+\alpha_1 r\right)\left(\frac{1}{r}-\alpha_1 r\right)(1+\eta r^3)$$

$$\leqslant\frac{\pi}{r^2}(1+\eta r^3)$$

因为 $F(C_r)$在 $E_r$ 的内部，我们得到 $E_r\subset F(U_r)$；因而 $F(V_r)$ 在 $E_r$的内部，于是 $F(V_r)$的面积不大于(7)．从Cauchy-Riemann方程得出映射$(x,y)\to(u,v)$ 的 Jacobi 行列式是$|F'|^2$．因此定理 8.26 给出下述结果：

$$\frac{\pi}{r^2}(1+\eta r^3)\geqslant\iint_{V_r}|F'|^2$$

$$\text{(8)}\qquad =\int_r^1 t\,dt\int_0^{2\pi}\left|-t^{-2}e^{-2i\theta}+\sum_1^\infty n\alpha_n t^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\right|^2 d\theta$$

$$=2\pi\int_r^1\left(t^{-3}+\sum_1^\infty n^2|\alpha_n|^2 t^{2n-1}\right)dt$$

$$=\pi\left\{r^{-2}-1+\sum_1^\infty n|\alpha_n|^2(1-r^{2n})\right\}$$

若在(8)式两边除以 $\pi$，然后减去 $r^{-2}$，我们得到

$$\text{(9)}\qquad \sum_{n=1}^N n|\alpha_n|^2(1-r^{2n})\leqslant 1+\eta r$$

对所有足够小的 $r$ 和所有正整数$N$成立。在(9)式中令 $r\to 0$，然后令$N\to\infty$，就得到(2)式。

**系** 在上述定理的同样假设下，$|\alpha_1|\leqslant 1$.

$F(z)=(1/z)+\alpha z$, $|\alpha|=1$ 这个在 $U$ 内的一一映射说明这乃是最好的结果。

**14.14 定理** 如果 $f\in\mathscr{S}$，并且

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

则(a) $|a_2|\leqslant 2$，及(b) $f(U)\supset D\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

第二个结论说明 $f(U)$ 包含所有 $w$，这里 $|w|<\frac{1}{4}$.

**证明** 由定理 14.12，存在 $g\in\mathscr{S}$，使得 $g^2(z)=f(z^2)$. 如果 $G=1/g$，则将定理 14.13 应用于 $G$，就得到(a). 因为

$$f(z^2)=z^2(1+a_2z^2+\cdots)$$

我们得到

$$g(z)=z\left(1+\frac{1}{2}a_2z^2+\cdots\right)$$

因此

$$G(z)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{2}a_2z^2+\cdots\right)=\frac{1}{z}-\frac{a_2}{2}z+\cdots$$

定理 14.13 的系指出 $|a_2|<2$.

往证(b)，假设 $w\notin f(U)$. 定义

$$h(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/w}$$

则 $h\in H(U)$，$h$ 在 $U$ 内是一一的，并且

$$h(z)=(z+a_2z^2+\cdots)\left(1+\frac{z}{w}+\cdots\right)=z+\left(a_2+\frac{1}{w}\right)z^2+\cdots$$

因而 $h\in\mathscr{S}$. 对 $h$ 应用(a)；我们有 $|a_2+(1/w)|\leqslant 2$. 又因为 $|a_2|\leqslant 2$，我们最后得到 $|1/w|\leqslant 4$. 所以对于每一个 $w\notin f(U)$，$|w|\geqslant\frac{1}{4}$，

这就完成了证明.

例 14.11 说明($a$)和($b$)都是最好结果，对于这个特别的函数 $f\in\mathscr{S}$，点$-\frac{1}{4}$不在 $f(U)$内.

**14.15 定理** 设$F\in H(U-\{0\})$，$F$在$U$内是一一的，在$z=0$处$F$有一个一阶极点，残数是 1，并且 $w_1$ 和 $w_2$ 都不在 $f(U)$内，则$|w_2-w_1|\leqslant 4$.

**证明** 如果$f=1/(F-w_1)$，则 $f\in\mathscr{S}$，因此 $f(U)\supset D(0,\ \frac{1}{4})$，于是在 $F-w_1$ 的映射下，$U$ 的象包含使$|w|>4$ 的所有 $w$. 因为$w_2-w_1$ 不在这个象内，我们有$|w_2-w_1|\leqslant 4$.

注意，这也是最好的结果：若 $F(z)=z^{-1}+z$，则 $F(U)$不包含点 2 和$-2$. 事实上，$F(U)$在实轴上的余集正好是区间$[-2,2]$.

## 在边界上的连续性

在一定的条件下，每一个单连通区域$\Omega$到$U$上的保形映射都可扩展为它的闭包$\overline{\Omega}$到$\overline{U}$上的同胚. 在这里，$\Omega$的边界性态起了决定性的作用.

**14.16 定义** 单连通平面区域$\Omega$的边界点$\beta$称为$\Omega$的简单边界点，如果$\beta$具有下述性质：对于$\Omega$内的每一个序列$\{\alpha_n\}$，使$n\to\infty$ 时 $\alpha_n\to\beta$，都对应着一条曲线$\gamma$，它具有参数区间$[0,1]$，并且有一序列$\{t_n\}$，$0<t_1<t_2<\cdots$，$t_n\to 1$，使得 $\gamma(t_n)=\alpha_n$，$(n=1,2,3,\cdots)$. 并且当 $0\leqslant t<1$ 时，$\gamma(t)\in\Omega$.

换句话说，$\Omega$内有一条曲线经过所有点 $\alpha_n$ 且以$\beta$ 为终点.

**14.17 例** 因为简单边界点的例是很显然的，我们来研究一些非简单边界点.

如果$\Omega$是$U-\{x:0\leqslant x<1\}$，则$\Omega$是单连通区域；并且若 $0<$

$\beta \leqslant 1$，则 $\beta$ 是 $\Omega$ 的一个边界点，但不是简单边界点.

为了举出更复杂的例子，设 $\Omega_0$ 在以 $0,1,1+i$ 及 $i$ 为顶点的正方形的内部. 在 $\Omega_0$ 内除去区间

$$\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}+\frac{n-1}{n}i\right] \text{ 和 } \left[\frac{1}{2n+1}+\frac{i}{n}, \frac{1}{2n+1}+i\right]$$

这样得到的区域 $\Omega$ 是单连通区域. 假如 $0 \leqslant y \leqslant 1$，则 $iy$ 是边界点，但不是简单的.

**14.18 定理** 设 $\Omega$ 是平面内一个有界单连通区域，并且设 $f$ 是 $\Omega$ 到 $U$ 上的保形映射.

(*a*) 如果 $\beta$ 是 $\Omega$ 的一个简单边界点，则 $f$ 有一个到 $\Omega \cup \{\beta\}$ 的连续开拓. 假如 $f$ 是这样的开拓，则 $|f(\beta)|=1$.

(*b*) 如果 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 是 $\Omega$ 的两个不同的简单边界点，并且 $f$ 如(*a*)一样被连续开拓到 $\Omega \cup \{\beta_1\} \cup \{\beta_2\}$，则 $f(\beta_1) \neq f(\beta_2)$.

**证明** 设 $g$ 是 $f$ 的逆，则 $g \in H(U)$，由定理 10.33，$g(U)=\Omega$，$g$ 是一一映射，且因为 $\Omega$ 有界，$g \in H^\infty$.

假设(*a*)不成立. 则在 $\Omega$ 内有序列 $\{\alpha_n\}$，满足 $\alpha_n \to \beta$，$f(\alpha_{2n}) \to w_1$，$f(\alpha_{2n+1}) \to w_2$，并且 $w_1 \neq w_2$. 按定义 14.16 作 $\gamma$，并且对 $0 \leqslant t < 1$ 记 $\Gamma(t)=f(\gamma(t))$. 对 $0<r<1$ 令 $K_r = g(\bar{D}(0;r))$. 则 $K_r$ 是 $\Omega$ 的紧子集. 因为当 $t \to 1$ 时，$\gamma(t) \to \beta$，于是存在一个 $t^* < 1$（依赖于 $r$），使得 $t^* < t < 1$ 时，$\gamma(t) \notin K_r$. 因此，当 $t^* < t < 1$ 时，$|\Gamma(t)| > r$. 这说明当 $t \to 1$ 时，$|\Gamma(t)| \to 1$. 因为 $\Gamma(t_{2n}) \to w_1$ 和 $\Gamma(t_{2n+1}) \to w_2$，我们同时得到 $|w_1| = |w_2| = 1$.

现在得知，其并是 $T-(\{w_1\} \cup \{w_2\})$ 的两段开弧 $J$ 中有一段具有如下性质：对于 $U$ 的每一条端点为 $J$ 上的点的半径交 $\Gamma$ 的值域于一个有一极限点在 $T$ 的点集. 注意，当 $0 \leqslant t < 1$ 时，$g(\Gamma(t)) = \gamma(t)$，并且因为 $g \in H^\infty$，$g$ 在 $T$ 上几乎处处有径向极限. 因为当 $t \to 1$ 时，$g(\Gamma(t)) \to \beta$，因此

$$\lim_{r\to 1} g(re^{it})=\beta \qquad (\text{a·e 于} J) \tag{1}$$

对 $g-\beta$ 应用定理 11.22,(1) 表明 $g$ 是常数. 但是 $g$ 在 $U$ 内是一一的,于是得到矛盾. 这样,$w_1=w_2$,即($a$)得证.

假设($b$)不成立. 我们以绝对值为 1 的适当常数乘 $f$,使得到 $\beta_1\neq\beta_2$. 但有 $f(\beta_1)=f(\beta_2)=-1$.

因为 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 都是 $\Omega$ 的简单边界点,于是存在曲线 $\gamma_i$,它具有参数区间[0,1],对 $i=1$ 及 2,有 $\gamma_i([0,1))\subset\Omega$,并且 $\gamma_i(1)=\beta_i$. 令 $\Gamma_i(t)=f(\gamma_i(t))$,则 $\Gamma_i([0,1))\subset U$,且 $\Gamma_1(1)=\Gamma_2(1)=-1$,因为在[0,1)上,$g(\Gamma_i(t))=\gamma_i(t)$,于是存在一个 $t^*<1$,使得

$$|g(\Gamma_1(t_1))-g(\Gamma_2(t_2))|>\frac{1}{2}|\beta_1-\beta_2| \tag{2}$$
$$(t^*<t_i<1, \qquad i=1,2)$$

并且存在一个正数 $\delta>0$,使得 $D(-1;\delta)$ 与 $\Gamma_1([0;t^*])$ 或 $\Gamma_2([0;t^2])$ 都不相交.

记 $A(\delta)=U\cap D(-1;\delta)$. 设 $0<r<\delta$;从(2)和 $\delta$ 的选法可以在 $\Gamma_i$ 的值域上找到点 $w_i$ 使 $|1+w_i|=r$,且

$$|g(w_1)-g(w_2))|>\frac{1}{2}|\beta_1-\beta_2| \tag{3}$$

但 $g(w_1)-g(w_2)$ 是 $g'$ 沿着位于 $U$ 内的以 $-1$ 为圆心的圆弧从 $w_2$ 到 $w_1$ 的积分. 因此

$$\frac{1}{2}|\beta_1-\beta_2|<\int_{-\eta}^{\eta}|g'(-1+re^{it})|r d\theta \qquad (0<r<\delta) \tag{4}$$

其中 $\eta=\eta(r)$ 是使 $-1+re^{i\theta}\in U$, $|\theta|<\eta$ 的最大数值. 于是 $\eta<\pi/2$,并且,若我们应用 Schwarz 不等式于(4),我们发现

$$\frac{|\beta_1-\beta_2|^2}{4\pi r}\leqslant r\int_{-\eta}^{\eta}|g'(-1+re^{i\theta})|^2 d\theta \qquad (0<r<\delta) \tag{5}$$

将(5)式的右边在$(0,\delta)$上对 $r$ 积分,其结果就是 $g(A(\delta))$的

面积．它是有限的，因为 $g(A(\delta))\subset\Omega$，而$\Omega$是有界的．但是，(5)式左边在$(0,\delta)$上的积分是$\infty$，除非 $\beta_1=\beta_2$.

这就证明了$(b)$.

**14.19 定理** 如果$\Omega$是平面内的有界单连通区域，并且如果$\Omega$的每一个边界点都是简单边界点，则每一个$\Omega$到$U$上的保形映射可扩展为$\overline{\Omega}$到$\overline{U}$上的同胚.

**证明** 设$f\in H(\Omega)$，$f(\Omega)=U$，且$f$是一一的．由定理14.18，我们可将$f$扩展为$\overline{\Omega}$到$\overline{U}$内的一个映射，使得当$\{\alpha_n\}$是$\Omega$内的收敛于$z$的一个序列时，$f(\alpha_n)\to f(z)$．若$\overline{\Omega}$内的序列$\{z_n\}$收敛于$z$，则存在点$\alpha_n\in\Omega$，满足$|\alpha_n-z_n|<1/n$及$|f(\alpha_n)-f(z_n)|<1/n$．这样，$\alpha_n\to z$，因此$f(\alpha_n)\to f(z)$．这就证明了$f(z_n)\to f(z)$.

我们现在已证明了$f$的开拓在$\overline{\Omega}$上是连续的．同样有$U\subset f(\overline{\Omega})\subset\overline{U}$．$\overline{\Omega}$的紧性蕴涵着$f(\overline{\Omega})$是紧的，因此$f(\overline{\Omega})=\overline{U}$.

定理14.18$(b)$证明$f$在$\overline{\Omega}$上是一一的．因为紧集的每一个连续一一映射有一连续逆映射([26]，定理4.17)，故定理得证.

**14.20 评注**

$(a)$ 前述定理有一个纯拓扑学的推论：如果平面有界单连通区域$\Omega$的每一个边界点都是简单边界点，则$\Omega$的边界是一条Jordan曲线，且$\overline{\Omega}$与$\overline{U}$同胚.

(根据定义，一条Jordan曲线就是单位圆周的同胚像.)

逆命题也是正确的，但是我们不打算证明它：若$\Omega$的边界是一条Jordan曲线，则$\Omega$的每一个边界点都是简单边界点.

$(b)$ 设$f$如在定理14.19中一样，$a$，$b$和$c$是$\Omega$的不同的边界点，并且$A$，$B$和$C$是$T$的不同的点．则有一个线性分式变换$\varphi$映三元序组$\{f(a),f(b),f(c)\}$为$\{A,B,C\}$；设$\{A,B,C\}$的定向与$\{f(a),f(b),f(c)\}$相同；则$\varphi(U)=U$，且函数$g=\varphi\circ f$是$\overline{\Omega}$到$\overline{U}$上的同胚，它在$\Omega$内全纯，并且映$\{a,b,c\}$为原先指定的$\{A,B,C\}$．从

14.3 节得知 $g$ 由这些要求唯一决定。

(*c*) 定理 14.19 和上面的注(*b*)都不难推广到 Riemann 球面 $S^2$ 内所有边界点都是简单边界点的单连通区域 $\Omega$ 上。若假定 $S^2-\Omega$ 有非空内部，这样，通过一个线性分式变换就可以使我们回到 $\Omega$ 是平面内一个有界区域的情况。类似地，例如，$U$ 可以用半平面来替换.

(*d*) 更一般地，若象在定理 14.19 一样，$f_1$ 和 $f_2$ 分别映 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 到 $U$ 上，则 $f=f_2^{-1}\circ f_1$ 是 $\overline{\Omega}_1$ 到 $\overline{\Omega}_2$ 上的同胚，它在 $\Omega_1$ 内是全纯的。

## 环域的保形映射

**14.21** 平面内任意两个单连通真子区域保形等价是 Riemann映射定理的一个推论，因为它们中每一个都与单位圆盘是保形等价的. 这是单连通区域的一个非常特殊的性质. 自然会问，是否可以推广到下一个最简单的情形，亦即，任意两个环域是否能保形等价？回答是否定的。

对于 $0<r<R$，记

(1) $$A(r,R)=\{z:r<|z|<R\}$$

是具有内半径 $r$ 和外半径 $R$ 的环域. 若 $\lambda>0$，映射 $z\to\lambda z$ 将 $A(r,R)$ 映到 $A(\lambda r,\lambda R)$ 上. 因此，当 $R/r=R_1/r_1$ 时，$A(r,R)$ 和 $A(r_1,R_1)$ 是保形等价的. 令人惊奇的是，这个充分条件同时也是必要的；这样，在环域间对于每个大于 1 的实数都对应有一个不同的保形映射类型.

**14.22 定理** $A(r_1,R_1)$ 和 $A(r_2,R_2)$ 是保形等价的，当且仅当 $R_1/r_1=R_2/r_2$.

**证明** 不失一般性，假定 $r_1=r_2=1$. 记

(1) $$A_1=A(1,R_1),\quad A_2=A(1,R_2)$$

并假定存在 $f\in H(A_1)$，使得 $f$ 是一一的，且 $f(A_1)=A_2$. 设 $K$ 是圆心在 0，半径 $r=\sqrt{R_2}$ 的圆周. 因为 $f^{-1}$: $A_2\to A_1$ 也是全纯的，故 $f^{-1}(K)$ 是紧的. 因此，对某个 $\varepsilon>0$ 有

$$A(1,1+\varepsilon)\cap f^{-1}(K)=\varnothing \tag{2}$$

于是，$V=f(A(1,1+\varepsilon))$ 是 $A_2$ 的一个与 $K$ 不相交的连通子集. 因此，$V\subset A(1,r)$ 或 $V\subset A(r,R_2)$. 在后一种情形，用 $R_2/f$ 代替 $f$. 这样我们总可以假定 $V\subset A(1,r)$. 若 $1<|z_n|<1+\varepsilon$，并且 $|z_n|\to 1$，则 $f(z_n)\in V$，并且 $\{f(z_n)\}$ 在 $A_2$ 内无极限点(因为 $f^{-1}$ 连续)；于是 $|f(z_n)|\to 1$. 同样可知，当 $|z_n|\to R_1$ 时，$|f(z_n)|\to R_2$.

现在定义

$$\alpha=\frac{\log R_2}{\log R_1} \tag{3}$$

及

$$u(z)=2\log|f(z)|-2\alpha\log|z| \qquad (z\in A_1) \tag{4}$$

设 $\partial$ 为 Cauchy-Riemann 算子. 因为 $\partial\bar{f}=0$ 及 $\partial f=f'$，由链式法则得

$$\partial(2\log|f|)=\partial(\log(\bar{f}f)=f'/f \tag{5}$$

因此

$$(\partial u)(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{\alpha}{z} \qquad (z\in A_1) \tag{6}$$

于是 $u$ 在 $A_1$ 内是调和函数，由本证明的第一段，可扩展为 $\bar{A}_1$ 上的连续函数，使之在 $A_1$ 的边界上取零值. 因为不是常数的调和函数没有局部最大值或局部最小值，我们推断出 $u=0$，于是

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\alpha}{z} \qquad (z\in A_1) \tag{7}$$

设 $\gamma(t)=\sqrt{R_1}e^{it}(-\pi\leqslant t\leqslant\pi)$；设 $\Gamma=f\circ\gamma$. 象定理 10.43 中的证明一样，(7)式给出

(8) $$\alpha=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\mathrm{Ind}_{\Gamma}(0)$$

于是 $\alpha$ 是一个整数．由(3)式，$\alpha>0$，由(7)式，$z^{-\alpha}f(z)$ 在 $A_1$ 的导数为 0．于是 $f(z)=cz^{\alpha}$．因为 $f$ 在 $A_1$ 内是一一的，$\alpha=1$．因此 $R_2=R_1$．

## 习　题

1　求出复数 $a,b,c$ 和 $d$，使线性分式变换：$z\to(az+b)/(cz+d)$ 将上半平面映到上半平面所应当满足的充分必要条件．

2　定理 11.17 假设的简化形式是 $\Omega\subset\Pi^+$，$L$ 在实轴上，并且当 $z\to L$ 时，$\mathrm{Im}f(z)\to 0$．试在下述假设之下，利用这个定理建立类似的反射定理：

(a)　$\Omega\subset\Pi^+$，$L$ 在实轴上，当 $z\to L$ 时，$|f(z)|\to 1$．

(b)　$\Omega\subset U$，$L\subset T$，当 $z\to L$ 时，$|f(z)|\to 1$．

(c)　$\Omega\subset U$，$L\subset T$，当 $z\to L$ 时，$\mathrm{Im}f(z)\to 0$．

在(b)的情况下，若 $f$ 有一零点 $a\in\Omega$，试证明 $f$ 的开拓在 $1/\bar{a}$ 有一个极点．在(a)和(b)的情形下有什么类似结论？

3*　设 $R$ 是一个有理函数，使得当 $|z|=1$ 时，$|R(z)|=1$．证明

$$R(z)=cz^m\prod_{n=1}^{k}\frac{z-\alpha_n}{1-\bar{\alpha}_n z}$$

其中 $c$ 为常数，$m$ 是整数，并且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是满足 $\alpha_n\neq 0$ 和 $|\alpha_n|\neq 1$ 的复数．注意上述每一个因式当 $|z|=1$ 时绝对值为 1．

4　试作出在 $T$ 上取正值的有理函数的类似描述．

提示：这个函数在 $U$ 内必定有相同的零点数和极点数．考虑形如

$$\frac{(z-\alpha)(1-\bar{\alpha}z)}{(z-\beta)(1-\bar{\beta}z)}$$

的因式的乘积，其中 $|\alpha|<1$ 和 $|\beta|<1$．

5　设 $f$ 是三角多项式

$$f(\theta)=\sum_{k=-n}^{n}a_k e^{ik\theta}$$

并且对所有实的 $\theta$，$f(\theta)>0$．证明存在一个多项式 $P(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n$，使得

$$f(\theta)=|P(e^{i\theta})|^2 \qquad (\theta\text{ 是实数})$$

提示：应用习题 4 于有理函数 $\Sigma a_k z^k$. 如果我们在假设中把 $f(\theta)>0$ 换为 $f(\theta)\geqslant 0$, 结果是否仍然真确？

6 求出映射 $\varphi_\alpha$(见定义 12.3)的不动点. 是否存在直线使 $\varphi_\alpha$ 映这条直线到它自身？

7 设映射

$$f_\alpha(z)=\frac{z}{1+\alpha z^2}$$

求出所有复数 $\alpha$, 使 $f_\alpha$ 在 $U$ 内是一一的. 对所有这些情况描述 $f_\alpha(U)$.

8 设 $f(z)=z+(1/z)$, 试描绘出以 0 为中心的圆和过 0 的射线在 $f$ 之下映成的椭圆和双曲线族.

9 (a) 设 $\Omega=\{z:-1<\mathrm{Re}\,z<1\}$, 求出一个 $\Omega$ 到 $U$ 上的、并满足 $f(0)=0$ 和 $f'(0)>0$ 的一一保形映射 $f$ 的明显公式. 试计算 $f'(0)$.

(b) 注意, (a) 中所构造的函数的反函数的实部在 $U$ 中有界, 而虚部无界. 试证明存在一个在 $\bar{U}$ 上连续的实函数 $u$, 它在 $U$ 内调和, 而它的调和共轭函数 $v$ 则在 $U$ 内无界. ($v$ 是使 $u+iv$ 在 $U$ 内全纯的函数; 由预先给定 $v(0)=0$, 我们可以唯一地决定 $v$.)

(c) 设 $g\in H(U)$, 在 $U$ 内 $|\mathrm{Re}\,g|<1$, 并且 $g(0)=0$, 证明

$$|g(re^{i\theta})|\leqslant\frac{2}{\pi}\log\frac{1+r}{1-r}$$

提示：参看习题 10.

(d) 设 $\Omega$ 是象在定理 12.9 中的带域. 固定 $\Omega$ 中的一点 $\alpha+i\beta$. 设 $h$ 是 $\Omega$ 到 $\Omega$ 上的保形一一映射, 并且使 $\alpha+i\beta$ 映为 0. 证明

$$|h'(\alpha+i\beta)|=1/\cos\beta$$

10 设 $f$ 和 $g$ 都是 $U$ 到 $\Omega$ 内的全纯函数, 并且 $f$ 是一一的, $f(U)=\Omega$, 及 $f(0)=g(0)$. 证明

$$g(D(0;r))\subset f(D(0;r)) \qquad (0<r<1)$$

11 设 $\Omega$ 是单位圆盘 $U$ 的上半部分. 试求保形映射 $f$, 将 $\Omega$ 映射到 $U$ 上, 并且将 $\{-1,0,1\}$ 映为 $\{-1,-i,1\}$. 试求出 $z\in\Omega$ 使 $f(z)=0$. 并求 $f(i/2)$. 提示：$f=\phi\circ s\circ\psi$, 其中 $\phi$ 和 $\psi$ 是线性分式变换, 而 $s(\lambda)=\lambda^2$.

12 设 $\Omega$ 是凸区域, $f\in H(\Omega)$, 并且对所有 $z\in\Omega$, $\mathrm{Re}\,f'(z)>0$. 证明 $f$ 在 $\Omega$ 内是一一映射. 若将假设减弱成 $\mathrm{Re}\,f'(z)\geqslant 0$ 时, 结果是否改变？(除掉 $f$

为常数的平凡的情况）．试举出例子说明不能用“单连通”代替“凸”．

13 设$\Omega$是区域，$f_n \in H(\Omega)$，$n=1, 2, 3, \cdots$，每一个$f_n$都是$\Omega$内的一一映射，并且在$\Omega$的紧子集上$f_n$一致收敛于$f$．证明$f$在$\Omega$内或者是常数，或者是一一映射．试说明这两种情况都可以出现．

14 设$\Omega=\{x+iy: -1<y<1\}$，$f \in H(\Omega)$，$|f|<1$，并且当$x \to \infty$时，$f(x) \to 0$．证明

$$\lim_{x \to \infty} f(x+iy)=0 \qquad (-1<y<1)$$

并且当$y$限制在区间$[-\alpha, \alpha]$，$\alpha<1$时，$f$一致地收敛于这个极限．提示：考虑序列$\{f_n\}$，其中$f_n(z)=z+n$定义在正方形域：$|x|<1$，$|y|<1$内．

一个函数$g \in H^\infty$在靠近使$g$的径向极限存在的$U$的边界点时，关于$g$的性态，这个定理能告诉我们一些什么？

15 设$\mathscr{F}$是所有满足$\mathrm{Re} f>0$和$f(0)=1$的函数$f \in H(\Omega)$的族．证明$\mathscr{F}$是正规族．条件“$f(0)=1$”能否去掉？能否将它改成“$f(0) \leqslant 1$”？

16 设$\mathscr{F}$是满足

$$\iint_U |f(z)|^2 dx dy \leqslant 1$$

的所有$f \in H(U)$的类，问$\mathscr{F}$是否是正规族？

17 设$\Omega$是区域，$f_n \in H(\Omega)$，$n=1, 2, 3, \cdots$，在$\Omega$的紧子集上$f_n$一致趋于$f$，并且在$\Omega$内是一一映射．试问是否能得出对于每个紧集$K \subset \Omega$，都对应着一个整数$N(K)$，使当$n>N(K)$时，$f_n$在$K$上是一一映射？给以证明或举出反例．

18 设$\Omega$是单连通区域，$z_0 \in \Omega$，并且$f$和$g$是$\Omega$到$U$上的一一保形映射，将$z_0$映射为0．问$f$和$g$之间有什么关系？若对于某个$a \in U$，$f(z_0)=g(z_0)=a$，试回答同样问题．

19 试求一个由$U$到$U$上的同胚，使它不能扩展为在$\overline{U}$上的连续函数．

20 若$f \in \mathscr{S}$（定义见14.10），$n$是一正整数，证明存在一个函数$g \in \mathscr{S}$，使得对于所有$z \in U$，$g^n(z)=f(z^n)$．

21 试求所有$f \in \mathscr{S}$满足：(a) $f(U) \supset U$，(b) $f(U) \supset \overline{U}$，(c) $|a_2|=2$．

22 设$f$是一一保形映射，它将$\Omega$映射到一个以0为中心的正方形上，并且$f(0)=0$．证明$f(iz)=if(z)$．若$f(z)=\Sigma c_n z^n$，证明$c_n=0$，除非$n-1$是4的倍数．推广：将正方形换为具有旋转对称性的单连通区域．

23 设$\Omega$是有界区域，它的边界由两个不相交的圆周组成．试证存在一

个一一保形映射，它将$\Omega$映射到环域.（对于每一个使$S^2-\Omega$恰好有两个分支的，每一分支包含多于一点的区域$\Omega$，这结论仍然是真的，但是这个一般情形比较难于处理.）

24 试完成定理14.22的下述证明的细节. 设$1<R_2<R_1$，并且$f$是将$A(1,R_1)$映到$A(1,R_2)$上的一一保形映射. 定义$f_1=f$和$f_n=f\circ f_{n-1}$. 于是存在$\{f_n\}$的子序列，在$A(1,R_1)$的紧子集上一致收敛于一个函数$g$. 试证明$g$的值域不包含任何非空开集(例如用三圆定理). 再者，证明在圆$\{z:|z|^2=R_1\}$上$g$不是常数. 因此，$f$不能存在.

25 下面是定理14.22的又一种证明. 如果$f$如在14.22所设. 重复运用反射原理将$f$扩充为整函数，使得当$|z|=1$时，$|f(z)|=1$. 这就可以推出$f(z)=\alpha z^n$，其中$|\alpha|=1$，而$n$是一整数，试完成这些细节.

26 重复运用定理14.8证明中的第二步，可以得出Riemann映射定理的一个证明(由Koebe作出)，它在下述意义上是一种构造性的证明，即它并不要求正规族的理论，从而不依赖于某种未予确定的子序列的存在性. 对于这证法的最后一步，假设$\Omega$有定理13.11中$(h)$的性质是有好处的. 因此，任何与$\Omega$保形等价的区域都满足$(h)$. 回忆一下，$(h)$显然推出$(i)$.

根据定理14.8中的第一步，不失一般性，可以假设$0\in\Omega$，$\Omega\subset U$，并且$\Omega\neq U$. 设$\Omega=\Omega_0$. 这个证明在于构造区域$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\cdots$和函数$f_1,f_2,f_3,\cdots$，使$f_n(\Omega_{n+1})=\Omega_n$，且函数$f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_2\circ f_1$收敛于一个$\Omega$到$U$上的保形映射.

试完成下述提纲的各个细节.

$(a)$设$\Omega_{n-1}$已造出，令$r_n$是满足$D(0;r_n)\subset\Omega_{n-1}$的最大数. 设$\alpha_n$是$\Omega_{n-1}$的边界点，$|\alpha_n|=r_n$，选取$\beta_n$使$\beta_n^2=-\alpha_n$，并设

$$F_n=\varphi_{-\alpha_n}\circ s\circ\varphi_{-\beta_n}$$

(记号与定理14.8证明中的相同). 试证$F_n$在$\Omega_{n-1}$内有全纯的反函数$G_n$，并设$f_n=\lambda_n G_n$，其中$\lambda_n=|c|/c$和$c=G_n'(0)$.（这个$f_n$就是与$\Omega_{n-1}$相对应的Koebe映射. 注意，$f_n$是初等函数，它只包含两个线性分式变换和一个平方根.）

$(b)$计算$f_n'(0)=(1+r_n)/2\sqrt{r_n}>1$.

$(c)$设$\psi_0(z)=z$和$\psi_n(z)=f_n(\psi_{n-1}(z))$. 证明$\psi_n$是将$\Omega$映射到一区域$\Omega_n\subset U$上的一一映射，$\{\psi_n'(0)\}$有界，

$$\psi_n'(0)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1+r_k}{2\sqrt{r_k}}$$

因而当 $n\to\infty$ 时，$r_n\to 1$.

(*d*) 对$z\in\Omega$，记 $\psi_n(z)=zh_n(z)$. 证明$|h_n|<|h_{n+1}|$，应用 Harnack 定理和第十一章习题 22 于$\{\log h_n\}$以证明$\{\psi_n\}$在$\Omega$的紧子集上一致收敛，并证明$\lim\psi_n$是$\Omega$到$U$上的一一映射.

27 证明$\sum_{n=1}^{\infty}(1-r_n)^2<\infty$，其中$\{r_n\}$是习题26已出现过的序列.

提示:

$$\frac{1+r}{2\sqrt{r}}=1+\frac{(1-\sqrt{r})^2}{2\sqrt{r}}$$

28 假若在习题 26 中我们选取 $\alpha_n\in U-\Omega_{n-1}$，不必强调$|\alpha_n|=r_n$，例如，只要坚持

$$|\alpha_n|\leqslant\frac{1+r_n}{2}$$

这样产生的序列$\{\psi_n\}$是否仍收敛于所要求的映射函数?

29 设$\Omega$是有界区域，$a\in\Omega$，$f\in H(\Omega)$，$f(\Omega)\subset\Omega$，并且 $f(a)=a$.

(*a*) 令 $f_1=f$ 及 $f_n=f\circ f_{n-1}$，试计算 $f_n'(a)$，并且推出$|f'(a)|\leqslant 1$.

(*b*) 如果 $f'(a)=1$，证明对所有 $z\in\Omega$，$f(z)=z$. 提示: 若

$$f(z)=z+c_m(z-a)^m+\cdots$$

计算$f_n(z)$展开式中$(z-a)^m$的系数.

(*c*) 若$|f'(a)|=1$. 试证 $f$ 是一一映射，并且 $f(\Omega)=\Omega$.

提示: 如果 $\gamma=f'(a)$，于是存在整数 $n_k\to\infty$，使得 $\gamma^{n_k}\to 1$ 和 $f_{n_k}\to g$. 则 $g'(a)=1$，$g(\Omega)\subset U$ (由第十章习题 20). 因此由(*b*)得 $g(z)=z$. 利用 $g$ 作出关于 $f$ 所需要的结论.

30 设 $\mathcal{A}$ 是由所有线性分式变换组成的集.

若$\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$是不相同复数的四元序组，它的交比定义为

$$[\alpha,\beta,\gamma,\delta]=\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)}$$

若其中有一个为$\infty$，定义明显地按连续性方式修改. 同样应用于当$\alpha$与$\beta$(或$\gamma$，$\delta$)相同的情形.

(*a*) 若 $\varphi(z)=[z,\alpha,\beta,\gamma]$，试证 $\varphi\in\mathcal{A}$，并且 $\varphi$ 映$\{\alpha,\beta,\gamma\}$为$\{0,1,\infty\}$.

(*b*) 证明：方程$[w, a, b, c]=[z, \alpha, \beta, \gamma]$可以按 $w=\varphi(z)$ 的形式解出，这时，$\varphi\in\Lambda$，并将$\{\alpha, \beta, \gamma\}$映为$\{a, b, c\}$.

(*c*) 若 $\varphi\in\Lambda$，证明

$$[\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \varphi(\gamma), \varphi(\delta)]=[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$$

(*d*) 试证当且仅当这四点同在一圆周或直线上时$[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$是实数.

(*e*) 称 $z$ 和 $z^*$ 两个点关于经过 $\alpha, \beta, \gamma$ 的圆周（或直线）$C$ 是对称的，如果$[z^*, \alpha, \beta, \gamma]$是$[z, \alpha, \beta, \gamma]$的复共轭数. 若$C$是单位圆周，试求 $z$ 和 $z^*$ 之间的简单几何关系. 同样讨论$C$是直线的情况.

(*f*) 设 $z$ 和 $z^*$ 关于$C$对称. 证明对于每一个 $\varphi\in\Lambda$，$\varphi(z)$和$\varphi(z^*)$关于$\varphi(C)$对称.

31　(*a*) 证明 $\Lambda$（见习题 30）以复合作为群的运算时是一个群，就是说，若 $\varphi\in\Lambda$ 和 $\psi\in\Lambda$，证明 $\varphi\circ\psi\in\Lambda$，并且 $\varphi$ 的反函数 $\varphi^{-1}\in\Lambda$. 证明 $\Lambda$ 不是交换的.

(*b*) 试证 $\Lambda$ 中每一元素（不是恒等映射）在 $S^2$ 有一个或两个不动点. [$\varphi$ 的不动点 $\alpha$ 就是使 $\varphi(\alpha)=\alpha$ 的点].

(*c*) 映射 $\varphi$ 和 $\varphi_1\in\Lambda$ 称为共轭，如果存在一个 $\psi\in\Lambda$，使 $\varphi_1=\psi^{-1}\circ\varphi\circ\psi$. 证明每一个 $\varphi\in\Lambda$，$\varphi$ 有唯一不动点，则 $\varphi$ 与映射 $z\to z+1$ 共轭. 证明每一个 $\varphi\in\Lambda$，$\varphi$ 有两个不同的不动点，则 $\varphi$ 与映射 $z\to\alpha z$ 共轭，其中 $\alpha$ 是复数；$\alpha$ 能由$\varphi$决定到何种程度？

(*d*) 设 $\alpha$ 是一复数. 证明对每一个以 $\alpha$ 为其唯一不动点的 $\varphi\in\Lambda$，对应有一个 $\beta$，使得

$$\frac{1}{\varphi(z)-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+\beta$$

设 $G_\alpha$ 是所有这些 $\varphi$ 加上恒等变换构成的集. 试证明 $G_\alpha$ 是 $\Lambda$ 的子群，并且 $G_\alpha$ 与所有复数构成的加法群同构.

(*e*) 设$\alpha$和$\beta$是两个不同的复数. 设 $G_{\alpha,\beta}$ 是所有以 $\alpha$ 和 $\beta$ 为不动点的 $\varphi\in\Lambda$ 的集. 证明每一个 $\varphi\in G_{\alpha,\beta}$ 由

$$\frac{\varphi(z)-\alpha}{\varphi(z)-\beta}=\gamma\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

给出，其中 $\gamma$ 是复数. 并证明 $G_{\alpha,\beta}$ 是 $\Lambda$ 的子群，且 $G_{\alpha,\beta}$ 与所有非零复数构成的乘法群同构.

(*f*) $\varphi$ 如在(*d*)（或(*e*)）中所设，对哪些圆周 $C$ 有 $\varphi(C)=C$？这个回答应当由参数 $\alpha, \beta$ 及 $\gamma$ 确定下来.

# 第十五章　全纯函数的零点

## 无穷乘积

**15.1**　关于区域$\Omega$内不是常数的全纯函数$f$的零点集$Z(f)$，迄今我们只见到一个结果，即$Z(f)$在$\Omega$内没有极限点．不久我们将会看到，如果没有其它条件加之于$f$，关于$Z(f)$所能说的也就只有这一点．因为 Weierstrass 定理（定理 15.11）断言每一个$A\subset\Omega$，当$A$在$\Omega$内没有极限点时，一定有一个$f\in H(\Omega)$，使$A$就是$Z(f)$．如果$A=\{\alpha_n\}$，构造$f$的自然方式是选取函数$f_n\in H(\Omega)$，使$f_n$只在$\alpha_n$有一个零点，并且考虑乘积

$$p_n=f_1f_2\cdots f_n$$

当$n\to\infty$时的极限．我们必须安排得使$\{p_n\}$收敛于某个$f\in H(\Omega)$，并且这个极限函数$f$除在指定的各点$\alpha_n$外不为零．因此，从研究无穷乘积某些一般性质开始是适宜的．

**15.2**　**定义**　设$\{u_n\}$是一个复数序列，

$$p_n=(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n) \tag{1}$$

并且$p=\lim\limits_{n\to\infty}p_n$存在，则我们记

$$p=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) \tag{2}$$

$p_n$是*无穷乘积*(2)的*部分乘积*．若序列$\{p_n\}$收敛，我们就说无穷乘积(2)收敛．

在研究无穷级数$\Sigma a_n$时，重要的是$a_n$是否迅速趋于0．类似地，在研究无穷乘积时，我们感兴趣的是这些因式是否接近于1．

这说明当$u_n$接近于0时，上述记号：$1+u_n$是接近于1的。

**15.3 引理** 如果$u_1,\cdots,u_N$都是复数，并且

(1) $$p_N=\prod_{n=1}^{N}(1+u_n),\qquad p_N^*=\prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|)$$

则

(2) $$p_N^*\leqslant\exp(|u_1|+\cdots+|u_N|)$$

且

(3) $$|p_N-1|\leqslant p_N^*-1$$

**证明** 对于$x\geqslant0$，不等式$1+x\leqslant e^x$可以由$e^x$的幂级数展开直接得到。将$x$换为$|u_1|,\cdots,|u_N|$，然后将所得的各不等式相乘，便得出不等式(2)。对于$N=1$，(3)式是显然的。一般情况可由归纳法得出。对$k=1,\cdots,N-1$，

$$p_{k+1}-1=p_k(1+u_{k+1})-1=(p_k-1)(1+u_{k+1})+u_{k+1}$$

因此，如果用$k$代替$N$时(3)式成立。则也有

$$|p_{k+1}-1|\leqslant(p_k^*-1)(1+|u_{k+1}|)+|u_{k+1}|=p_{k+1}^*-1$$

**15.4 定理** 设$\{u_n\}$是集$S$上的有界复函数序列，使得$\Sigma|u_n(s)|$在$S$上一致收敛，则乘积

(1) $$f(s)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s))$$

在$S$上一致收敛，并且在某个$s_0\in S$处，当且仅当对于某个$n$，$u_n(s_0)=-1$时，$f(s_0)=0$。

再者，如果$\{n_1,n_2,n_3,\cdots\}$是$\{1,2,3,\cdots\}$的任意一个置换，则我们仍有

(2) $$f(s)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_{n_k}(s))\qquad(s\in S)$$

**证明** 由假设可推出$\Sigma|u_n(s)|$在$S$上是有界的，并且若记$p_N$

为(1)的前$N$项部分乘积，我们从引理 15.3 知道存在常数 $C<\infty$，对于全体$N$和全体 $s$ 有$|p_N(s)|\leqslant C$.

选取 $\varepsilon$，$0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. 于是存在 $N_0$ 满足

$$\sum_{n=N_0}^{\infty}|u_n(s)|<\varepsilon \qquad (s\in S) \tag{3}$$

设$\{n_1,n_2,n_3,\cdots\}$是$\{1,2,3,\cdots\}$的一个置换. 如果 $N\geqslant N_0$, $M$足够大，使得

$$\{1,2,\cdots,N\}\subset\{n_1,n_2,\cdots n_M\} \tag{4}$$

并且，如果 $q_M(s)$表示无穷乘积(2)的第$M$个部分乘积，则

$$q_M-p_N=p_N\{\Pi(1+u_{n_k})-1\} \tag{5}$$

在(5)中出现的 $n_k$ 是互不相同的，并且大于 $N_0$, 因此由(3)和引理 15.3 证得

$$|q_M-p_N|\leqslant|p_N|(e^{\varepsilon}-1)\leqslant 2|p_N|\varepsilon\leqslant 2C\varepsilon \tag{6}$$

如果 $n_k=k(k=1,2,3,\cdots)$, 则 $q_M=p_M$, 并且(6)式表明$\{p_N\}$一致收敛于一个极限函数 $f$. (6)式也表明

$$|p_M-p_{N_0}|\leqslant 2|p_{N_0}|\varepsilon \qquad (M>N_0) \tag{7}$$

于是$|p_M|\geqslant(1-2\varepsilon)|p_{N_0}|$. 因此

$$|f(s)|\geqslant(1-2\varepsilon)|p_{N_0}(s)| \qquad (s\in S) \tag{8}$$

这就证明当且仅当 $p_{N_0}(s)=0$ 时 $f(s)=0$.

最后，(6)式也表明$\{q_M\}$与$\{p_N\}$收敛于相同的极限.

**15.5 定理** 设$0\leqslant u_n<1$，则当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}u_n<\infty$时，$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)>0$

**证明** 如果$p_N=(1-u_1)\cdots(1-u_N)$，则$p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_N>0$，因此 $p=\lim p_N$ 存在. 若$\Sigma u_n<\infty$，定理15.4蕴涵着$p>0$. 另一方面，

$$p \leqslant p_N = \prod_{n=1}^{N}(1-u_n) \leqslant \exp\{-u_1-u_2-\cdots-u_N\}$$

并且，若 $\Sigma u_n=\infty$，则当 $n\to\infty$ 时，上面表达式趋于 0.

我们将经常运用定理 15.4 的下一推论.

**15.6 定理** 设对于 $n=1,2,3,\cdots$，$f_n\in H(\Omega)$，在 $\Omega$ 的任何分支上没有一个 $f_n$ 恒等于 0，并且

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}|1-f_n(z)|$$

在 $\Omega$ 的紧子集上一致收敛，则乘积

$$(2) \qquad f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}f_n(z)$$

在 $\Omega$ 的紧子集上一致收敛. 因此 $f\in H(\Omega)$.

再者，我们有

$$(3) \qquad m(f;z)=\sum_{n=1}^{\infty}m(f_n;z) \qquad (z\in\Omega)$$

其中 $m(f;z)$ 定义为 $f$ 在 $z$ 的零点的重数. [如果 $f(z)\neq 0$，则 $m(f;z)=0$.]

**证明** 第一部分由定理 15.4 立即得到. 对于第二部分，由(1)式可以观察到对每一个 $z\in\Omega$ 存在一个邻域 $V$，在 $V$ 内至多有有限个 $f_n$ 有零点. 首先取出这些因子. 由定理 15.4，余下的乘积在 $V$ 内没有零点，而这个性质给出了(3)式. 附带说一句，我们也可以看出对于任何给定的 $z\in\Omega$，级数(3)至多有限项为正.

## Weierstrass 因式分解定理

**15.7 定义** 设 $E_0(z)=1-z$，并且对于 $p=1,2,3,\cdots$，

$$E_p(z)=(1-z)\exp\left\{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\right\}$$

这些由 Weierstrass 引进的函数有时称为基本因式. 它们只在 $z=1$ 有零点. 它们所以有用是有赖于这样的事实: 虽然 $E_p(1)=0$, 但是当 $|z|<1$ 和 $p$ 足够大时, 它们靠近 1.

**15.8 引理** 对于 $|z|<1$ 和 $p=0,1,2,\cdots$, 有

$$|1-E_p(z)|\leqslant|z|^{p+1}$$

**证明** 当 $p=0$ 时这显然成立. 当 $p\geqslant1$ 时, 直接计算得到

$$-E_p'(z)=z^p\exp\left\{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\right\}$$

因此, $-E_p'(z)$ 在 $z=0$ 有 $p$ 阶零点, 并且 $-E_p'$ 按 $z$ 的幂级数展开式有非负的实系数. 因为

$$1-E_p(z)=-\int_{[0,z]}E_p'(w)dw$$

$1-E_p$ 在 $z=0$ 有 $p+1$ 阶零点, 并且如果

$$\varphi(z)=\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$$

则 $\varphi(z)=\sum a_n z^n$, 其中所有 $a_n\geqslant0$. 因此若 $|z|\leqslant1$, 则 $|\varphi(z)|\leqslant\varphi(1)=1$. 这就给出了引理的论断.

**15.9 定理** 设 $\{z_n\}$ 是复数序列, $z_n\neq0$, 并且当 $n\to\infty$ 时, $|z_n|\to\infty$. 如果 $\{p_n\}$ 是非负整数序列, 使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}<\infty \tag{1}$$

对每一个正数 $r$ (其中 $r_n=|z_n|$) 成立, 则无穷乘积

$$P(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{2}$$

定义一个整函数 $P$. $P$ 在每个 $z_n$ 有零点, 并且在平面内没有其它

零点。

更确切地说，如果$\alpha$在序列$\{z_n\}$中出现$m$次，则$P$在$\alpha$有$m$阶零点。

例如，若$p_n=n-1$，则条件(1)总是能满足的。

**证明** 对于每个$r$，除开有限个$n$外，$r_n>2r$，因此对这些$n$，$r/r_n<\frac{1}{2}$。令$1+p_n=n$，则(1)式成立。

现在固定$r$。如果$|z|\leqslant r$，引理15.8表明

$$\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|\leqslant\left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n}\leqslant\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}$$

当$r_n\geqslant r$时成立。但这对除开有限个$n$之外是满足的。现在从(1)式可以得到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$$

在平面内紧集上一致收敛，并由定理15.6得出所求的结论。

注：对于某些序列$\{r_n\}$，(1)式当$\{p_n\}$是常数序列时也能成立。使这个常数取得尽可能小是有趣的：所得到的函数(2)因此被称为对应于$\{z_n\}$的典范积。例如，如果$\Sigma(1/r_n)<\infty$，我们取$p_n=0$，即典范积仅仅是

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)$$

如果$\Sigma 1/r_n=\infty$，但$\Sigma 1/r_n^2<\infty$，则典范积是

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}$$

典范积在研究有限阶整函数时是很有趣的.（定义见习题2）.

我们现在叙述Weierstrass因式分解定理.

**15.10 定理** 设 $f$ 是整函数，$f(0)\neq 0$，并且设 $z_1, z_2, z_3, \cdots$ 是 $f$ 的零点，并按照它们的重数列出. 则存在一个整函数 $g$ 和一个非负整数序列 $\{p_n\}$，使

$$(1) \qquad f(z)=e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

注：(*a*) 如果 $f$ 在 $z=0$ 有 $k$ 阶零点，那么前述结论可应用于 $f(z)/z^k$. (*b*) 因式分解 (1) 并不是唯一的. 一个唯一的因式分解可以对应于其零点满足使典范积收敛所需条件的那些 $f$.

**证明** 设 $P$ 是定理 15.9 中由 $f$ 的零点构成的乘积，则 $f/P$ 在平面内只有可去奇点，因此是(或扩展为)整函数. 同样，$f/P$ 没有零点，又因为平面是单连通区域，故 $f/P=e^g$，$g$ 是整函数.

定理 15.9 的证明容易应用于任意的开集：

**15.11 定理** 设 $\Omega$ 是 $S^2$ 内的开集，$\Omega\neq S^2$. 假设 $A\subset\Omega$，并且 $A$ 在 $\Omega$ 内无极限点，对于每个 $\alpha\in A$ 对应有一个正整数 $m(\alpha)$. 则存在一个函数 $f\in H(\Omega)$，其所有的零点都在 $A$ 内，并且在每个 $\alpha\in A$，$f$ 有 $m(\alpha)$ 阶零点.

**证明** 为了使讨论简化同时又不失一般性，假设 $\infty\in\Omega$，但 $\infty\notin A$. (若非如此，通过一个线性分式变换就可化为这种情况). 则 $S^2-\Omega$ 是平面的一个非空紧子集，并且 $\infty$ 不是 $A$ 的极限点.

如果 $A$ 是有限的，则我们可取 $f$ 为有理函数.

如果 $A$ 是无限的，则 $A$ 是可数的(否则 $A$ 在 $\Omega$ 内有极限点). 设 $\{\alpha_n\}$ 是 $A$ 内的序列，并且在序列中每个 $\alpha\in A$ 都刚好出现 $m(\alpha)$ 次. 每个 $\alpha_n$ 对应一点 $\beta_n\in S^2-\Omega$ 使得 $|\beta_n-\alpha_n|\leqslant|\beta-\alpha_n|$ 对所有 $\beta\in S^2-\Omega$ 成立. 因为 $S^2-\Omega$ 是紧集，这是可能的. 于是当 $n\to\infty$ 时，

$$|\beta_n-\alpha_n|\to 0$$

否则 $A$ 就会有一个极限点在 $\Omega$ 内. 我们断言

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)$$

具有所需的性质.

记 $r_n=2|\alpha_n-\beta_n|$. 设$K$是$\Omega$的紧子集. 因为 $r_n\to 0$, 于是存在$N$,对所有 $z\in K$ 和所有 $n\geqslant N$, $|z-\beta_n|>r_n$. 因此,

$$\left|\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

由引理 15.8,它蕴涵着

$$\left|1-E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)\right|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\qquad(z\in K, n\geqslant N)$$

并由定理 15.6,这就再次完成了证明.

作为一个推论, 我们现在得到亚纯函数的一个特征(见定义 10.4):

**15.12 定理** 每一个定义在开集$\Omega$内的亚纯函数是$\Omega$内两个全纯函数的商.

逆定理是很明显的: 如果 $g\in H(\Omega)$, $h\in H(\Omega)$, 且 $h$ 在$\Omega$的任何分支内不恒等于 0,则 $g/h$ 在$\Omega$内是亚纯的.

**证明** 假设 $f$ 在$\Omega$内亚纯;设$A$是 $f$ 在$\Omega$内所有极点的集;并且对每个 $\alpha\in A$, 设 $m(\alpha)$是 $f$ 在极点 $\alpha$ 的阶. 由定理 15.11, 存在一个$h\in H(\Omega)$,使 $h$ 在每一个 $\alpha\in A$ 有 $m(\alpha)$重零点,并且 $h$ 没有其它零点. 记 $g=fh$. $g$ 在 $A$ 的奇点是可去奇点, 因此我们可以扩展 $g$, 使 $g\in H(\Omega)$. 显然,在$\Omega-A$ 内 $f=g/h$.

## 一个插值问题

Mittag-Leffler 定理和 Weierstrass 定理 15.11 结合起来可以解决下列问题: 我们是否可以任意取一个在$\Omega$内没有极限点的集 $A\subset\Omega$,并且找到一个函数 $f\in H(\Omega)$, 在$A$的每一点取给定的值? 回答是肯定的. 事实上,我们可以作出更好的结果,还可以在

$A$ 的每一点取给定的有限阶导数：

**15.13 定理** 假设 $\Omega$ 是平面内的一个开集，$A\subset\Omega$，$A$ 在 $\Omega$ 内没有极限点，并且对于每一个 $\alpha\in A$ 对应有一个非负整数 $m(\alpha)$ 和复数 $w_{n,\alpha}$，$0\leqslant n\leqslant m(\alpha)$. 则存在一个函数 $f\in H(\Omega)$，满足

(1) $$f^{(n)}(\alpha)=n!w_{n,\alpha}\quad(\alpha\in A,0\leqslant n\leqslant m(\alpha))$$

**证明** 由定理 15.11，存在一个函数 $g\in H(\Omega)$，$g$ 只在 $A$ 内有零点，并且在每一个 $\alpha\in A$，$g$ 有 $m(\alpha)+1$ 阶零点. 我们断定对于每一个 $\alpha\in A$，对应有一个形为

(2) $$P_\alpha(z)=\sum_{j=1}^{1+m(\alpha)}c_{j,\alpha}(z-\alpha)^{-j}$$

的函数 $P_\alpha$，使 $gP_\alpha$ 在以 $\alpha$ 为圆心的某个圆盘内有幂级数展开式

(3) $$g(z)P_\alpha(z)=w_{0,\alpha}+w_{1,\alpha}(z-\alpha)+\cdots+w_{m(\alpha),\alpha}(z-\alpha)^{m(\alpha)}+\cdots$$

为了书写简单，取 $\alpha=0$ 及 $m(\alpha)=m$，并略去下标 $\alpha$. 对于靠近 0 的 $z$，我们有

(4) $$g(z)=b_1z^{m+1}+b_2z^{m+2}+\cdots$$

其中 $b_1\neq0$. 如果

(5) $$P(z)=c_1z^{-1}+\cdots+c_{m+1}z^{-m-1}$$

则

(6) $$g(z)P(z)=(C_{m+1}+C_mz+\cdots+c_1z^m)(b_1+b_2z+b_3z^2+\cdots)$$

这些 $b$ 已经给定了，我们希望选取那些 $c$，使得

(7) $$g(z)P(z)=w_0+w_1z+\cdots+w_mz^m+\cdots$$

如果我们比较(6)和(7)中 $1,z,\cdots,z^m$ 的系数，因为 $b_1\neq0$，我们可以依次在得出的方程中解出 $c_{m+1},c_m,\cdots,c_1$.

按此种方式我们求得所需的各个 $P_\alpha$. 现在 Mittag-Leffler 定理给出一个在 $\Omega$ 内的亚纯函数 $h$，它的主要部分是这些 $P_\alpha$. 并且如果我们令 $f=gh$，便可得到具有所需性质的函数.

插值问题的解可用来决定环 $H(\Omega)$ 内的全体有限生成理想.

**15.14 定义** 由属于 $H(\Omega)$ 内的函数 $g_1, \cdots, g_n$ 生成的理想 $[g_1, \cdots, g_n]$ 就是所有形如 $\Sigma f_i g_i$ 的函数构成的集. 其中 $f_i \in H(\Omega)$, $i=1, \cdots, n$. 一个主理想是由单独一个函数生成的理想. 注意 $[1] = H(\Omega)$.

如果 $f \in H(\Omega), \alpha \in \Omega$, 并且在 $\alpha$ 的某个邻域内 $f$ 不恒等于 0, $f$ 在 $\alpha$ 的零点的重数记为 $m(f; \alpha)$. 像在定理 15.6 中一样, 若 $f(\alpha) \neq 0$, 则 $m(f; \alpha)=0$.

**15.15 定理** 每一个 $H(\Omega)$ 内的有限生成理想都是主理想.

说得更明白些: 如果 $g_1, \cdots, g_n \in H(\Omega)$, 则存在函数 $g, f_i, h_i \in H(\Omega)$ 满足

$$g=\sum_{i=1}^{n} f_i g_i \quad \text{及} \quad g_i=h_i g \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

**证明** 我们将假设 $\Omega$ 是一个区域. 这样做是为了避免那样一些函数所造成的问题, 它们在 $\Omega$ 的某些分支内恒等于 0, 但不在所有各分支内恒等于 0. 一旦证明了定理对于区域成立, 这个结果就可以应用于任一开集 $\Omega$ 的每一个分支, 并且整个定理也就能推出来. 我们将推证的细节留作习题.

设 $P(n)$ 是下述命题:

如果 $g_1, \cdots, g_n \in H(\Omega)$. 若没有一个 $g_i$ 恒等于 0, 并且如果 $\Omega$ 内没有一个点是 $g_i$ 的零点, 则 $[g_1, \cdots, g_n]=[1]$.

$P(1)$ 是不足道的. 假设 $n>1$, 并且 $P(n-1)$ 已经成立. 取 $g_1, \cdots, g_n \in H(\Omega)$, 它们没有公共零点. 由 Weierstrass 定理 15.11, 存在 $\varphi \in H(\Omega)$ 满足

(1) $\qquad m(\varphi; \alpha)=\min\{m(g_i; \alpha): 1 \leqslant i \leqslant n-1\} \qquad (\alpha \in \Omega)$

函数 $f_i=g_i/\varphi \, (1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 均属于 $H(\Omega)$ 并且在 $\Omega$ 内没有公共零点. 因为 $P(n-1)$ 已成立, $[f_1, \cdots, f_{n-1}]=[1]$, 故

(2) $\qquad [g_1, \cdots, g_{n-1}, g_n]=[\varphi, g_n]$

再者，我们选取的 $\varphi$ 表明在集 $A=\{\alpha\in\Omega:\varphi(\alpha)=0\}$ 的每一点 $g_n(\alpha)\neq 0$，因此由定理15.13，存在 $h\in H(\Omega)$ 使

$$m(1-hg_n;\alpha)\geqslant m(\varphi;\alpha)\qquad(\alpha\in\Omega)\tag{3}$$

当 $\alpha\in A$ 和 $0\leqslant k\leqslant m(\varphi;\alpha)$ 时，这样的 $h$ 可由适当地选择 $h^{(k)}(\alpha)$ 的预定值得到.

由(3)，$(1-hg_n)/\varphi$ 有可去奇点. 于是对某个 $f\in H(\Omega)$ 有

$$1=hg_n+f\varphi\tag{4}$$

由(2)和(4)，$1\in[g_1,\cdots,g_n]$

我们已证明 $P(n-1)$ 蕴涵 $P(n)$，因此对所有 $n$，$P(n)$ 成立.

最后，假设 $G_1,\cdots,G_n\in H(\Omega)$，并且没有一个 $G_i$ 恒等于 0（这不会丧失一般性）. 再次应用定理 15.11 得出 $\varphi\in H(\Omega)$，对所有 $\alpha\in\Omega$，$m(\varphi;\alpha)=\min m(G_i;\alpha)$ 成立. 令 $g_i=G_i/\varphi$，则 $g_i\in H(\Omega)$，并且函数 $g_1,\cdots,g_n$ 在 $\Omega$ 内没有公共零点. 由 $P(n)$，$[g_1,\cdots,g_n]=[1]$. 因此 $[G_1,\cdots,G_n]=[\varphi]$. 这就完成了定理的证明.

## Jensen 公式

**15.16** 我们从定理 15.11 看出，全纯函数在 $\Omega$ 内的零点位置除了在 $\Omega$ 内没有极限点这一条外，是不受什么限制的.

如果我们将 $H(\Omega)$ 代之以它的由某些增长条件所确定的子类，情况就大不相同了. 在那些情况下，零点分布不得不满足某些定量条件. 这些定理的大多数其基础是 Jensen 公式（定理15.18）. 我们将把它应用于某些整函数类和 $H(U)$ 的某些子类.

下面的引理给出了一个运用 Cauchy 定理来计算定积分的机会.

**15.17 引理** $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log|1-e^{i\theta}|\,d\theta=0.$

**证明** 设 $\Omega=\{z:\mathrm{Re}\,z<1\}$. 因为在 $\Omega$ 内，$1-z\neq 0$，并且 $\Omega$ 是

单连通区域．于是存在一函数 $h\in H(\Omega)$，使得

$$\exp\{h(z)\}=1-z$$

在 $\Omega$ 内成立．并且如果我们要求 $h(0)=0$，则 $h$ 是唯一的．因为在 $\Omega$ 内，$\mathrm{Re}(1-z)>0$，于是我们有

$$\text{(1)}\qquad \mathrm{Re}h(z)=\log|1-z|,\quad |\mathrm{Im}h(z)|<\frac{\pi}{2}\qquad (z\in\Omega)$$

对于很小的 $\delta>0$，设 $\Gamma$ 是路径

$$\text{(2)}\qquad \Gamma(t)=e^{it}\qquad (\delta\leqslant t\leqslant 2\pi-\delta)$$

并设 $\gamma$ 是圆心在 1 的圆弧，它在 $U$ 内径由 $e^{i\delta}$ 到 $e^{-i\delta}$．则

$$\text{(3)}\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\log|1-e^{i\theta}|d\theta=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}h(z)\frac{dz}{z}\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}h(z)\frac{dz}{z}\right]$$

最后一个等式依赖 Cauchy 定理；注意 $h(0)=0$.

$\gamma$ 的长小于 $\pi\delta$，因此(1)式表明(3)式最后一个积分的绝对值小于 $C\delta\log(1/\delta)$，其中 $C$ 是常数．如果在(3)中令 $\delta\to 0$，便得出结论．

**15.18 定理** 假设 $\Omega=D(0;R)$，$f\in H(\Omega)$，$f(0)\neq 0$，$0<r<R$，而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ 是 $f$ 在 $\bar{D}(0;R)$ 内的零点，按照它们的重数列出．则

$$\text{(1)}\qquad |f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right\}$$

这就是所谓的 Jensen 公式．假设 $f(0)\neq 0$ 这一点对于应用并无妨碍，因为如果 $f$ 在 0 有 $k$ 阶零点，则公式可应用于 $f(z)/z^k$.

**证明** 将点 $\alpha_j$ 排序，使 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 均在 $D(0;r)$ 内，而 $|\alpha_{m+1}|=\cdots=|\alpha_N|=r$．（当然，我们可能有 $m=N$ 或 $m=0$．）设

$$\text{(2)}\qquad g(z)=f(z)\prod_{n=1}^{m}\frac{r^2-\bar{\alpha}_n z}{r(\alpha_n-z)}\prod_{n=m+1}^{N}\frac{\alpha_n}{\alpha_n-z}$$

则 $g\in H(D)$. 其中 $D=D(0;r+\varepsilon)$. 对某个 $\varepsilon>0$, $g$ 在 $D$ 内没有零点，因此 $\log|g|$ 在 $D$ 内是调和函数(定理 13.12)，并且

$$\text{(3)} \qquad \log|g(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(re^{i\theta})|d\theta$$

由(2)式，

$$\text{(4)} \qquad |g(0)|=|f(0)|\prod_{n=1}^{m}\frac{r}{|\alpha_n|}$$

如果 $|z|=r$, 对于 $1\leqslant n\leqslant m$, (2)式中的因式绝对值为 1. 如果 $\alpha_n=\gamma e^{i\theta_n}$, 对 $m<n\leqslant N$, 便有

$$\text{(5)} \quad \log|g(re^{i\theta})|=\log|f(re^{i\theta})|-\sum_{n=m+1}^{N}\log|1-e^{i(\theta-\theta_n)}|$$

因此引理 15.17 表明，如果以 $f$ 代替 $g$，则(3)中的积分不变. 与(4)比较即给出(1).

Jensen 公式产生一个包含 $U$ 内有界全纯函数的边界值的不等式(我们回忆一下，这些函数的类我们曾记作 $H^\infty$):

**15.19 定理** 如果 $f\in H^\infty$, $f$ 不恒等于 0, 定义

$$\text{(1)} \qquad \mu_r(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta \qquad (0<r<1)$$

$$\text{(2)} \qquad \mu^*(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f^*(re^{i\theta})|d\theta.$$

其中 $f^*$ 是 $f$ 的径向极限函数，如同定理 11.21 中的一样. 则

(3) 若 $0<r<s<1$, $\mu_r(f)\leqslant\mu_s(f)$

(4) 当 $r\to 0$ 时, $\mu_r(f)\to\log|f(0)|$

并且

(5) 当 $0<r<1$ 时, $\mu_r(f)\leqslant\mu^*(f)$

注意下面的推论: 可以选取 $r$, 使当 $|z|=r$ 时, $f(z)\neq 0$. 这样 $\mu_r(f)$ 就是有限的，并且由(5), $\mu^*(f)$ 也是有限的. 于是 $\log|f^*|\in$

$L^1(T)$，并且在 $T$ 的几乎每一个点有 $f^*(re^{i\theta})\neq 0$.

**证明** 存在整数 $m\geqslant 0$，使 $f(z)=z^m g(z)$，$g\in H^\infty$，及 $g(0)\neq 0$. 用 $g$ 替换 $f$，应用 Jensen 公式 15.18(1)．当 $r$ 增加时，它的左边显然不能减少．于是当 $r<s$ 时，$\mu_r(g)\leqslant\mu_s(g)$．因为

$$\mu_r(f)=\mu_r(g)+m\log r$$

我们便证明了(3).

不失一般性，现在假设 $|f|\leqslant 1$．记 $f_r(e^{i\theta})$ 以代替 $f(re^{i\theta})$，则当 $r\to 0$ 时，$f_r\to f(0)$，并且当 $r\to 1$ 时 $f_r$ 几乎处处趋于 $f^*$．因为 $\log(1/|f_r|)\geqslant 0$，两次应用 Fatou 引理并与(3)式组合，就给出(4)和(5).

**15.20 整函数的零点** 假设 $f$ 是整函数，

(1) $$M(r)=\sup_\theta|f(re^{i\theta})|\qquad(0<r<\infty)$$

且 $n(r)$ 是 $f$ 在 $\bar{D}(0;r)$ 的零点数．为了简单，假定 $f(0)=1$．如果 $\{\alpha_n\}$ 是 $f$ 的零点序列，并按 $|\alpha_1|\leqslant|\alpha_2|\leqslant\cdots$ 排列的话，Jensen 公式就给出

$$M(2r)\geqslant\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(2re^{i\theta})|d\theta\right\}=\prod_{n=1}^{n(2r)}\frac{2r}{|\alpha_n|}$$

$$\geqslant\prod_{n=1}^{n(r)}\frac{2r}{|\alpha_n|}\geqslant 2^{n(r)}$$

因此

(2) $$n(r)\log 2\leqslant\log M(2r)$$

这样一来，使 $n(r)$ 能够按之增长的速度(换句话说，$f$ 的零点密度)就由 $M(r)$ 的增长率所控制．从更特殊的情况着眼，假设对于很大的 $r$，有

(3) $$M(r)<\exp\{Ar^k\}$$

其中 $A$ 和 $k$ 是给定的正数，则由(2)式导出

(4) $$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r)}{\log r}\leqslant k.$$

例如，若 $k$ 是正整数，而

(5) $$f(z)=1-e^{z^k}$$

则 $n(r)$ 约为 $\pi^{-1}kr^k$. 因此

(6) $$\lim_{r\to\infty}\frac{\log n(r)}{\log r}=k$$

这证明了估计式(4)不能改进.

## Blaschke 乘积

Jensen 公式使我们有可能决定不是常数的函数 $f\in H^\infty$ 的零点所必须满足的精确条件.

**15.21 定理** 如果 $\{\alpha_n\}$ 是 $U$ 内的序列，满足 $\alpha_n\neq 0$ 和

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)<\infty$$

若 $k$ 是非负整数，并且如果

(2) $$B(z)=z^k\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n-z}{1-\overline{\alpha}_n z}\cdot\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\qquad(z\in U)$$

则 $B\in H^\infty$，且 $B$ 在点 $\alpha_n$ 外没有零点（并且若 $k>0$，则原点是零点）.

我们称函数 $B$ 为 Blaschke 乘积. 注意，某些 $\alpha_n$ 可能重复，此时 $B$ 在这些点有多重零点. 也应注意(2)内每个因式在 $T$ 上的绝对值为 1.

当只有有限个因式时，仍称为 Blaschke 乘积. 并且甚至可以没有一个因式，在这种情况下，$B(z)=1$.

**证明** 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{\alpha_n-z}{1-\bar{\alpha}_n z}\cdot\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right|$$

的第 $n$ 项当 $|z|\leqslant r$ 时是

$$\left|\frac{\alpha_n+|\alpha_n|z}{(1-\bar{\alpha}_n z)\alpha_n}\right|(1-|\alpha_n|)\leqslant\frac{1+r}{1-r}(1-|\alpha_n|).$$

因此定理 15.6 表明 $B\in H(U)$，并且 $B$ 只有给定的零点．因为在(2) 中每一个因式在 $U$ 内的绝对值小于 1，于是得知 $|B(z)|<1$，并且完成了证明．

**15.22** 上述定理指出

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)<\infty$$

是存在一个只有预先给定的零点 $\{\alpha_n\}$ 的函数 $f\in H^\infty$ 的充分条件．这个条件也可以证明是必要的：如果 $f\in H^\infty$ 且 $f$ 不恒等于 0，则 $f$ 的零点必须满足 (1)式．这是定理 15.23 的特款．令人感兴趣的是(1)式对于我们现在就要论述的一个更大的函数类也是必要条件．

对任意实数 $t$，若 $t\geqslant 1$ 定义 $\log^+ t=\log t$，又若 $t<1$，$\log^+ t=0$．设 $N$(源于 Nevanlinna)是所有 $f\in H(U)$并适合

(2) $$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta<\infty$$

的函数类．很明显 $H^\infty\subset N$．注意当 $|z|\to 1$ 时，(2)对 $|f(z)|$ 的增长率作出了限制．然而，积分

(3) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

的有界性却并未施加这样的限制．例如对任何 $g\in H(U)$，若 $f=e^g$，则(3)与 $r$ 无关．这一特点在于(3)能保持很小，因为 $\log|f|$和它能取得大的正值一样也可以取得大的负值，然而 $\log^+|f|\geqslant 0$．在

第 17 章我们将进一步讨论类 $N$.

**15.23 定理** 假设$f\in N$, $f$在$U$内不恒等于0, 而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$是$f$的零点, 并按照它们的重数列出. 则

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)<\infty$$

(我们默认$f$在$U$内有无穷多个零点. 如果只是有限个零点, 上述和式就只有有限项, 因此没有什么要证明的. 同样, $|\alpha_n|\leqslant|\alpha_{n+1}|$. )

**证明** 如果$f$在原点有$m$阶零点, 又$g(z)=z^{-m}f(z)$, 则$g\in N$, 并且除原点外, $g$与$f$有相同的零点. 因此, 不失一般性, 我们可假设$f(0)\neq 0$. 设$n(r)$是$f$在$\bar{D}(0;r)$内的零点数. 固定$k$, 并取$r<1$使$n(r)>k$. 则由 Jensen 公式

$$(2)\qquad |f(0)|\prod_{n=1}^{n(r)}\frac{r}{|\alpha_n|}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\right\}$$

可推出

$$(3)\qquad |f(0)|\prod_{n=1}^{k}\frac{r}{|\alpha_n|}\leqslant\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta\right\}$$

我们假设$f\in N$就是相当于存在一个常数$C<\infty$, 对于所有$r$, $0<r<1$, 它超过(3)式的右边. 这就得出

$$(4)\qquad \prod_{n=1}^{k}|\alpha_n|\geqslant C^{-1}|f(0)|r^k$$

对于每个$k$, 当$r\to 1$时不等式仍然成立. 因此

$$(5)\qquad \prod_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|\geqslant C^{-1}|f(0)|>0$$

由定理 15.5, (5)蕴涵(1).

**系** 如果$f\in H^{\infty}$(或者甚至$f\in N$), 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$是$f$在$U$内

的零点，并且如果 $\Sigma(1-|\alpha_n|)=\infty$，则对于所有 $z\in U$，$f(z)=0$.

例如，没有一个非常数的有界全纯函数在 $U$ 内能以点 $(n-1)/n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 为零点.

我们以一个定理来结束本节. 它描述 Blaschke 乘积靠近 $U$ 的边界时的性态. 回忆一下，作为 $H^\infty$ 的元素，$B$ 在 $T$ 的几乎所有的点有径向极限 $B^*(e^{i\theta})$.

**15.24 定理** 如果 $B$ 是 Blaschke 乘积，则 $|B^*(e^{i\theta})|=1$, a.e. 并且

(1)
$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{i\theta})|d\theta=0$$

**证明** 极限存在是因为积分是 $r$ 的单调函数这个事实得出的推论. 假设 $B(z)$ 如定理 15.21 一样，又记

(2)
$$B_N(z)=\prod_{n=N}^{\infty}\frac{\alpha_n-z}{1-\bar{\alpha}_n z}\cdot\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

因为 $\log(|B/B_N|)$ 在一个包含 $T$ 的开集内连续，如果用 $B_N$ 代替 $B$，极限(1)不变. 如果我们应用定理 15.19 于 $B_N$，便会得出

(3)
$$\log|B_N(0)|\leqslant\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{i\theta})|d\theta$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B^*(e^{i\theta})|d\theta\leqslant 0$$

当 $N\to\infty$ 时，(3)式的第一项趋于 0，这就得出 (1)，并且证明了 $\int\log|B^*|=0$. 因为 $\log|B^*|\leqslant 0$, a.e.，定理 1.39($a$) 现在蕴涵 $\log|B^*|=0$, a.e.

## Müntz-Szasz 定理

**15.25** 古典的 Weierstrass 定理([26]，定理 7.24)指出多项式在 $C(I)$ 中稠密. 这里，$C(I)$ 是闭区间[0, 1]上所有连续复函数

的空间，赋以上确界范数．换句话说，所有函数

(1) $$1, t, t^2, t^3, \cdots$$

的有限线性组合的集在 $C(I)$ 中是稠密的．有时候用函数族(1)张成 $C(I)$ 的说法来表示这一点．

这就提出了一个问题：如果 $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$，在什么条件下，函数

(2) $$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \cdots$$

能够张成 $C(I)$？

所提的问题自然联系到在半平面（或者圆盘；这两者保形等价）内一个有界全纯函数零点分布的问题．漂亮得出奇的回答是：函数族(2)能张成 $C(I)$，当且仅当 $\Sigma 1/\lambda_n=\infty$．

实际上，它的证明甚至给出了一个更加精确的结论：

**15.26 定理** 假设 $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$，并设 $X$ 是 $C(I)$ 内函数

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \cdots$$

全体有限线性组合的集的闭包．

(*a*) 如果 $\Sigma 1/\lambda_n=\infty$，则 $X=C(I)$；

(*b*) 如果 $\Sigma 1/\lambda_n<\infty$，并且若 $\lambda\notin\{\lambda_n\}$，$\lambda\neq 0$，则 $X$ 不包含 $t^\lambda$．

**证明** Hahn-Banach 定理（定理 5.19）的一个推论是：$\varphi\in C(I)$ 但 $\varphi\notin X$，当且仅当存在一个 $C(I)$ 上的有界线性泛函，在 $\varphi$ 不为零而在整个 $X$ 上为零．因为每个 $C(I)$ 上的有界线性泛函是由 $I$ 上关于复 Borel 测度的积分给出，所以(*a*)是下述命题的推论：

如果 $\Sigma 1/\lambda_n=\infty$，又 $\mu$ 是 $I$ 上的复 Borel 测度，满足

(1) $$\int_I t^{\lambda_n} d\mu(t)=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

则同样有

(2) $$\int_I t^k d\mu(t)=0 \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

如果这一点得证，前面的评注表明$X$包含所有函数$t^k$；因为$1\in X$，于是所有的多项式都在$X$内．因此 Weierstrass 定理蕴涵$X=C(I)$．

所以假设(1)式成立．因为(1)和(2)中的被积函数在0点处为零，我们也可以假设$\mu$集中在$(0,1]$．我们将$\mu$对应于一个函数

$$f(z)=\int_I t^z d\mu(t) \tag{3}$$

$t>0$时，由定义，$t^z=\exp\{z\log t\}$．我们断定$f$在右半平面全纯．$f$的连续性是容易验证的，因此可应用 Morera 定理．再者，如果$z=x+iy$，又如果$x>0$，并且$0<t\leqslant 1$，则$|t^z|=t^x\leqslant 1$．于是$f$在右半平面有界，并且(1)说明，对于$n=1,2,3,\cdots$，$f(\lambda_n)=0$．定义

$$g(z)=f\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad (z\in U) \tag{4}$$

则$g\in H^\infty$和$g(\alpha_n)=0$．其中$\alpha_n=(\lambda_n-1)/(\lambda_n+1)$．如果$\Sigma 1/\lambda_n=\infty$，简单的计算表明$\Sigma(1-|\alpha_n|)=\infty$．因此定理15.23的系告诉我们对于所有的$z\in U$，$g(z)=0$，因此$f=0$．特别，对于$k=1,2,3,\cdots$，$f(k)=0$．这就是(2)式．于是定理的(a)部分证毕．

为了证明(b)部分，只须在$I$上构造一个测度$\mu$，使(3)式定义的函数$f$在半平面$\text{Re}z>-1$全纯（任何否定将在这里作出）且在点$0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$为0，在该半平面内没有别的零点．于是由这个测度$\mu$导出的泛函在$X$上为0，但当$\lambda\neq 0$和$\lambda\notin\{\lambda_n\}$时对任何函数$t^\lambda$不为零．

我们从构造一个具有这些给定零点的函数$f$开始，并且随后将证明$f$能表为(3)的形式．定义

$$f(z)=\frac{z}{(2+z)^3}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n-z} \tag{5}$$

因为

$$1-\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}=\frac{2z+2}{2+\lambda_n+z}$$

(5)中的无穷乘积在每一个不包含 $-\lambda_n-2$ 的紧集上一致收敛. 由此得出 $f$ 是整个平面内的、有极点 $-2$ 和 $-\lambda_n-2$ 的亚纯函数，并且在 $0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$ 有零点. 同时，若 $\mathrm{Re}z>-1$，则无穷乘积(5)的每一个因式的绝对值小于1. 于是当 $\mathrm{Re}z\geqslant-1$ 时，$|f(z)|\leqslant1$. 因式 $(2+z)^3$ 保证 $f$ 在直线 $\mathrm{Re}z=-1$ 的约束属于 $L^1$.

固定 $z$ 使 $\mathrm{Re}z>-1$，并对 $f(z)$ 运用 Cauchy 公式，积分路径由圆心在 $-1$，半径 $R>1+|z|$ 的半圆及由 $-1-iR$ 经 $-1+R$ 到 $-1+iR$，再加上由 $-1+iR$ 到 $-1-iR$ 的区间组成. 当 $R\to\infty$ 时. 沿半圆的积分趋于0. 因此剩下

$$(6)\qquad f(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(-1+is)}{-1+is-z}ds\qquad(\mathrm{Re}z>-1)$$

但是

$$(7)\qquad \frac{1}{1+z-is}=\int_0^1 t^{z-is}dt\qquad(\mathrm{Re}z>-1)$$

因此可将(6)改写为

$$(8)\qquad f(z)=\int_0^1 t^z\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-1+is)e^{-is\log t}ds\right\}dt$$

交换积分次序是允许的: 如果(8)中被积函数取绝对值，便得到一个有限的积分.

设 $g(s)=f(-1+is)$，则(8)式内部的积分是 $\hat{g}(\log t)$，$\hat{g}$ 是 $g$ 的Fourier 变式. 它是 $(0,1]$ 上的有界连续函数. 如果我们令 $d\mu(t)=\hat{g}(\log t)dt$，我们就得到以所需的形式(3)表示 $f$ 的测度.

这就完成了证明.

**15.27 评注** 这个定理蕴涵着当 $\{1,t^{\lambda_1},t^{\lambda_2},\cdots\}$ 张成 $C(I)$ 时，则 $t^{\lambda_i}$ 的某个无穷子集可以去掉而不会改变其张成性质. 特别 $C(I)$

不包含这种类型的极小张成集. 这表明它可以和 Hilbert 空间中规范正交集的下述性质相比较: 如果在一个规范正交集中去掉任何一个元素, 它的张成度就会减小. 同样, 如果$\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \cdots\}$不张成 $C(I)$, 去掉它的任何元素也将会减小其张成度. 这可由定理 15.26($b$)得出.

## 习　题

1　假设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是复数序列, 满足 $\Sigma|a_n-b_n|<\infty$. 问在什么集上乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-a_n}{z-b_n}$$

一致收敛? 在什么地方它定义一个全纯函数?

2　假设 $f$ 是整函数, $\lambda$ 是一个正数, 并且不等式

$$|f(z)|<\exp(|z|^{\lambda})$$

对所有足够大的$|z|$成立. (这样的函数称为有限阶的. 满足上述条件的所有 $\lambda$ 的最大下界就是 $f$ 的阶.) 如果 $f(z)=\Sigma a_n z^n$, 证明不等式

$$|a_n|\leqslant\left(\frac{e\lambda}{n}\right)^{n/\lambda}$$

对所有足够大的 $n$ 成立. 考虑函数 $\exp(z^k)$, $k=1, 2, 3, \cdots$以判定上述$|a_n|$的界是否是最可能接近的.

3　试求满足 $\exp(\exp(z))=1$ 的所有复数 $z$, 将它们作为平面上的点把它们描出. 证明没有一个有限阶的整函数能以每一个这种点为零点(当然, 除非 $f\equiv 0$).

4　证明函数

$$\pi\cot\pi z=\pi i\frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}$$

在整数点有残数为 1 的一阶极点. 同样, 证明对于函数

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n}$$

上述结论也成立. 证明这两个函数是周期函数$[f(z+1)=f(z)]$, 它们的差

是有界整函数，因而是常数. 并证明这个常数实际上为 0，因为

$$\lim_{y\to\infty} f(iy) = -2i\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = -\pi i$$

这就给出了部分分式分解式

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + \sum_1^\infty \frac{2z}{z^2-n^2}$$

(与第 9 章习题 12 比较). 注意，如果 $g(z)=\sin\pi z$，$\pi\cot\pi z$ 就是 $(g'/g)(z)$. 试导出乘积表示式

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

5 假设 $k$ 是正整数，$\{z_n\}$ 是满足 $\sum|z_n|^{-k-1}<\infty$ 的复数序列，并且

$$f(z) = \prod_{n=1}^\infty E_k\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

(见定义 15.7). 关于

$$M(r) = \max_\theta |f(re^{i\theta})|$$

的增长率你能说些什么？

6 假设 $f$ 是整函数，$f(0)\neq 0$，当 $|z|$ 足够大时，$|f(z)|<\exp(|z|^\rho)$，并且 $\{z_n\}$ 是 $f$ 的零点序列，按它们的重数计算，证明对每个 $\varepsilon>0$，$\sum|z_n|^{-\rho-\varepsilon}<\infty$. (对照第 12.20 节.)

7 假设 $f$ 是一个整函数，对 $n=1,2,3,\cdots$，$f(\sqrt{n})=0$，并且存在一个正数 $\alpha$，对所有足够大的 $|z|$，使得 $|f(z)|<\exp(|z|^\alpha)$. 若要对所有 $z$ 有 $f(z)=0$，$\alpha$ 应如何？[考虑 $\sin(\pi z^2)$.]

8 设 $\{z_n\}$ 是不相同复数的序列，$z_n\neq 0$，当 $n\to\infty$ 时，$z_n\to\infty$，并且设 $\{m_n\}$ 是正整数序列. 设 $g$ 是平面内的亚纯函数，它以点 $z_n$ 为具有残数 $m_n$ 的一阶极点，并且它无另外的极点. 如果 $z\notin\{z_n\}$，设 $\gamma(z)$ 是由 0 到 $z$ 不经过任何 $z_n$ 的任意一条路径，并且定义

$$f(z) = \exp\{\int_{\gamma(z)} g(\zeta)d\zeta\}$$

证明 $f(z)$ 与 $\gamma(z)$ 的选择无关(即使积分本身并非如此)，$f$ 在 $\{z_n\}$ 的余集内全纯，$f$ 在每个点 $z_n$ 有可去奇点. 并且证明 $f$ 的开拓在 $z_n$ 有 $m_n$ 阶零点.

包含在定理 15.9 内的存在性定理因此可由 Mittag-Leffler 定理推得.

9 假设 $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，$f\in H(U)$，$f(U)\subset U$，并且 $f(0)=\alpha$. 问 $f$ 在

圆盘 $\bar{D}(0;\beta)$ 内有多少个零点？如果 (a) $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$; (b) $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$; (c) $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$; (d) $\alpha=1/1000$; $\beta=1/10$ 时，结果如何？

10　对于 $N=1,2,3,\cdots$，定义

$$g_N(z)=\prod_{n=N}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

证明在整函数环内由 $\{g_N\}$ 产生的理想不是主理想.

11　问在什么条件下，对于实数序列 $y_n$，存在一个开的右半平面内的有界全纯函数，它不恒为 0，但在每个点 $1+iy_n$ 有零点？特别，当 (a) $y_n=\log n$，(b) $y_n=\sqrt{n}$，(c) $y_n=n$，(d) $y_n=n^2$ 时能否存在？

12　假设 $0<|\alpha_n|<1$, $\Sigma(1-|\alpha_n|)<\infty$，并且 $B$ 是以 $\alpha_n$ 为零点的 Blaschke 乘积. 设 $E$ 是全体 $1/\bar{\alpha}_n$ 的点集，又设 $\Omega$ 是 $E$ 的闭包的余集. 证明这个乘积确实在 $\Omega$ 的每个紧子集上一致收敛. 因此 $B\in H(\Omega)$，并且 $B$ 在 $E$ 的每一点有极点.（特别有趣的是当 $\Omega$ 是连通的那些场合.）

13　对于 $n=1, 2, 3, \cdots$，设 $\alpha_n=1-n^{-2}$. 设 $B$ 是以这些点 $\alpha$ 为零点的 Blaschke 乘积. 证明 $\lim\limits_{r\to1}B(r)=0$（理解为 $0<r<1$.）

更确切地说，如果 $\alpha_{N-1}<r<\alpha_N$，证明估计值

$$|B(r)|<\prod_{1}^{N-1}\frac{r-\alpha_n}{1-\alpha_n r}<\prod_{1}^{N-1}\frac{\alpha_N-\alpha_n}{1-\alpha_n}<2e^{-N/3}$$

是正确的.

14　证明存在序列 $\{\alpha_n\}$, $0<\alpha_n<1$，它趋于 1 如此迅速，使得以 $\alpha_n$ 为零点的 Blaschke 乘积满足

$$\limsup_{r\to1}|B(r)|=1$$

因而 $B$ 在 $z=1$ 没有径向极限.

15　设 $\varphi$ 是线性分式变换，它将 $U$ 映到 $U$ 上. 对任何 $z\in U$，定义 $z$ 的 $\varphi$ 轨道为集 $\{\varphi_n(z)\}$，其中 $\varphi_0(z)=z$, $\varphi_n(z)=\varphi(\varphi_{n-1}(z))$, $n=1, 2, 3, \cdots$. 可忽略 $\varphi(z)=z$ 的情况.

(a) 对于哪些 $\varphi$，其 $\varphi$ 轨道满足 Blaschke 条件 $\Sigma(1-|\varphi_n(z)|)<\infty$？[答案部分地依赖于 $\varphi$ 的不动点的位置. 可能有一不动点在 $U$ 内，或者有一不动点在 $T$ 上，或者两个不动点在 $T$ 上. 对于后两种情况，可以把问题化为

对上半平面来讨论，并且考虑那样一些变换，即或者它只有$\infty$是不动点，或者以 0 和$\infty$为不动点．这样做是很有裨益的．]

(*b*) 对哪些$\varphi$存在在$\varphi$下不变的、即对所有 $z\in U$ 满足关系式 $f(\varphi(z))=f(z)$ 的非常数函数 $f\in H^\infty$？

16　假设 $|\alpha_1|\leqslant|\alpha_2|\leqslant|\alpha_3|\leqslant\cdots<1$，并设 $n(r)$ 是序列$\{\alpha_j\}$中使$|\alpha_j|\leqslant r$ 的项数．证明

$$\int_0^1 n(r)\,dr=\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|)$$

17　如果 $B(z)=\sum c_k z^k$ 是一个 Blaschke 乘积，它至少有一个不同于原点的零点，问能不能对 $k=0,1,2,\cdots$都有 $c_k\geqslant0$？

18　假设 $B$ 是一个 Blaschke 乘积，其全体零点均位于区间(0, 1)上，且

$$f(z)=(z-1)^2B(z)$$

证明 $f$ 的导数在 $U$ 内是有界的．

19　记 $f(z)=\exp[(1+z)/(1-z)]$．利用定理 15.19 的记号，证明尽管 $f\in H^\infty$，但

$$\lim_{r\to1}\mu_r(f)<\mu^*(f)$$

注意与定理 15.24 对比．

20　在 Müntz-Szasz 定理中，假设 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots$ 且 $\lambda_n\to0$．在这些条件下，该定理的结论如何？

21　以 $L^2(I)$ 代替 $C(I)$ 证明 Müntz-Szasz 定理的类似定理．

22　记 $f_n(t)=t^ne^{-t}$ $(0\leqslant t<\infty,\ n=0,1,2,\cdots)$，证明这些函数的全体有限线性组合的集稠密于 $L^2(0,\infty)$．提示：若 $g\in L^2(0,\infty)$与每个 $f_n$ 正交，并且

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-tz}\overline{g(t)}\,dt\qquad(\mathrm{Re}\,z>0)$$

则 $F$ 在 $z=1$ 的所有导数都是 0．考虑 $F(1+iy)$．

# 第十六章　解析延拓

因为在某区域内定义且全纯的函数常常能扩展为在某个较大的区域内全纯的函数，在本章中，我们将涉及由此引起的问题．定理 10.18 表明这样的开拓由所给的函数唯一决定．这个扩展过程称为解析延拓．一种很自然的方法使我们宁可考虑定义在 Riemann 面上而不是在平面区域内的函数．这种方案使我们能够用函数来代替"多值函数"(例如平方根函数或对数函数)．然而，Riemann 面的系统论述会使我们离题太远，所以我们将限制在平面区域内讨论．

## 正则点和奇点

**16.1　定义**　令 $D$ 为一开圆盘，假设 $f\in H(\Omega)$，并令 $\beta$ 为 $D$ 的一边界点．若存在中心在 $\beta$ 的圆盘 $D_1$ 及函数 $g\in H(D_1)$，使得对所有 $z\in D\cap D_1$，$g(z)=f(z)$，我们就称 $\beta$ 为 $f$ 的正则点．$D$ 的任何一个边界点若不是 $f$ 的正则点，就称为 $f$ 的奇点．

从定义看来，显然所有 $f$ 的正则点的集是 $D$ 的边界的一个开子集(也可能是空集)．

在下列定理中，不失一般性，我们将取单位圆盘 $U$ 作为 $D$．

**16.2　定理**　假设 $f\in H(U)$，且幂级数

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \qquad (z\in U)$$

的收敛半径为 1．则 $f$ 在单位圆周 $T$ 上至少有一个奇点．

**证明**　相反地，假设 $T$ 的每一点均为 $f$ 的正则点．$T$ 的紧性

蕴涵着存在开圆盘$D_1,\cdots,D_n$及函数 $g_j\in H(D_j)$，使得每个 $D_j$ 的中心均在 $T$ 上，$T\subset D_1\cup\cdots\cup D_n$，并且对 $j=1,\cdots,n$，在 $D_j\cap U$ 内有 $g_j(z)=f(z)$.

若 $D_i\cap D_j\neq\varnothing$，且 $V_{ij}=D_i\cap D_j\cap U$，则 $V_{ij}\neq\varnothing$（因 $D_j$的中心在 $T$ 上）. 且在 $V_{ij}$ 内 $g_i=f=g_j$. 由于 $D_i\cap D_j$ 是连通的，由定理10.18得出在 $D_i\cap D_j$ 内 $g_i=g_j$. 因此我们能用

$$(2)\qquad h(z)=\begin{cases}f(z) & (z\in U)\\ g_i(z) & (z\in D_i)\end{cases}$$

定义一个在 $\Omega=U\cup D_1\cup\cdots\cup D_n$ 内的函数 $h$.

由于 $\Omega\supset\bar{U}$ 且$\Omega$是开集，存在$\varepsilon>0$，使得圆盘$D(0;1+\varepsilon)\subset\Omega$. 但 $h\in H(\Omega)$，$h(z)$在$U$内由(1)给定. 现在定理 10.16 蕴涵(1)的收敛半径至少为$1+\varepsilon$. 这与我们的假设矛盾.

**16.3 定义** 若$f\in H(U)$且若$T$的每一点都是$f$的奇点，则$T$称为$f$的自然边界. 在这种情形下，$f$没有到真正包含$U$的任何区域的全纯开拓.

**16.4 评注** 很容易看出，存在$f\in H(U)$，使$T$是它的自然边界. 事实上，若$\Omega$为任意区域，容易找出函数$f\in H(\Omega)$，它不能扩展为在任何较大区域内的全纯函数. 要看出这一点，令$A$为$\Omega$内任意可数集，它在$\Omega$内无极限点，但使得$\Omega$的每个边界点都是$A$的极限点. 应用定理 15.11 便给出一函数 $f\in H(\Omega)$，它在$A$的每一点为零，但并不恒等于零. 若 $g\in H(\Omega_1)$，此处$\Omega_1$是一真正包含$\Omega$的区域，且若在$\Omega$内 $g=f$，则 $g$ 的零点将在 $\Omega_1$ 内具有极限点. 我们就得出了矛盾.

由

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}=z+z^2+z^4+z^8+\cdots\qquad(z\in U)$$

提供了一个简单明瞭的例子. $f$满足函数方程

(2) $$f(z^2)=f(z)-z$$

由此得出（我们留给读者详细讨论），$f$ 在 $U$ 的每一条端点在 $\exp(2\pi ik/2^n)$ 的半径上都是无界的. 此处 $k$ 和 $n$ 都是正整数. 这些点构成了 $T$ 的稠密子集，且由于 $f$ 的所有奇点的集是闭的，故 $f$ 以 $T$ 作为它的自然边界.

这个例子是一个有大量空隙（也就是有许多零系数）的幂级数这一点并非意外. 这个例子只是定理 16.6 的特殊情形. 这个定理是 Hadamard 作出的，我们将由 Ostrowski 的下述定理来推出它.

**16.5 定理** 假设 $\lambda, p_k$ 及 $q_k$ 是正整数，$p_1<p_2<p_3<\cdots$，且

(1) $$\lambda q_k>(\lambda+1)p_k \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

假设

(2) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

的收敛半径为 1，且对某个 $k$，当 $p_k<n<q_k$ 时，$a_n=0$. 若 $s_p(z)$ 是 (2) 的第 $p$ 项部分和，且若 $\beta$ 为 $f$ 在 $T$ 上的正则点. 则序列 $\{s_{p_k}(z)\}$ 在 $\beta$ 的某邻域内收敛.

注意整个序列 $\{s_{p_k}(z)\}$ 不能在 $\overline{U}$ 外任何一点收敛. 空隙条件 (1) 保证了在 $\beta$ 的邻域，因而在 $\overline{U}$ 外某些点，存在收敛的子序列. 这种现象称为过度收敛.

**证明** 若 $g(z)=f(\beta z)$，则 $g$ 也满足空隙条件. 因此，不失一般性，我们可以假设 $\beta=1$. 于是 $f$ 有到包含 $U\cup\{1\}$ 的一个区域 $\Omega$ 的全纯开拓. 令

(3) $$\varphi(w)=\frac{1}{2}(w^\lambda+w^{\lambda+1})$$

并对所有使 $\varphi(w)\in\Omega$ 的 $w$，定义 $F(w)=f(\varphi(w))$. 若 $|w|\leqslant 1$，但 $w\neq 1$，由 $|1+w|<2$ 得 $|\varphi(w)|<1$. 同时也有 $\varphi(1)=1$. 因此，存

在 $\varepsilon>0$, 使得 $\varphi(D(0;1+\varepsilon))\subset\Omega$, 注意区域 $\varphi(D(0;1+\varepsilon))$ 包含点1. 当 $|w|<1+\varepsilon$ 时, 级数

(4) $$F(w)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m w^m$$

是收敛的.

在 $[\varphi(w)]^n$ 内 $w$ 的最高及最低次幂具有指数 $(\lambda+1)n$ 及 $\lambda n$. 因此, 由(1), 在 $[(\varphi(w)]^{p_k}$ 中的最高指数小于 $[\varphi(w)]^{q_k}$ 中的最低指数. 由于

(5) $$F(w)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[\varphi(w)]^n \qquad (|w|<1)$$

现在由 $\{a_n\}$ 满足的空隙条件可推出

(6) $$\sum_{n=0}^{p_k}a_n[\varphi(w)]^n=\sum_{m=0}^{(\lambda+1)p_k}b_m w^m \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

当 $k\to\infty$, $|w|<1+\varepsilon$ 时, (6)的右边收敛. 因此, $\{s_{p_k}(z)\}$ 对所有 $z\in\varphi(D(0;1+\varepsilon))$ 收敛. 这就是所求的结论.

**注**: 实际上, $\{s_{p_k}(z)\}$ 在 $\beta$ 的某一邻域一致收敛. 我们留给读者通过更细心地考察上述证明来证实这个结果.

**16.6 定理** 假设 $\lambda$ 是个正整数, $\{p_k\}$ 是一个正整数序列, 使

(1) $$p_{k+1}>\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)p_k \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

且幂级数

(2) $$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^{p_k}$$

的收敛半径为1. 则 $f$ 以 $T$ 作为它的自然边界.

**证明** 定理 16.5 的序列 $\{s_{p_k}\}$ 现在与(2)的整个的部分和序列相同(除了重复的之外). 后者不能在 $\overline{U}$ 外任何一点收敛. 因

此定理 16.5 推出 $T$ 没有一个点能是 $f$ 的正则点.

**16.7 例** 当 $n$ 是 2 的幂时，令 $a_n=1$，其余情形令 $a_n=0$。令 $\eta_n=\exp(-\sqrt{n})$，并定义

(1) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\eta_n z^n$$

由于

(2) $$\limsup_{n\to\infty}|a_n\eta_n|^{1/n}=1$$

故(1)的收敛半径为 1. 由 Hadamard 定理，$f$ 以 $T$ 作为它的自然边界. 然而，$f$ 的各阶导数的幂级数

(3) $$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n\eta_n z^{n-k}$$

在闭单位圆盘上一致收敛. 因此，每个 $f^{(k)}$ 均在 $\bar{U}$ 上一致连续，并且 $f$ 在 $T$ 上的限制作为 $\theta$ 的函数是无穷可微的，而不管 $T$ 是 $f$ 的自然边界这一事实.

这例子相当值得注意地证明，在定义 16.1 的意义下，奇点的出现并不意味着会出现不连续性或者(不太严格地说)出现光滑性的任何缺陷.

在这里插入一个说明连续性排除了奇点存在的定理，看来是适宜的.

**16.8 定理** 假设 $\Omega$ 是一区域，$L$ 是一条直线或一段圆弧，$\Omega-L$ 是两个区域 $\Omega_1$ 及 $\Omega_2$ 的并，$f$ 在 $\Omega$ 内连续，且 $f$ 在 $\Omega_1$ 及 $\Omega_2$ 内均全纯，则 $f$ 在 $\Omega$ 内全纯.

**证明** 如果我们对直线 $L$ 证明了这个定理，则应用分式线性变换，一般场合也就可以得出了. 由 Morera 定理，只要证明对 $\Omega$ 内每个三角形 $\triangle$，$f$ 沿边界 $\partial\triangle$ 的积分均为零就够了. Cauchy 定理推出，沿 $\triangle\cap\Omega_1$ 内或 $\triangle\cap\Omega_2$ 内每一闭路径 $\gamma$，$f$ 的积分为零. $f$

的连续性表明，若 $\gamma$ 的一部分在 $L$ 内，这结果仍然正确，而沿 $\partial\triangle$ 的积分最多是这种形式的两个项之和.

## 沿曲线的延拓

**16.9 定义** 一个函数元素是一个序对 $(f,D)$. 此处 $D$ 为一开圆盘，且 $f\in H(D)$. 若下列两条件成立: $D_0\cap D_1\neq\varnothing$，且对所有 $z\in D_0\cap D_1$, $f_0(z)=f_1(z)$，则称两个函数元素 $(f_0,D_0)$ 及 $(f_1,D_1)$ 是彼此直接延拓的. 在这种情形，我们记为

$$(f_0,D_0)\sim(f_1,D_1) \tag{1}$$

链是圆盘的有限序列 $\mathscr{C}$，就是说 $\mathscr{C}=\{D_0, D_1, \cdots, D_n\}$，使得对 $i=1,\cdots,n$, $D_{i-1}\cap D_i\neq\varnothing$. 若已给定 $(f_0,D_0)$，且若存在元素 $(f_i, D_i)$，使得对 $i=1,\cdots,n$, $(f_{i-1},D_{i-1})\sim(f_i,D_i)$，则 $(f_n,D_n)$ 称为 $(f_0, D_0)$ 沿 $\mathscr{C}$ 的解析延拓. 注意，$f_n$ 由 $f_0$ 及 $\mathscr{C}$（若它全都存在）唯一决定. 为了看出这一点，假设(1)成立，并假设当用 $g_1$ 代替 $f_1$ 时(1)也成立. 则在 $D_0\cap D_1$ 内，$g_1=f_0=f_1$；又由 $D_1$ 是连通的，我们在 $D_1$ 内有 $g_1=f_1$. 现由对 $\mathscr{C}$ 的项数使用归纳法，便得出 $f_n$ 的唯一性.

若 $(f_n,D_n)$ 为 $(f_0,D_0)$ 沿 $\mathscr{C}$ 的延拓，且若 $D_n\cap D_0\neq\varnothing$. 则 $(f_0, D_0)\sim(f_n,D_n)$ 不一定成立；换句话说，关系 $\sim$ 并不是传递的. 最简单的例子由平方根函数给出: 设 $D_0, D_1$ 及 $D_2$ 为中心在 $1, w$ 及 $w^2$，半径为 1 的圆盘，此处 $w^3=1$. 选取 $f_j\in H(D_j)$，使得 $f_j^2(z)=z$. 因此，$(f_0,D_0)\sim(f_1,D_1)$, $(f_1,D_1)\sim(f_2,D_2)$. 在 $D_0\cap D_2$ 内，我们有 $f_2=-f_0\neq f_0$.

称链 $\mathscr{C}=\{D_0,\cdots,D_n\}$ 是用参数区间 $[0,1]$ 覆盖曲线 $\gamma$，若存在数组 $0=s_0<s_1<\cdots<s_n=1$，使得 $\gamma(0)$ 为 $D_0$ 的中心，$\gamma(1)$ 为 $D_n$ 的中心，且

$$\gamma([s_i, s_{i+1}])\subset D_i \qquad (i=1,\cdots,n-1) \tag{2}$$

如果 $(f_0,D_0)$ 能沿这样的 $\mathscr{C}$ 延拓到 $(f_n,D_n)$，我们称 $(f_n,D_n)$ 为 $(f_0,$

$D_0$)沿 $\gamma$ 的解析延拓．(唯一性将在定理 16.11 证明．)($f_0, D_0$)因此被称为容许一个沿 $\gamma$ 的解析延拓．

虽然关系 (1) 并不传递，但传递性的一个局限形式还是成立的．它提供了定理 16.11 证明的关键．

**16.10 命题** 假设$D_0\cap D_1\cap D_2\neq\varnothing$,$(D_0,f_0)\sim(D_1,f_1)$,且$(D_1,f_1)\sim(D_2,f_2)$,则$(D_0,f_0)\sim(D_2,f_2)$.

**证明** 由假设,在 $D_0\cap D_1$ 内 $f_0=f_1$,在 $D_1\cap D_2$ 内 $f_1=f_2$．因此,在非空开集 $D_0\cap D_1\cap D_2$ 内 $f_0=f_2$．由于 $f_0$ 及 $f_2$ 均在 $D_0\cap D_2$ 内全纯,且 $D_0\cap D_2$ 为连通的,便得出在 $D_0\cap D_2$ 内 $f_0=f_2$.

**16.11 定理** 如果$(f,D)$是一函数元素,并且 $\gamma$ 是从 $D$ 的中心出发的一条曲线,则$(f,D)$沿 $\gamma$ 最多容许一个解析延拓.

这定理的断言更清楚的陈述是:如果 $\gamma$ 被链 $\mathscr{C}_1=\{A_0,A_1,\cdots,A_m\}$及 $\mathscr{C}_2=\{B_0,B_1,\cdots,B_n\}$覆盖,此处 $A_0=B_0=D$．若$(f,D)$能沿 $\mathscr{C}_1$ 解析延拓到函数元素$(g_m,A_m)$，同时$(f, D)$又能沿 $\mathscr{C}_2$ 解析延拓到$(h_n,B_n)$,则在 $A_m\cap B_n$ 内,$g_m=h_n$.

根据假设,$A_m$ 及 $B_n$ 都是具有相同中心 $\gamma(1)$的圆盘，这便得出 $g_m$ 及 $h_n$ 具有相同的 $z-\gamma(1)$的幂级数展开式，并且我们同样能够用 $A_m$ 及 $B_n$ 两者中较大的一个代替它们．承认了这一点，最终就得到 $g_m=h_n$.

**证明** 设 $\mathscr{C}_1$ 及 $\mathscr{C}_2$ 如上述．存在数组

$$0=s_0<s_1<\cdots<s_m=1=s_{m+1}$$

及 $0=\sigma_0<\sigma_1<\cdots<\sigma_n=1=\sigma_{n+1}$,使得

(1) $\gamma([s_i,s_{i+1}])\subset A_i,\ \gamma([\sigma_j,\sigma_{j+1}])\subset B_j \qquad (0\leqslant i\leqslant m,\ 0\leqslant j\leqslant n)$

对$0\leqslant i\leqslant m-1$和$0\leqslant j\leqslant n-1$,存在函数元素$(g_i,A_i)\sim(g_{i+1},A_{i+1})$及$(h_j,B_j)\sim(h_{j+1},B_{j+1})$,此处 $g_0=h_0=f$.

我们断言，如果 $0\leqslant i\leqslant m$ 和 $0\leqslant j\leqslant n$，并且$[s_i,s_{i+1}]$与$[\sigma_j,\sigma_{j+1}]$相交,则$(g_i,A_i)\sim(h_j,B_j)$.

假设存在数对$(i, j)$使这断言错误. 则它们中有一个使$i+j$最小. 很清楚$i+j>0$. 假设$s_i \geqslant \sigma_j$, 则$i \geqslant 1$, 且由$[s_i, s_{i+1}]$与$[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$相交, 我们看到

(2) $$\gamma(s_i) \in A_{i-1} \cap A_i \cap B_j$$

$i+j$的最小性表明$(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (h_j, B_j)$, 又因为$(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (g_i, A_i)$, 由命题16.10可推出$(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$. 这与我们的假设矛盾. 用相同的方法可排除$s_i \leqslant \sigma_j$的可能性.

于是我们的断言已经确立. 特别, 它对数对$(m, n)$成立, 并且这就是我们要证明的.

**16.12 定义** 假设$\alpha$和$\beta$是拓扑空间$X$内的点, 而$\varphi$是单位正方形$I^2 = I \times I$(此处$I = [0, 1]$)到$X$内的连续映射, 使得对所有$t \in I$, $\varphi(0, t) = \alpha$及$\varphi(1, t) = \beta$, 则称由

(1) $$\gamma_t(s) = \varphi(s, t) \qquad (s \in I, t \in I)$$

定义的曲线$\gamma_t$组成了$X$内的由$\alpha$到$\beta$的一个单参数曲线族$\{\gamma_t\}$.

我们现在导出解析延拓的一个十分重要的性质:

**16.13 定理** 假设$\{\gamma_t\}(0 \leqslant t \leqslant 1)$是平面内由$\alpha$到$\beta$的单参数曲线族, $D$为中心在$\alpha$的圆盘, 且函数元素$(f, D)$沿每一条$\gamma_t$都容许解析延拓到一元素$(g_t, D_t)$, 则$g_1 = g_0$.

最后的等式是像定理16.11中的那样解释的:

$$(g_1, D_1) \sim (g_0, D_0)$$

且$D_0, D_1$是具有相同的中心$\beta$的圆盘.

**证明** 固定$t \in I$. 则存在覆盖$\gamma_t$的一个链$\mathscr{C} = \{A_0, \cdots, A_n\}$, $A_0 = D$, 使得$(g_t, D_t)$由$(f, D)$沿$\mathscr{C}$延拓得到. 并存在数组$0 = s_0 < \cdots < s_n = 1$, 使得

(1) $$E_i = \gamma_t([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

这样就存在$\varepsilon > 0$, 它比任意紧集$E_i$到对应的开圆盘$A_i$的余集之间的距离都要小. $\varphi$在$I^2$上的一致连续性(见定义16.12)表明存

在 $\delta>0$, 使得当 $s\in I, u\in I, |u-t|<\delta$ 时,

(2) $$|\gamma_t(s)-\gamma_u(s)|<\varepsilon$$

假设 $u$ 满足这些条件,则(2)表明 $\mathscr{C}$ 覆盖 $\gamma_u$. 因此,定理16.11表明 $g_t$ 及 $g_u$ 都由 $(f,D)$ 沿相同的链 $\mathscr{C}$ 延拓得到, 所以 $g_t=g_u$.

这样,每个 $t\in I$ 均被线段 $J_t$ 覆盖,使得对所有 $u\in I\cap J_t, g_u=g_t$. 因为 $I$ 是紧的, 所以 $I$ 被有限多个 $J_t$ 覆盖; 又因为 $I$ 是连通的,经有限步后,我们可以看出 $g_1=g_0$.

下面定理是直观上很明显的一个拓扑事实.

**16.14 定理** 假设 $\Gamma_0$ 及 $\Gamma_1$ 是拓扑空间 $X$ 内的曲线, 具有公共的起点 $\alpha$ 及公共的终点 $\beta$. 如果 $X$ 是单连通的. 则存在 $X$ 内由 $\alpha$ 到 $\beta$ 的单参数曲线族 $\{\gamma_t\}(0\leqslant t\leqslant 1)$, 使得 $\gamma_0=\Gamma_0$ 及 $\gamma_1=\Gamma_1$.

**证明** 令 $[0,\pi]$ 为 $\Gamma_0$ 及 $\Gamma_1$ 的参数区间, 则

(1) $$\Gamma(s)=\begin{cases}\Gamma_0(s) & (0\leqslant s\leqslant \pi)\\ \Gamma_1(2\pi-s) & (\pi\leqslant s\leqslant 2\pi)\end{cases}$$

定义了 $X$ 内一条闭曲线. 由于 $X$ 是单连通的, $\Gamma$ 在 $X$ 内是零伦的. 因此存在连续映射 $H: [0,2\pi]\times[0,1]\to X$, 使得

(2) $$H(s,0)=\Gamma(s), H(s,1)=c\in X, H(0,t)=H(2\pi,t)$$

如果 $\Phi: \overline{U}\to X$ 由

$$\Phi(re^{i\theta})=H(\theta,1-r) \qquad (0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

定义, 则(2)蕴涵着 $\Phi$ 是连续的. 令

$$\gamma_t(\theta)=\Phi[(1-t)e^{i\theta}+te^{-i\theta}] \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$$

由 $\Phi(e^{i\theta})=H(\theta,0)=\Gamma(\theta)$, 便得出

$$\gamma_t(0)=\Phi(1)=\Gamma(0)=\alpha \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

$$\gamma_t(\pi)=\Phi(-1)=\Gamma(\pi)=\beta \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

$$\gamma_0(\theta)=\Phi(e^{i\theta})=\Gamma(\theta)=\Gamma_0(\theta) \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

和

$$\gamma_1(\theta)=\Phi(e^{-i\theta})=\Phi(e^{i(2\pi-\theta)})=\Gamma(2\pi-\theta)=\Gamma_1(\theta)\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

这就完成了证明.

## 单值性定理

上面的讨论实质上已经证明了下述重要定理.

**16.15 定理** 假设$\Omega$是单连通区域,$(f, D)$是一个函数元素,$D\subset\Omega$,且$(f, D)$能沿$\Omega$内起点在$D$的中心的每一条曲线解析延拓.则存在$g\in H(\Omega)$,使得对所有$z\in D$, $g(z)=f(z)$.

**证明** 设$P_0$和$P_1$是$\Omega$内由$D$的中心$\alpha$到某点$\beta\in\Omega$的两条曲线.由定理16.13及16.14得出,$(f, D)$沿$\Gamma_0$及$\Gamma_1$的解析延拓都会导致出相同的元素$(g_\beta, D_\beta)$.这里$D_\beta$是中心在$\beta$的一个圆盘.若$D_{\beta_1}$与$D_\beta$相交,则$(g_{\beta_1}, D_{\beta_1})$可以首先将$(f, D)$延拓到$\beta$,然后沿直线由$\beta$延拓到$\beta_1$而得到.这表明在$D_{\beta_1}\cap D_\beta$内,$g_{\beta_1}=g_\beta$.

因此定义

$$g(z)=g_\beta(z)\qquad (z\in D_\beta)$$

是相容的,并且给出了所求的$f$的全纯开拓.

**16.16 评注** 设$\Omega$为一平面区域,固定$w\notin\Omega$,令$D$为$\Omega$内的一个圆盘.由于$D$是单连通的,存在$f\in H(D)$,使得$\exp[f(z)]=z-w$.注意在$D$内$f'(z)=(z-w)^{-1}$,并且后一函数在整个$\Omega$内全纯.这就蕴涵了$(f, D)$能沿$\Omega$内从$D$的中心$\alpha$出发的每一条路径$\gamma$解析地延拓:如果$\gamma$由$\alpha$到$\beta$, $D_\beta=D(\beta,\gamma)\subset\Omega$,

$$\Gamma_z=\gamma\dotplus[\beta, z]\qquad (z\in D_\beta)\tag{1}$$

且

$$g_\beta(z)=\int_{\Gamma_z}(\zeta-w)^{-1}d\zeta+f(\alpha)\qquad (z\in D_\beta)\tag{2}$$

则$(g_\beta, D_\beta)$是$(f, D)$沿$\gamma$的解析延拓.

注意在$D_\beta$内$g'_\beta(z)=(z-w)^{-1}$.

现在假设存在 $g\in H(\Omega)$，使得在 $D$ 内 $g(z)=f(z)$. 则对所有 $z\in\Omega$, $g'(z)=(z-w)^{-1}$，如果 $\Gamma$ 是 $\Omega$ 内的闭路径，便得出

(3) $$\mathrm{Ind}_\Gamma(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g'(z)\,dz=0$$

我们最终得出（借助于定理 13.11），单值性定理在每一个不是单连通的平面区域内失效.

## 模函数的构造

**16.17 模群** 这是形式为

(1) $$\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

的所有线性分式变换的集合 $G$. 这里 $a$, $b$, $c$ 及 $d$ 是整数，且 $ad-bc=1$.

由于 $a,b,c$ 及 $d$ 是实数，每个 $\varphi\in G$ 映实轴到它本身上（除了 $\infty$）. $\varphi(i)$ 的虚部是 $(c^2+d^2)^{-1}>0$. 因此

(2) $$\varphi(\Pi^+)=\Pi^+\qquad(\varphi\in G)$$

此处 $\Pi^+$ 是开上半平面. 若 $\varphi$ 由(1)给出，则

(3) $$\varphi^{-1}(w)=\frac{dw-b}{-cw+a}$$

于是 $\varphi^{-1}\in G$. 同时，当 $\varphi\in G$ 和 $\psi\in G$ 时，$\varphi\circ\psi\in G$.

因此 $G$ 是一个群，以复合作为群运算. 根据(2)，习惯上把 $G$ 看作 $\Pi^+$ 上的变换群.

变换 $z\to z+1$ $(a=b=d=1,\ c=0)$ 和 $z\to-1/z$ $(a=d=0,\ b=-1, c=1)$ 属于 $G$. 事实上，它们生成 $G$（也就是，没有 $G$ 的真子群包含这两个变换）. 这能用定理 16.19(*c*) 所采用的同样方法证明.

一个模函数是 $\Pi^+$ 上的全纯（或亚纯）函数 $f$，并且 $f$ 在 $G$ 下或至少在 $G$ 的某个非平凡子群 $\Gamma$ 下是不变的. 这意思是说，对每个

$\varphi\in\Gamma, f\circ\varphi=f$.

**16.18 一个子群** 我们将取由 $\sigma$ 和 $\tau$ 生成的群为 $\Gamma$. 此处

(1) $$\sigma(z)=\frac{z}{2z+1}, \qquad \tau(z)=z+2$$

我们的一个目的是构造在 $\Gamma$ 下不变的某个函数 $\lambda$, 且由它引导出 Picard 定理的一个快速的证明. 确实, 在证明中, 重要的是 $\lambda$ 的映射性质, 而不是它的不变性, 而且也能较快地给出 $\lambda$ 的构造(适当地用 Riemann 定理及反射原理). 但是, 用几何的语言来研究 $\Gamma$ 在 $\Pi^+$ 上的作用是很有教益的, 我们将沿着这条路子来处理.

设 $Q$ 是满足下列四个条件的所有 $z$ 的集合, 这里 $z=x+iy$:

(2) $$y>0, \ -1\leqslant x<1, \ |2z+1|\geqslant 1, \ |2z-1|>1$$

$Q$ 界于垂直线 $x=-1$ 及 $x=1$ 之间, 并且以中心在 $-\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{2}$, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的两个半圆周作为下界. $Q$ 包含了位于 $\Pi^+$ 中左半的那些边界点. $Q$ 不含实轴上的点.

我们断言 $Q$ 是 $\Gamma$ 的基本区域. 这意思是指下列定理的陈述 $(a)$ 及 $(b)$ 是真确的.

**16.19 定理** 设 $\Gamma$ 和 $Q$ 如上述.

$(a)$ 若 $\varphi_1$ 及 $\varphi_2\in\Gamma$, 且 $\varphi_1\neq\varphi_2$, 则 $\varphi_1(Q)\cap\varphi_2(Q)=\varnothing$.

$(b)$ $\bigcup_{\varphi\in\Gamma}\varphi(Q)=\Pi^+$.

$(c)$ $\Gamma$ 包含形式为

(1) $$\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

的所有变换 $\varphi\in G$, 其中 $a$ 和 $d$ 是奇数, $b$ 和 $c$ 是偶数.

**证明** 设 $\Gamma_1$ 为 $(c)$ 中所述的所有 $\varphi\in G$ 的集. 容易验证 $\Gamma_1$ 是 $G$ 的子群. 由 $\sigma\in\Gamma_1$ 及 $\tau\in\Gamma_1$, 可得出 $\Gamma\subset\Gamma_1$. 为要证明 $\Gamma=\Gamma_1$,

也就是要证明$(c)$，只需证明$(a')$和$(b)$成立就够了. 这里$(a')$是由$(a)$以$\Gamma_1$代替$\Gamma$而得到的命题. 因为，如果$(a')$及$(b)$成立，很清楚，$\Gamma$就不能是$\Gamma_1$的真子集.

我们将需要关系式

$$\operatorname{Im}\varphi(z)=\frac{\operatorname{Im}z}{|cz+d|^2} \tag{2}$$

此式对由(1)给出的每个$\varphi\in G$都正确. (2)的证明是用直接计算的方法，且依赖于关系式$ad-bc=1$.

我们现在证明$(a')$. 假设$\varphi_1$及$\varphi_2\in\Gamma_1$, $\varphi_1\neq\varphi_2$, 且定义$\varphi=\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2$. 如果$z\in\varphi_1(Q)\cap\varphi_2(Q)$，则$\varphi_1^{-1}(z)\in Q\cap\varphi(Q)$. 因此只须证明，若$\varphi\in\Gamma_1$，且$\varphi$不是恒等变换，则

$$Q\cap\varphi(Q)=\varnothing \tag{3}$$

(3)的证明分为三种情形.

若在(1)中$c=0$，则$ad=1$，由于$a$和$d$是整数，我们有$a=d=\pm1$. 因此，对某个整数$n\neq0$, $\varphi(z)=z+2n$，而$Q$的描述明显地使(3)成立.

若$c=2d$，则$c=\pm2$且$d=\pm1$(由$ad-bc=1$). 因此，$\varphi(z)=\sigma(z)+2m$，$m$为一整数. 由$\sigma(Q)\subset\bar{D}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$，(3)成立.

若$c\neq0$，且$c\neq2d$. 我们断定，对所有$z\in Q$, $|cz+d|>1$. 如若不然，圆盘$\bar{D}(-d/c;1/|c|)$与$Q$相交. $Q$的描述表明，若$\alpha\neq-\frac{1}{2}$为一实数，且$\bar{D}(\alpha;r)$与$Q$相交，则点$-1, 0, 1$中至少有一点含于$D(\alpha;r)$内，因此对$w=-1$或0或1，$|cw+d|<1$. 但对这些$w$，$cw+d$是一奇数，它的绝对值不能小于1. 于是$|cz+d|>1$. 现在由(2)可得出，对每个$z\in Q$, $\operatorname{Im}\varphi(z)<\operatorname{Im}z$. 如果对某个$z\in Q$, $\varphi(z)\in Q$是真确的话，相同的论证就可应用于$\varphi^{-1}$，并且就能证明

$$\operatorname{Im}z=\operatorname{Im}\varphi^{-1}(\varphi(z))\leqslant\operatorname{Im}\varphi(z) \tag{4}$$

这矛盾表明(3)式成立.

因此($a'$)得到了证明.

要证明($b$),令$\Sigma$为集$\varphi(Q)$对$\varphi\in\Gamma$取的并.很清楚,$\Sigma\subset\Pi^+$.同时,对于$n=0, \pm1, \pm2, \cdots$, $\Sigma$也包含集$\tau^n(Q)$,此处$\tau^n(z)=z+2n$.由于$\sigma$映圆周$|2z+1|=1$到圆周$|2z-1|=1$上,我们看到$\Sigma$包含使所有不等式

(5) $$|2z-(2m+1)|\geqslant 1 \qquad (m=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

都能满足的每一个$z\in\Pi^+$.

固定$w\in\Pi^+$.由$\mathrm{Im}w>0$,仅有有限对整数$c$及$d$,使得$|cw+d|$小于任意给定的界限,并且我们能选取$\varphi_0\in\Gamma$,使得$|cw+d|$取到最小.由(2),这表示

(6) $$\mathrm{Im}\varphi(w)\leqslant\mathrm{Im}\varphi_0(w) \qquad (\varphi\in\Gamma)$$

令$z=\varphi_0(w)$,则(6)变为

(7) $$\mathrm{Im}\varphi(z)\leqslant\mathrm{Im}z \qquad (\varphi\in\Gamma)$$

应用(7)式于$\varphi=\sigma\tau^{-n}$和$\varphi=\sigma^{-1}\tau^{-n}$.因为

(8) $$(\sigma\tau^{-n})(z)=\frac{z-2n}{2z-4n+1}, \quad (\sigma^{-1}\tau^{-n})(z)=\frac{z-2n}{-2z+4n+1}$$

由(2)和(7)得出

(9) $$|2z-4n+1|\geqslant 1, \ |2z-4n-1|\geqslant 1 \qquad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

这样$z$满足(5),因此$z\in\Sigma$;又因为$w=\varphi_0^{-1}(z)$和$\varphi_0^{-1}\in\Gamma$,我们有$w\in\Sigma$.

这就完成了证明.

下列定理概括了在16.18节提到的模函数$\lambda$的某些性质.它将用于定理16.22.

**16.20 定理** 如果$\Gamma$和$Q$均如16.18节所述,则存在一个函数$\lambda\in H(\Pi^+)$,使得

($a$) 对每个$\varphi\in\Gamma$, $\lambda\circ\varphi=\lambda$.

(*b*) $\lambda$ 在 $Q$ 上是一一的.

(*c*) $\lambda$ 的值域(由(*a*)，它与 $\lambda(Q)$ 相同)是不同于 0 和 1 的所有复数组成的区域.

(*d*) $\lambda$ 以实轴作为它的自然边界.

**证明** 令 $Q_0$ 为 $Q$ 的右边一半. 更明确地说, $Q_0$ 由 $z\in\Pi^+$，并满足

$$(1)\qquad 0<\text{Re}\,z<1,\quad |2z-1|>1$$

的所有 $z$ 组成. 由定理 14.19(及评注 14.20)，存在 $\bar{Q}_0$ 上的连续函数 $h$, 它在 $\bar{Q}_0$ 上是一一的, 在 $Q_0$ 内是全纯的, 并使得 $h(Q_0)=\Pi^+$, $h(0)=0$, $h(1)=1$, 且 $h(\infty)=\infty$. 反射原理 (定理11.17)表明，公式

$$(2)\qquad h(-x+iy)=\overline{h(x+iy)}$$

把 $h$ 扩展为 $Q$ 的闭包 $\bar{Q}$ 上的连续函数. 这函数是 $Q$ 的内部到除掉非负实轴的复平面上的保形映射. 我们同时看出 $h$ 在 $Q$ 上是一一的, 且 $h(Q)$ 是(*c*)中所描述的区域 $\Omega$, 并有

$$(3)\qquad h(-1+iy)=h(1+iy)=h(\tau(-1+iy))\qquad (0<y<\infty)$$

和

$$(4)\qquad h\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)=h\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i(\pi-\theta)}\right)$$

$$=h\left(\sigma\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)\right)\qquad (0<\theta<\pi)$$

由于在 $Q$ 的边界上 $h$ 是实的, 由(2)以及 $\sigma$ 和 $\tau$ 的定义便得出(3)和(4).

我们现在定义函数 $\lambda$:

$$(5)\qquad \lambda(z)=h(\varphi^{-1}(z))\qquad (z\in\varphi(Q),\ \varphi\in\Gamma)$$

由定理 16.19，每个 $z\in\Pi^+$，有一个且仅有一个 $\varphi\in\Gamma$，使 $z$ 属于 $\varphi(Q)$. 这样, 对 $z\in\Pi^+$, (5)定义了 $\lambda(z)$，并且我们立刻可以看出

$\lambda$具有性质($a$)到($c$)，同时$\lambda$在每一个集$\varphi(Q)$的内部是全纯的.

由(3)及(4)得出$\lambda$在

$$Q\cup\tau^{-1}(Q)\cup\sigma^{-1}(Q)$$

上连续，从而在包含$Q$的一个开集$V$上连续. 定理16.8现在表明$\lambda$在$V$内是全纯的. 由于$\Pi^+$被集$\varphi(V)$，$\varphi\in\Gamma$的并所覆盖，且由$\lambda\circ\varphi=\lambda$，我们最终得出$\lambda\in H(\Pi^+)$.

最后，所有数$\varphi(0)=b/d$的集在实轴上是稠密的. 若$\lambda$能解析延拓到一个真正包含$\Pi^+$的区域，$\lambda$的零点将在这区域内有极限点. 但由于$\lambda$不是常数，这样是不可能的.

## Picard 定理

**16.21** 所谓的"小 Picard 定理"断言每一个非常数整函数可以取到每一个值，除了有一个值可能例外. 这就是下面要证明的定理. 有一个强些的说法：每一个不是多项式的整函数可以取得每一个值无限多次，但仍然除了有一个值可能例外. 这一个例外的值确能出现，可由$f(z)=e^z$说明，它删除了零值. 后面的定理在一个局部的情况下确实是真确的：若$f$在点$z_0$有孤立奇点，且若$f$在$z_0$的某个邻域内删除两个值，则$z_0$是一个可去奇点或极点. 这个所谓的"大 Picard 定理"是 Weierstrass 定理(定理10.21)值得注意的加强. 后者仅仅断言，当$f$在$z_0$有本性奇异点时，$z_0$的每一个邻域的象在平面内稠密. 我们将不在此处证明它.

**16.22 定理** 如果$f$是整函数，且存在两个不同的复数$\alpha$和$\beta$，它们不在$f$的值域内，则$f$为常数.

**证明** 不失一般性，我们假设$\alpha=0$及$\beta=1$；不然的话，用$(f-\alpha)/(\beta-\alpha)$代替$f$. 则$f$映平面到定理16.20所述的区域$\Omega$内.

对每个圆盘$D_1\subset\Omega$，对应有一区域$V_1\subset\Pi^+$(其实，有无穷多个这样的$V_1$，对每个$\varphi\in\Gamma$都有一个)，使得$\lambda$在$V_1$上是一一的，

且 $\lambda(V_1)=D_1$. 每个这样的 $V_1$ 最多与区域 $\varphi(Q)$ 的两个相交. 对应于 $V_1$ 的每一种选取, 存在函数 $\psi_1\in H(D_1)$, 对所有 $z\in V_1$, 有 $\psi_1(\lambda(z))=z$.

若 $D_2$ 是 $\Omega$ 内另一圆盘, 且若 $D_1\cap D_2\neq\varnothing$, 则我们能选取一个对应的 $V_2$, 使得 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$. 因此函数元素 $(\psi_1,D_1)$ 和 $(\psi_2,D_2)$ 就将是彼此的直接解析延拓. 注意 $\psi_i(D_i)\subset\Pi^+$.

由于 $f$ 的值域位于 $\Omega$ 内, 故存在中心在零的圆盘 $A_0$ 使得 $f(A_0)$ 含于 $\Omega$ 内一圆盘 $D_0$ 中. 选取 $\psi_0\in H(D_0)$, 如上所述, 对 $z\in A_0$, 令 $g(z)=\psi_0(f(z))$, 并令 $\gamma$ 为平面内起点在零的任意曲线. $f\circ\gamma$ 的值域是 $\Omega$ 的紧子集. 因此, $\gamma$ 能被一个圆盘链 $A_0,\cdots,A_n$ 所覆盖, 使得每一个 $f(A_i)$ 包含于 $\Omega$ 内的一个圆盘 $D_i$ 中, 并且我们能选取 $\psi_i\in H(D_i)$, 使得对 $i=1,\cdots,n$, $(\psi_i,D_i)$ 是 $(\psi_{i-1},D_{i-1})$ 的直接解析延拓. 这样就给出了函数元素 $(g,A_0)$ 沿链 $\{A_0,\cdots,A_n\}$ 的一个解析延拓. 注意 $\psi_i\circ f$ 具有正的虚部.

由于 $(g,A_0)$ 能沿平面内每一条曲线解析延拓, 而平面是单连通的, 所以由单值性定理推出 $g$ 能扩展成一个整函数. 同时, $g$ 的值域是在 $\Pi^+$ 内. 因此, $(g-i)/(g+i)$ 是有界的, 又由 Liouville 定理, 因而是常数. 这也就表明了 $g$ 是常数, 并且, 由于 $\psi_0$ 在 $f(A_0)$ 上是一一的, 而 $A_0$ 是非空开集, 所以我们最终得出 $f$ 是常数.

## 习　题

1　假设 $f(z)=\sum a_n z^n$, $a_n\geqslant 0$, 且这级数的收敛半径为1. 证明 $f$ 在 $z=1$ 有奇点. 提示: 把 $f$ 展为 $\left(z-\frac{1}{2}\right)$ 的幂级数. 若 1 为 $f$ 的正则点, 则新级数在某个 $x>1$ 处收敛. 对原来的级数这将意味着什么?

2　假设 $(f,D)$ 及 $(g,D)$ 都是函数元素, $P$ 是两个变量的多项式, 且在 $D$ 内, $P(f,g)=0$. 假设 $f$ 和 $g$ 能沿一曲线 $\gamma$ 解析延拓到 $f_1$ 和 $g_1$. 证明 $P(f_1,g_1)=0$. 试把这个结果推广到两个函数以上. 有没有关于一个比多项式类大一些的函数类 $P$ 的这样的定理?

3　假设$\Omega$为一单连通区域，且$u$为$\Omega$内的实调和函数．证明存在函数$f\in H(\Omega)$，使得$u=\mathrm{Re}f$．证明对每一个非单连通的区域，这个结论是不成立的．

4　假设$X$为平面内闭单位正方形，$f$是$X$上的连续复函数，且$f$在$X$内无零点．证明存在$X$上的连续函数$g$，使得$f=e^g$．对哪一类空间$X$（不同于上面的正方形），这个结果也真确？

5　证明变换$z\to z+1$和$z\to -\frac{1}{z}$生成整个模群$G$．设$R$由满足$|x|<\frac{1}{2}$，$y>0$及$|z|>1$的所有$z=x+iy$再加上它们的有$x\leqslant 0$的那些极限点组成．证明$R$是$G$的基本区域．

6　证明$G$也由变换$\varphi$和$\psi$生成，此处

$$\varphi(z)=-\frac{1}{z},\quad \psi(z)=\frac{z-1}{z}$$

证明$\varphi$具有周期2，$\psi$具有周期3．

7　找出线性分式变换的复合与矩阵乘法之间的关系．试用这种关系作出定理16.19(c)的一个代数证明或习题5的第一部分的证明．

8　设$E$为实轴上的有正Lebesgue测度的紧集，$\Omega$为$E$相对于平面的余集，并定义

$$f(z)=\int_E\frac{dt}{t-z}\qquad (z\in\Omega)$$

回答下列问题：

(a)　$f$是否是常数？

(b)　$f$能扩展为整函数吗？

(c)　当$z\to\infty$时，$\lim zf(z)$存在吗？若存在，是什么？

(d)　$f$在$\Omega$内有没有全纯的平方根？

(e)　在$\Omega$内，$f$的实部是否有界？

(f)　在$\Omega$内，$f$的虚部是否有界？

[若(e)或(f)答复是有界，则给出一个界．]

(g)　如果$\gamma$为以$E$为它的内部的正向圆周，则$\int_\gamma f(z)dz$是什么？

(h)　在$\Omega$内，是否存在非常数的有界全纯函数$\varphi$？

9　针对

$$E=[-1,1]$$

的特殊场合验证你在习题 8 中的答案.

10 若在平面内的紧集$E$的余集上不存在非常数的有界全纯函数，则称集$E$为可去的.

(a) 证明每一个可数紧集是可去的.

(b) 若$E$为实轴的紧子集，且$m(E)=0$. 证明$E$是可去的. 提示：$E$能被总长度任意小的曲线所环绕. 如在第十章习题 25 那样应用 Cauchy 公式.

(c) 假设$E$是可去的，$\Omega$是一区域，$E\subset\Omega$，$f\in H(\Omega-E)$，且$f$有界. 证明$f$能扩展为$\Omega$内的全纯函数.

(d) 对不一定在实轴上的集$E$，叙述并证明与(b)部分相类似的结论.

(e) 证明平面上的(多于一点)紧连通子集没有一个是可去的.

11 对每一个正数$\alpha$，令$\Gamma_\alpha$为具有参数区间$(-\infty,\infty)$的路径，由

$$\Gamma_\alpha(t)=\begin{cases}-t-\pi i & (-\infty<t\leqslant-\alpha)\\ \alpha+\dfrac{\pi i t}{\alpha} & (-\alpha\leqslant t\leqslant\alpha)\\ t+\pi i & (\alpha\leqslant t<\infty)\end{cases}$$

定义. 设$\Omega_\alpha$为$\Gamma_\alpha^*$的余集的包含原点的分支，并定义

$$f_\alpha(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha}\frac{\exp(e^w)}{w-z}dw\qquad(z\in\Omega_\alpha)$$

证明若$\alpha<\beta$，则$f_\beta$是$f_\alpha$的解析延拓. 证明因此存在一个整函数，它在$\Omega_\alpha$的限制是$f_\alpha$. 证明对每个$e^{i\theta}\neq1$，

$$\lim_{r\to\infty}f(re^{i\theta})=0$$

(如通常一样，这里$r$为正数，$\theta$为实数.) 证明$f$不是常数. [提示：观察$f(r)$]. 如果

$$g=f\exp(-f)$$

证明对每个$e^{i\theta}$，

$$\lim_{r\to\infty}g(re^{i\theta})=0$$

证明存在一个整函数$h$，使得

$$\lim_{n\to\infty}h(nz)=\begin{cases}1 & 当\ z=0\\ 0 & 当\ z\neq0\end{cases}$$

12 假设

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z-z^2}{2}\right)^{2k}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$$

找出一个区域，在这区域内这两个级数收敛. 指出这个例子说明了定理16.5. 找出最接近于原点的 $f$ 的奇点.

13 设 $\Omega=\left\{z:\frac{1}{2}<|z|<2\right\}$. 对 $n=1,2,3,\cdots$, 设 $X_n$ 是所有的 $g\in H(\Omega)$ 的 $n$ 阶导函数 $f\in H(\Omega)$ 的集. [换句话说, $X_n$ 是以 $H(\Omega)$ 为定义域的微分算子 $D^n$ 的值域.]

(a) 证明当且仅当 $\int_\gamma f(z)dz=0$, 这里 $\gamma$ 是正向单位圆周时 $f\in X_1$.

(b) 证明对每一个 $n$, 当且仅当 $f$ 能扩展为 $D(0;2)$ 内的全纯函数时 $f\in X_n$.

# 第十七章 $H^p$-空间

这一章致力于研究由一定的增长条件所确定的 $H(U)$ 的某些子空间；事实上，它们全都包含在第十五章所定义的类 $N$ 内. 这些所谓 $H^p$-空间(由 G. H. Hardy 命名)具有大量的与因式分解、边界值以及用 $U$ 的边界上的测度表达的 Cauchy 型表示有关的有趣的性质. 我们只打算给出一些最重要的结果，比如，对所有的 $n<0$ Fourier 系数 $\hat{\mu}(n)$ 为 0 的测度 $\mu$ 的 F. Riesz 和 M. Riesz 定理，$H^2$ 的不变子空间的 Beurling 分类，以及关于共轭函数的 M. Riesz 定理.

解决这个问题的一个方便的方法是运用次调和函数，我们从简要地列述它们的性质开始.

## 次调和函数

**17.1 定义** 定义在平面内开集 $\Omega$ 上的一个函数 $u$ 称为次调和函数，如果它具有下列四个性质：

(*a*) $-\infty\leqslant u(z)<\infty$ 对所有的 $z\in\Omega$ 成立.

(*b*) $u$ 在 $\Omega$ 内是上半连续的.

(*c*) 当 $\bar{D}(a;r)\subset\Omega$ 时，有

$$u(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(a+re^{i\theta})d\theta$$

(*d*) (*c*)中的积分没有一个是 $-\infty$.

注意(*c*)中的积分永远存在，并且不是 $+\infty$，因为(*a*)和(*b*)蕴涵着 $u$ 在每一个紧集 $K\subset\Omega$ 上是上有界的. [证明：若 $K_n$ 是所有

的使得 $u(z)\geqslant n$ 的 $z\in K$ 的集，则 $K\supset K_1\supset K_2\supset\cdots$，所以或者是对某一个 $n$，$K_n=\varnothing$，或者是 $\bigcap K_n=\varnothing$. 在后一种情况下，必有某一个 $z\in K$，$u(z)=\infty$. ]因此(d)保证(c)中的被积函数属于 $L^1(T)$.

每一个实的调和函数显然是次调和函数.

**17.2 定理** 如果 $u$ 是 $\Omega$ 内的次调和函数，$\varphi$ 是 $R^1$ 上的单调增加的凸函数，则 $\varphi\circ u$ 是次调和函数.

[为使 $\varphi\circ u$ 在 $\Omega$ 的所有点上有定义，我们令 $\varphi(-\infty)=\lim\varphi(x)$，即当 $x\to-\infty$ 时的极限. ]

**证明** 首先，因为 $\varphi$ 是递增且连续的，所以 $\varphi\circ u$ 是上半连续的. 其次，若 $\bar{D}(a;r)\subset\Omega$，则有

$$\varphi(u(a))\leqslant\varphi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(a+re^{i\theta})d\theta\right)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u(a+re^{i\theta}))d\theta$$

因为 $\varphi$ 是递增的而 $u$ 是次调和的，这些不等式中的前一个成立；从 $\varphi$ 的凸性根据定理 3.3 便得出后一个不等式.

**17.3 定理** 如果 $\Omega$ 是一个区域，$f\in H(\Omega)$，并且 $f$ 不恒等于 0，则 $\log|f|$ 是 $\Omega$ 内的次调和函数，从而 $\log^+|f|$ 和 $|f|^p$ $(0<p<\infty)$ 同样也是次调和的.

**证明** 如果 $f(z)=0$ 时，我们理解 $\log|f(z)|=-\infty$. 则 $\log|f|$ 是在 $\Omega$ 内上半连续的，并且定理 15.19 蕴涵着 $\log|f|$ 是次调和的.

我们如果在定理 17.2 中，以 $\log|f|$ 代替 $u$，而

$$\varphi(t)=\max(0,t)\text{和}\varphi(t)=e^{pt}$$

应用这个定理，则得出另外那两个结论.

**17.4 定理** 假定 $u$ 是 $\Omega$ 内的连续次调和函数，$K$ 是 $\Omega$ 的紧子集，$h$ 是 $K$ 上的连续实函数，$h$ 在 $K$ 的内部 $V$ 内是调和的，并且在 $K$ 的所有边界点上 $u(z)\leqslant h(z)$ 成立. 则 $u(z)\leqslant h(z)$ 对所有的 $z\in K$ 成立.

这个定理解释了"次调和"这一名词的含义. 这里 $u$ 的连续性不是必须的，但是我们将不需要这个一般情形，并且留它作为一个练习.

**证明** 令 $u_1 = u - h$，为了得出矛盾，假设对某一个 $z \in V$，$u_1(z) > 0$ 成立. 因为 $u_1$ 在 $K$ 上是连续的，$u_1$ 在 $K$ 上达到它的最大值 $m$；因为在 $K$ 的边界上 $u_1 \leqslant 0$ 成立，集 $E = \{z \in K; u_1(z) = m\}$ 是一个 $V$ 的非空紧子集. 设 $z_0$ 是 $E$ 的一个边界点. 则对于某一个 $r > 0$ 有 $\bar{D}(z_0; r) \subset V$，但是 $\bar{D}(z_0; r)$ 的边界的某一段子弧位于 $E$ 的余集内. 因此

$$u_1(z_0) = m > \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

这就意味着 $u_1$ 在 $V$ 内不是次调和的. 但是若 $u$ 是次调和的，根据调和函数的平均值性质，$u - h$ 也是次调和的，得出矛盾.

**17.5 定理** 假定 $u$ 是 $U$ 内的连续次调和函数，并且

(1) $$m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta})d\theta \qquad (0 \leqslant r < 1)$$

如果 $r_1 < r_2$，则 $m(r_1) \leqslant m(r_2)$.

**证明** 设 $h$ 是 $\bar{D}(0; r_2)$ 上的连续函数，它在 $\bar{D}(0; r_2)$ 的边界上与 $u$ 一致，而且在 $D(0; r_2)$ 内是调和的. 根据定理 17.4，在 $D(0; r_2)$ 内 $u \leqslant h$ 成立. 因此

$$m(r_1) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(r_1 e^{i\theta})d\theta = h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(r_2 e^{i\theta})d\theta = m(r_2)$$

## $H^p$ 空间和 $N$ 空间

**17.6 定理** 如果 $f \in H(U)$，且

$$M_0(f; r) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta\right\}$$

$$M_p(f;r)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p}\qquad(0<p<\infty)$$

$$M_\infty(f;r)=\sup_\theta|f(re^{i\theta})|$$

则 $M_0$、$M_p$、$M_\infty$ 都是$[0,1)$上的 $r$ 的单调递增函数.

**证明** 对于 $M_0$ 和 $M_p$，这是定理 17.3 和17.5 的直接推论. 对于 $M_\infty$，它可以从最大模定理得出.

这就提示了下列的定义

**17.7 定义** 对任一 $f\in H(U)$和对 $0\leqslant p\leqslant\infty$，我们令

$$\|f\|_p=\lim_{r\to 1}M_p(f;r)$$

这里 $M_p(f;r)$与定理 17.6 中的一样.

对于 $0<p\leqslant\infty$，类 $H^p$ 定义为由所有使得$\|f\|_p<\infty$ 的那些 $f\in H(U)$组成. 注意这和我们在 $p=\infty$ 情况下原先引出的术语是一致的.

类$N$是由所有$\|f\|_0<\infty$的那些 $f\in H(U)$组成.

若$0<s<p<\infty$，显然有 $H^\infty\subset H^p\subset H^s\subset N$.

**17.8 评注** 对于$1\leqslant p\leqslant\infty$，$\|f\|_p$满足三角不等式，所以$H^p$是一个赋范线性空间. 为了看出这点，对 $M_p(f;r)$ 应用 Minkowski 不等式:

(1) $\quad M_p(f+g;r)\leqslant M_p(f;r)+M_p(g;r)\qquad(0\leqslant r<1)$

当 $r\to1$时，我们获得

(2) $$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$$

如果$1\leqslant p\leqslant\infty$，实际上，$H^p$ 是一个 Banach 空间：为了证明完备性，假定$\{f_n\}$是 $H^p$ 内的 Cauchy 序列，$|z|\leqslant r<R<1$，对 $f_n-f_m$沿着半径为$R$的圆周积分，应用 Cauchy 公式，这就导出不等式

$$(R-r)|f_n(z)-f_m(z)|\leqslant M_1(f_n-f_m;R)$$
$$\leqslant M_p(f_n-f_m;R)\leqslant\|f_n-f_m\|_p$$

于是我们得出$\{f_n\}$在$U$的紧子集上一致收敛于一个函数$f\in H(U)$。给定$\varepsilon>0$，则存在一个$m$，使得对所有的$n>m$，$\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon$，因此对每一个$r<1$，

$$M_p(f-f_m;r)=\lim_{n\to\infty}M_p(f_n-f_m;r)\leqslant\varepsilon$$

这就给出当$m\to\infty$时，$\|f-f_m\|\to 0$.

对于$p<1$，$H^p$仍然是一个向量空间，但$\|f\|_p$不再满足三角不等式.

我们曾在定理15.23看到过：任一$f\in N$的零点满足Blaschke条件$\Sigma(1-|\alpha_n|)<\infty$. 因此，对每个$H^p$，结论仍然真确. 有趣的是：任一$f\in H^p$的零点在不增加范数的情况下能够被除去.

**17.9 定理** 假定$f\in N$，$f\not\equiv 0$. $B$是由$f$的零点所构成的Blaschke乘积. 令$g=f/B$. 则$g\in N$，且$\|g\|_0=\|f\|_0$.

进而言之，若$f\in H^p$，则$g\in H^p$，且$\|g\|_p=\|f\|_p(0<p\leqslant\infty)$.

**证明** 首先注意到

$$|g(z)|\geqslant|f(z)|\qquad(z\in U)\tag{1}$$

事实上，对每一个$z\in U$，严格的不等号能成立. 除非$f$在$U$内不存在零点，在这种情况下，$B=1$和$g=f$.

若$s$和$t$是非负实数，不等式

$$\log^+(st)\leqslant\log^+s+\log^+t\tag{2}$$

成立. 因为如果$st<1$，(2)式的左边为0；如果$st>1$，(2)式的左边为$\log s+\log t$. 因为$|g|=|f|/|B|$，(2)给出

$$\log^+|g|\leqslant\log^+|f|+\log\frac{1}{|B|}\tag{3}$$

根据定理15.24，(3)蕴涵着$\|g\|_0\leqslant\|f\|_0$，并且因为(1)成立，我们实际上有$\|g\|_0=\|f\|_0$.

现在假定对某个$p>0$，$f\in H^p$. 设$B_n$是由$f$的前$n$个零点所构成的有限Blaschke乘积（把重根计算在内，我们依某一顺序排

列这些零点). 对每一个 $n$, 令 $g_n=f/B_n$, 当 $r\to 1$ 时, $|B_n(re^{i\theta})|\to 1$ 一致地成立. 因此 $\|g_n\|_p\to\|f\|_p$. 当 $n\to\infty$ 时, $|g_n|$ 增加到 $|g|$. 所以, 根据单调收敛定理, 对所有的 $r<1$, 有

$$(4)\qquad M_p(g;r)=\lim_{n\to\infty}M_p(g_n;r)\qquad(0<r<1)$$

(4)的右边至多是 $\|f\|_p$, 若我们令 $r\to 1$, 便得到 $\|g\|_p\leqslant\|f\|_p$. 象前面一样, 现在从(1)得出等式.

## $H^2$ 空间

$H^2$ 的特殊重要性是由于它是一个 Hilbert 空间, 而且很容易地把它和 $L^2(T)$ 的某一个子空间等同起来, 这里 $T$ 是单位圆周. 我们回顾一下, 任意一个 $g\in L^2(T)$ 的范数是

$$\|g\|_2=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(e^{i\theta})|^2d\theta\right\}^{1/2}$$

并且每一个 $g\in L^2(T)$ 有 Fourier 系数

$$\hat{g}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$H^2$ 的基本性质概括在下列定理中.

**17.10 定理**

(a) 形如

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{0}^{\infty}a_nz^n\qquad(z\in U)$$

的一个函数 $f\in H(U)$ 当且仅当 $\Sigma|a_n|^2<\infty$ 时是 $H^2$ 中的函数. 在这种情况下,

$$(2)\qquad \|f\|_2=\left\{\sum_{0}^{\infty}|a_n|^2\right\}^{1/2}$$

(b) 如果 $f\in H^2$, 则在 $T$ 的几乎所有各点, $f$ 具有径向极限 $f^*(e^{i\theta})$, $f^*\in L^2(T)$; 若 $n\geqslant 0$, $f^*$ 的第 $n$ 个 Fourier 系数为 $a_n$, 若 $n<0$, $f^*$ 的

第 $n$ 个 Fourier 系数为 0；$L^2$-逼近

$$(3)\qquad \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f^*(e^{i\theta})-f(re^{i\theta})|^2 d\theta=0$$

成立；并且 $f$ 不但是 $f^*$ 的 Cauchy 积分，而且也是 $f^*$ 的 Poisson 积分：若 $z=re^{i\theta}$，则

$$(4)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f^*(e^{it})dt$$

和

$$(5)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f^*(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

这里 $\Gamma$ 是正向单位圆周.

(c)映射 $f\to f^*$ 是一个 $H^2$ 到 $L^2(T)$ 的一个子空间上的等距映射，这个子空间是由对所有的 $n<0$，$\hat{g}(n)=0$ 的那些 $g\in L^2(T)$ 所组成.

**证明** 直接计算(Parseval 定理)指出，

$$(6)\qquad M_2(f;r)=\left\{\sum_{0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\right\}^{1/2}\qquad (0\leqslant r<1)$$

这便证明了(a).

现在假定 $f\in H^2$，对 $0<s<1$ 用下式在 $T$ 上定义函数 $f_s$，

$$(7)\qquad f_s(e^{i\theta})=f(se^{i\theta})=\sum_{0}^{\infty}a_n s^n e^{in\theta}$$

因为 $\Sigma|a_n|^2<\infty$，Riesz-Fischer 定理保证函数 $g\in L^2(T)$ 的存在性，使得 $n\geqslant 0$ 时，$\hat{g}(n)=a_n$，$n<0$ 时，$\hat{g}(n)=0$. $g-f_s$ 的 Fourier 系数当 $n\geqslant 0$ 时是 $(1-s^n)a_n$. 所以再一次应用 Parseval 定理指出了

$$(8)\qquad \|g-f_s\|_2^2=\sum_{1}^{\infty}(1-s_n)^2|a_n|^2$$

当 $s\to 1$ 时,(8)的右边趋于 0,我们得到了

$$\lim_{s\to 1}\|g-f_s\|_2=0 \tag{9}$$

对任一固定的 $s\in(0,1)$, $f(sz)$ 在 $D\left(0;\frac{1}{s}\right)$ 内是全纯函数. 因此,如果 $z\in U$ 和 $z=re^{i\theta}$, 我们有

$$f(sz)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f_s(e^{it})dt \tag{10}$$

和

$$f(sz)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_s(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{11}$$

考虑这些积分和用 $g$ 代替 $f_s$ 时所对应的积分之间的差. Schwarz 不等式和(9)结合在一起,便给出了用 $g$ 代替 $f^*_4$ 的(4)式和(5)式. 所以 $f$ 是 $g$ 的 Poisson 积分; 并且因为 $g\in L^1(T)$, 定理 11.12的推论指出 $f$ 的径向极限存在,并且在 $T$ 上 a. e. 趋于 $g$. 这就证明了($b$).

从(3)可得出 $\|f^*\|_2=\|f\|_2$. ($b$)的证明指出,对于 $n<0$, $f^*$ 的所有的 Fourier 系数均为 0. 为了完成($c$)的证明, 假定 $g\in L^2(T)$ 和对所有的 $n<0$, $\hat{g}(n)=0$. 并且令

$$f(z)=\sum_0^\infty \hat{g}(n)z^n \tag{12}$$

则根据($a$), $f\in H^2$, ($b$)的证明指出 $f^*=g$.

**17.11 评注** 假定对某个 $p>0$, $f\in H^p$, $B$ 是由 $f$ 的零点所构成的 Blaschke 乘积, $g=f/B$. 定理 17.9 指出 $g\in H^p$, 甚至指出 $\|g\|_p=\|f\|_p$. 因为 $g$ 在 $U$ 内不存在零点,并且 $U$ 是单连通的, 因而存在 $\varphi\in H(U)$, 使得 $\exp(\varphi)=g$(定理 13.11). 令 $h=\exp(p\varphi/2)$. 则 $h\in H(U)$, 并且 $|h|^2=|g|^p$, 因此 $h\in H^2$. 事实上 $\|h\|_2^2=\|g\|_p^p$.

于是 $f$ 具有下列形式的因式分解

(1) $$f=B\cdot h^{2/p}$$

这里 $h\in H^2$ 并且 $h$ 在 $U$ 内不存在零点. 这使得在许多情况下，把 $H^2$ 空间的结果应用于任一 $H^p$ 空间的函数成为可能. 以后的证明用到这个技巧.

**17.12 定理** 如果 $f\in H^1$，则

(1) $$f^*(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1}f(re^{i\theta})$$

在 $T$ 的几乎所有点上存在，并且

(2) $$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f^*(e^{i\theta})-f(re^{i\theta})|d\theta=0$$

**证明** 从定理 11.19 的系得出极限(1)a.e. 存在. 若 $B$ 是由 $f$ 的零点所构成的 Blaschke 乘积，上面的评注指出：存在一个 $h\in H^2$，使得 $h^2=f/B$ 和 $\|h\|_2^2=\|f\|_1$. 令 $g=Bh$. 则 $g\in H^2$，$\|g\|_2=\|h\|_2$，并且 $f=gh$. 我们已经分解 $f$ 为两个属于 $H^2$ 的函数的乘积.

在 $T$ 上用 $f_r(e^{i\theta})=f(re^{i\theta})$ 定义 $f_r$，并用同样的方式定义 $g_r$ 和 $h_r$. 因为 $f^*=g^*h^*$a.e.，我们有

(3) $$f^*-f_r=g^*(h^*-h_r)+h_r(g^*-g_r)$$

根据定理 17.10，当 $r\to 1$ 时，$\|h^*-h_r\|_2\to 0$ 和 $\|g^*-g_r\|_2\to 0$. 同时

(4) $$\|g^*\|_2^2=\|g\|_2^2=\|f\|_1$$

以及

(5) $$\|h_r\|_2^2\leq\|h\|_2^2=\|f\|_1$$

如果我们把 Schwarz 不等式应用到(3)式右边两项乘积的每一个乘积上，我们便得出当 $r\to 1$ 时 $\|f^*-f_r\|_1\to 0$.

**系** 如果 $f\in H^1$，则 $f$ 是 $f^*$ 的 Poisson 积分和 Cauchy 积分.

**证明** 如果 $R<1$ 和 $g(z)=f(Rz)$，则 $g\in H(D)$，这里 $D=D\left(0;\frac{1}{R}\right)$. 因此，对 $z\in U$

$$f(Rz)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(R\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(Re^{it})}{e^{it}-z}e^{it}dt$$

现在固定 $z\in U$，让 $R\to 1$，并运用(2)式，这就给出了 Cauchy 表示式。同样的方式可获得 Poisson 表示式。

## F. Riesz 和 M. Riesz 定理

**17.13 定理** 如果 $\mu$ 是单位圆周 $T$ 上的复 Borel测度，并且

(1) $$\int_T e^{-int}d\mu(t)=0 \qquad (n=-1,-2,-3,\cdots)$$

则 $\mu$ 关于 Lebesgue 测度是绝对连续的。

**证明** 对于 $z\in U$，定义

(2) $$f(z)=\int_T\frac{d\mu(t)}{1-ze^{-it}}$$

若 $z=re^{i\theta}$，则

(3) $$(1-ze^{-it})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n e^{in(\theta-t)}$$

并且因为

(4) $$P_r(\theta-t)=\sum_{-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in(\theta-t)}$$

(1)说明：$f$ 也被 Poisson 积分(5)所给出

(5) $$f(z)=\int_T P_r(\theta-t)d\mu(t)$$

因此，

(6) $$M_1(f;r)\leqslant\int_T d|\mu|(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\theta=\|\mu\|$$

所以 $f\in H^1$。然而从定理 17.12 得出

(7) $$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f^*(e^{it})dt$$

这里 $f^*\in L^1(T)$。根据定理 11.19，比较(5)和(7)产生

$$d\mu(t)=\frac{1}{2\pi}f^*(e^{it})dt \tag{8}$$

这便给出了所要求的结论.

这个定理的值得注意的特征是：从一个表面上无关的条件(即，它的 Fourier 系数的一半为 0)，导出了测度的绝对连续. 近年来，这个定理已经推广到各种其它场合.

## 因式分解定理

从定理 17.9 我们已经知道：每一个 $f\in H^p$ (除去 $f=0$)，能分解为 Blaschke 乘积和一个在 $U$ 内没有零点的函数 $g\in H^p$. 同时也存在一个更为精巧的 $g$ 的因式分解. 粗略地说它与 $g$ 沿着某些半径趋于 0 的速度有关.

**17.14 定义** 一个*内函数*是指一个函数 $M\in H^\infty$，关于这个 $M$，$|M^*|=1$ a. e. 于 $T$ 上成立(象通常一样，$M^*$ 表示 $M$ 的径向极限).

如果 $\varphi$ 是 $T$ 上的正的可测函数，使得 $\log\varphi\in L^1(T)$，并且对 $z\in U$

$$Q(z)=c\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi(e^{it})dt\right\} \tag{1}$$

则 $Q$ 称为一个*外函数*，这里 $c$ 是一个常数，$|c|=1$.

定理 15.24 指出每一个 Blaschke 乘积是一个内函数，但也存在另外一些内函数. 它们可以描述如下.

**17.15 定理** *假定 $c$ 是一个常数，$|c|=1$，$B$ 是一个 Blaschke 乘积，$\mu$ 是 $T$ 上正的有限 Borel 测度，它关于 Lebesgue 测度是奇异的，且*

$$M(z)=cB(z)\exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right\}\qquad(z\in U) \tag{1}$$

*则 $M$ 是一个内函数，并且每一个内函数都是这种形式的函数.*

**证明** 如果(1)成立且 $g=M/B$，则 $\log|g|$ 是 $-d\mu$ 的 Poisson

积分，因此 $\log|g|\leqslant 0$，所以 $g\in H^\infty$，并且 $M\in H^\infty$ 同样是正确的. 同时，因为 $\mu$ 是奇异的，$D\mu=0$ a. e. 成立（定理8. 6），因此$\log|g|$的径向极限均是 0 a. e.（定理11. 12）. 因为$|B^*|=1$ a. e.，我们看出$M$是一个内函数.

反之，设 $B$ 是由给定的内函数$M$的零点所构成的 Blaschke 乘积，并且令 $g=M/B$. 则 $\log|g|$在$U$内是调和的. 定理 15. 24 和定理 17. 9 指出：在$U$内 $|g|\leqslant 1$，而在 $T$ 上 $|g^*|=1$ a. e. 于是$\log|g|<0$. 我们从定理 11. 19 得出，对$T$上的某个正测度 $\mu$，$\log|g|$是$-d\mu$的 Poisson 积分. 因为，在 $T$ 上 $\log|g^*|=0$ a. e.，我们有 $D\mu=0$ a. e. 于 $T$，所以 $\mu$ 是奇异的. 最后 $\log|g|$是函数

$$h(z)=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)$$

的实部. 这就蕴涵着对于某个常数 $c$，$|c|=1$，$g=c\cdot\exp(h)$成立. 于是$M$是形如(1)式的函数.

这就完成了证明.

不是 Blaschke 乘积的内函数的最简单的一个例子如下：取 $c=1$ 和 $B=1$，设 $\mu$ 是集中于 $t=0$ 的单位质量. 则

$$M(z)=\exp\left\{\frac{z+1}{z-1}\right\}$$

这个函数沿着端点在 $z=1$ 的半径很快地趋于 0.

**17.16 定理** 假定$Q$是一个象在定义 17. 14 里那样的与$\varphi$有关的外函数. 则

(a) $\log|Q|$是$\log\varphi$的 Poisson 积分.

(b) $\lim\limits_{r\to 1}|Q(re^{it})|=\varphi(e^{it})$ a. e. 于$T$.

(c) $Q\in H^p$ 当且仅当 $\varphi\in L^p(T)$，这时$\|Q\|_p=\|\varphi\|_p$.

**证明** 根据视察，(a)是明显的. 并且(a)蕴涵着在$T$上$\log|Q|$的径向极限 a. e. 等于$\log\varphi$，这就证明了(b). 若 $Q\in H^p$，Fatou 引

理蕴涵着$\|Q^*\|_p \leqslant \|Q\|_p$，所以根据(b)，$\|\varphi\|_p \leqslant \|Q\|_p$. 反之，若$\varphi \in L^p(T)$，则根据几何平均值与算术平均值之间的不等式(定理3.3)，有

$$|Q(re^{i\theta})|^p = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\log\varphi^p(e^{it})dt\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\varphi^p(e^{it})dt$$

如果将后一个不等式对$\theta$积分，我们发现当$p<\infty$时$\|Q\|_p \leqslant \|\varphi\|_p$. 而当$p=\infty$时，结论是明显的.

**17.17 定理** 假定$0<p\leqslant\infty$，$f\in H^p$，并且$f$不恒等于0. 则$\log|f^*|\in L^1(T)$，外函数

(1) $$Q_f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt\right\}$$

在$H^p$内，并且存在一个内函数$M_f$，使得

(2) $$f = M_f Q_f$$

进而有

(3) $$\log|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f^*(e^{it})|dt$$

当且仅当$M_f$为常数时(3)式内的等号成立.

函数$M_f$和$Q_f$分别称为$f$的内因式和$f$的外因式；$Q_f$仅依赖于$|f|$的边界值.

**证明** 我们首先假定$f\in H^1$. 如果$B$是由$f$的零点所构成的Blaschke乘积，且$g=f/B$. 则定理17.9指出$g\in H^1$；并且因为在$T$上$|g^*|=|f^*|$ a.e.，所以只须用$g$代替$f$来证明定理的结论就足够了.

这样，让我们假定$f$在$U$内不存在零点，并且假定$f(0)=1$. 则$\log|f|$在$U$内是调和的，$\log|f(0)|=0$. 又因为$\log=\log^+-\log^-$，故调和函数的平均值性质蕴涵着

(4) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^{-}|f(re^{i\theta})|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^{+}|f(re^{i\theta})|d\theta$$

$$\leqslant\|f\|_0\leqslant\|f\|_1$$

对 $0<r<1$ 成立. 从 Fatou 引理现在得出 $\log^{+}|f^*|$ 和 $\log^{-}|f^*|$ 二者都在 $L^1(T)$ 内. 因此 $\log|f^*|$ 也在 $L^1(T)$ 内.

这便证明了定义(1)是有意义的. 根据定理 17.16, $Q_f\in H^1$. 同时, 因为 $\log|f^*|\in L^1(T)$, 所以 $|Q_f^*|=|f^*|\neq 0$ a. e.. 如果我们能证明

(5) $$|f(z)|\leqslant Q_f(z)\qquad(z\in U)$$

则 $f/Q_f$ 将是一个内函数, 并且我们获得因式分解(2).

因为, $\log|Q_f|$ 是 $\log|f^*|$ 的 Poisson 积分, (5)式等价于不等式

(6) $$\log|f|\leqslant P[\log|f^*|]$$

这就是我们现在要证明的. 我们的记号如同第十一章里一样: $P[h]$ 是函数 $h\in L^1(T)$ 的 Poisson 积分.

对于 $|z|\leqslant 1$ 和 $0<R<1$, 令 $f_R(z)=f(Rz)$. 固定 $z\in U$, 则

(7) $$\log|f_R(z)|=P[\log^{+}|f_R|](z)-P[\log^{-}|f_R|](z)$$

因为对所有的实数 $u$ 和 $v$, $|\log^{+}u-\log^{+}v|\leqslant|u-v|$ 成立, 又因为当 $R\to 1$ 时 $\|f_R-f^*\|_1\to 0$(定理 17.12), 当 $R\to 1$ 时, (7)式的第一个 Poisson 积分收敛于 $P[\log^{+}|f^*|]$. 因此 Fatou 引理给出

(8) $$P[\log^{-}|f^*|]\leqslant\liminf_{R\to 1}P[\log^{-}|f_R|]=P[\log^{+}|f^*|]-\log|f|$$

这个不等式是与(6)相同的.

我们现在已经建立了因式分解(2). 若我们在(5)式中令 $z=0$, 我们便得到(3)式; 当且仅当 $|f(0)|=|Q_f(0)|$, 即: 当且仅当 $|M_f(0)|=1$ 时在(3)式里的等号成立; 因为 $\|M_f\|_\infty=1$, 所以这只有当 $M_f$ 是常数时才可能.

这就完成了对 $p=1$ 时的证明.

如果 $1<p\leqslant\infty$,则 $H^p\subset H^1$,因此剩下来要证明的只是 $Q_f\in H^p$. 但是如果 $f\in H^p$, 根据 Fatou 引理, 则 $|f^*|\in L^p(T)$; 因此根据定理 17.16(c), $Q_f\in H^p$.

若 $p<1$, 我们能够运用第 17.11 节所描述的技巧. 留下这些细节作为练习.

$\log|f^*|\in L^1(T)$ 这一事实有一个推论, 我们在证明中已经用到过, 但是它的重要性足以分开来叙述它.

**17.18 定理** 如果 $0<p\leqslant\infty$, $f\in H^p$, 且 $f$ 不恒等于 0, 则在 $T$ 的几乎所有点上, 有 $f^*(e^{i\theta})\neq 0$.

**证明** 若 $f^*=0$, 则 $\log|f^*|=-\infty$, 如果在一个正测度集上发生这种情况, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log|f^*(e^{it})|\,dt=-\infty$$

注意到定理 17.18 对于 $f\in H^p$ 的径向极限的零点的位置加上了一个定量的限制. 在 $U$ 内的零点也被 Blaschke 条件定量地限制了.

象通常一样, 我们能够把上面关于零点的结果重述为一个唯一性定理:

如果 $f\in H^p$, $g\in H^p$, 且在 $T$ 的某个 Lebesgue 测度是正的子集上 $f^*(e^{i\theta})=g^*(e^{i\theta})$, 则对所有的 $z\in U$, $f(z)=g(z)$.

**17.19** 让我们浏览一下类 $N$, 目的是看看在那里定理 17.17 和定理 17.18 还有多少东西保持正确. 如果 $f\in N$, $f\not\equiv 0$, 我们能用 Blaschke 乘积除 $f$, 得到一个商 $g$, 它在 $U$ 内不存在零点, 并且它属于 $N$(定理 17.9). 这时 $\log|g|$ 是调和的, 又因为

$$|\log|g||=2\log^+|g|-\log|g| \tag{1}$$

和

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(re^{i\theta})|\,d\theta=\log|g(0)| \tag{2}$$

我们看出 $\log|g|$ 满足定理 11.19 的假定，因此 $\log|g|$ 是一个实测度 $\mu$ 的 Poisson 积分. 于是

$$(3)\qquad f(z)=cB(z)\exp\left\{\int_T \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right\}$$

这里 $c$ 是一个常数，$|c|=1$，$B$ 是 Blaschke 乘积.

注意，$\log^+|g|$ 的积分是有界的（它是 $|g|$ 不太靠近 $\infty$ 的说法的定量表达）这一假定是如何蕴涵 $\log^-|g|$ 的积分的有界性（它是说 $|g|$ 不会在太多的地方太靠近 0 的）.

若 $\mu$ 是一个负测度，在(3)式中的指数因式是在 $H^\infty$ 内. 应用 Jordan 分解于 $\mu$，这就证明:

对每一个 $f\in N$，对应有两个函数 $b_1$ 和 $b_2\in H^\infty$，使得 $b_2$ 在 $U$ 内不存在零点，且 $f=b_1/b_2$.

因为 $b_2^*\neq 0$ a.e.，所以 $f$ a.e. 具有有限的径向极限. 同时 $f^*\neq 0$ a.e.

$\log|f^*|\in L^1(T)$ 成立吗？是的，并且其证明与定理 17.17 中给出的证明是一样的.

然而，定理 17.17 的不等式(3)，不再成立. 比如，若

$$(4)\qquad f(z)=\exp\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\}$$

则 $\|f\|_0=e$，$|f^*|=1$ a.e.，并且

$$(5)\qquad \log|f(0)|=1>0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f^*(e^{it})|dt$$

## 移位算子

**17.20 不变子空间** 考虑 Banach 空间 $X$ 上的有界线性算子 $S$；即是说，$S$ 是 $X$ 到 $X$ 内的有界线性变换. 如果 $X$ 的闭子空间 $Y$ 具有 $S(Y)\subset Y$ 的性质，我们称 $Y$ 为 $S$-不变子空间. 于是 $X$ 的 $S$-不变子空间恰好是由 $S$ 把自身映入自身的那些子空间.

一个算子 $S$ 的不变子空间的知识有助于我们想象出它的作用.(这是一个非常一般的、因而也是比较含混的原则:在研究任何一类变换中,了解该变换把什么东西保持不动.)比如,若 $S$ 是 $n$ 维向量空间 $X$ 上线性算子,如果 $S$ 有 $n$ 个线性独立的特征向量 $x_1,\cdots,x_n$,由这些 $x_i$ 中的任何一个所张成的一维空间是 $S$-不变的. 如果我们取 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 作为 $X$ 的一个基,我们就得到 $S$ 的一个非常简单的描述.

我们将描述 $l^2$ 上的称为"移位算子"$S$ 的不变子空间. 这里 $l^2$ 是所有复序列

(1) $$x=\{\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots\}$$

的空间,对于这些复序列

(2) $$\|x\|=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|\xi_n|^2\right\}^{1/2}<\infty$$

并且 $S$ 是把(1)式中给定的元素 $x\in l^2$ 变为

(3) $$Sx=\{0,\xi_0,\xi_1,\cdots\}$$

的变换. 显然 $S$ 是一个 $l^2$ 上的有界线性算子,并且 $\|S\|=1$.

一些 $S$-不变子空间可以立即看出:如果 $Y_k$ 是所有前 $k$ 个坐标均为 0 的 $x\in l^2$ 的集,则 $Y_k$ 是 $S$-不变的.

为了找到另外一些不变子空间,我们利用 $l^2$ 和 $H^2$ 之间的 Hilbert 空间的同构,把移位算子 $S$ 化为 $H^2$ 上的乘法算子. 问题在于乘法算子要比原来的序列空间 $l^2$ 的场合容易分析一些(因为作为全纯函数的空间 $H^2$ 具有比较丰富的构造).

我们对(1)式给定的每一个 $x\in l^2$ 联系一个函数

(4) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n z^n \qquad (z\in U)$$

根据定理 17.10,它定义了一个 $l^2$ 到 $H^2$ 上的线性一一映射. 如果

(5) $$y=\{\eta_n\},\ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n z^n$$

并且如果 $H^2$ 中的内积定义为

(6) $$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta})\overline{g^*(e^{i\theta})}d\theta$$

则 Parseval 定理指出 $(f,g)=(x,y)$. 于是我们获得一个 $l^2$ 到 $H^2$ 上的 Hilbert 空间的同构, 并且移位算子 $S$ 转化为 $H^2$ 上的乘法算子(我们继续用 $S$ 记它):

(7) $$(Sf)(z)=zf(z)\quad (f\in H^2,\ z\in U)$$

上面提及的不变子空间 $Y_k$ 现在可看出由所有的这些 $f\in H^2$ 所组成, 这些 $f$ 在原点至少具有 $k$ 阶零点. 这就给出一个线索: 对于任何有限集 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}\subset U$, 所有使得 $f(\alpha_1)=\cdots=f(\alpha_k)=0$ 的那些 $f\in H^2$ 的空间 $Y$ 是 $S$-不变的. 如果 $B$ 是以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 为零点的有限 Blaschke 乘积, 则当且仅当 $f/B\in H^2$ 时 $f\in Y$. 于是 $Y=BH^2$.

这就联想到无限的 Blaschke 乘积也可能导致 $S$-不变子空间, 更加一般地, Blaschke 乘积可能用任意的内函数 $\varphi$ 代替. 不难看出每一个 $\varphi H^2$ 是 $H^2$ 的闭 $S$-不变子空间. 但是 $H^2$ 的每一个闭的 $S$-不变子空间都是这种形式的空间, 则是一个比较深入的结果.

**17.21 Beurling 定理**

(*a*) 对每一个内函数 $\varphi$, 空间

(1) $$\varphi H^2=\{\varphi f: f\in H^2\}$$

是 $H^2$ 的闭的 $S$-不变子空间.

(*b*) 若 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 都是内函数, 且 $\varphi_1 H^2=\varphi_2 H^2$, 则 $\varphi_1/\varphi_2$ 是常数.

(*c*) 除 $\{0\}$ 以外, $H^2$ 的每一个闭的 $S$-不变子空间 $Y$ 包含一个内函数 $\varphi$, 使得 $Y=\varphi H^2$.

**证明** $H^2$ 是 Hilbert 空间，它的范数为

$$\|f\|_2=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f^*(e^{i\theta})|^2d\theta\right\}^{1/2} \tag{2}$$

如果 $\varphi$ 是一个内函数，则 $|\varphi^*|=1$ a. e.，映射 $f\to\varphi f$ 因此是 $H^2$ 到 $H^2$ 内的一个等距；因为是等距的，它的值域 $\varphi H^2$ 是 $H^2$ 的闭子空间. [证明：如果在 $H^2$ 内 $\varphi f_n\to g$，则 $\{\varphi f_n\}$ 是一个 Cauchy 序列，因此 $\{f_n\}$ 也是 Cauchy 序列，从而 $f_n\to f\in H^2$，所以 $g=\varphi f\in\varphi H^2$.] 因为 $z\cdot\varphi f=\varphi\cdot zf$，$\varphi H^2$ 的 $S$-不变性也是显而易见的. 因此 $(a)$ 成立.

如果 $\varphi_1H^2=\varphi_2H^2$，则对某个 $f\in H^2$，$\varphi_1=\varphi_2 f$. 因此 $\varphi_1/\varphi_2\in H^2$. 类似地，$\varphi_2/\varphi_1\in H^2$. 令 $\varphi=\varphi_1/\varphi_2$ 和 $h=\varphi+(1/\varphi)$. 则 $h\in H^2$，因为在 $T$ 上 $|\varphi^*|=1$ a. e.，$h^*$ 在 $T$ 上几乎处处是实的. 因此 $h$ 是 $h^*$ 的 Poisson 积分. 这便得出 $h$ 在 $U$ 内是实的. 因此 $h$ 是常数. 这时 $\varphi$ 必须是常数. $(b)$ 得证.

$(c)$ 的证明将用到由 Helson 和 Lowdenslager 开创的一个方法. 假定 $Y$ 是 $H^2$ 的一个闭的 $S$-不变子空间，它不是单独由 0 组成. 则存在一个最小整数 $k$，使得 $Y$ 包含一个下列形式的函数 $f$

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}c_nz^n \qquad c_k=1 \tag{3}$$

这时 $f\notin zY$，此处我们把形如 $g(z)=zf(z)$，$f\in Y$ 的所有的 $g$ 的集记作 $zY$. 这就得出 $zY$ 是一个 $Y$ 的真闭子空间. [用在 $(a)$ 的证明中用过的论证得出闭性.] 所以 $Y$ 包含一个正交于 $zY$ 的非零向量(定理 4.11).

所以存在一个 $\varphi\in Y$，使得 $\|\varphi\|_2=1$ 以及 $\varphi\perp zY$. 因此 $\varphi\perp z^n\varphi$，对 $n=1, 2, 3, \cdots$ 成立. 根据 $H^2$ 中的内积的定义[见 17.20(6)]，这意味着

$$(4)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi^*(e^{i\theta})|^2e^{-in\theta}d\theta=0\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

如果我们对这些方程的左边用它们的复共轭代替，即，若我们用 $-n$ 代替 $n$，这些方程保持不变．于是 $|\varphi^*|^2\in L^1(T)$ 的全体 Fourier 系数除了对应于 $n=0$ 的那个等于 1 以外，其余都是 0．因为 $L^1$-函数是由它们的 Fourier 系数所确定的（定理 5.15），这就得出在 $T$ 上 $|\varphi^*|=1$ a.e.．但是 $\varphi\in H^2$，所以 $\varphi$ 是 $\varphi^*$ 的 Poisson 积分，因此 $|\varphi|\leqslant 1$．我们得出了 $\varphi$ 是一个内函数．

因为 $\varphi\in Y$，并且 $Y$ 是 $S$-不变的，对于所有 $n\geqslant 0$ 有 $\varphi z^n\in Y$，因此对每一个多项式 $P$ 有 $\varphi P\in Y$．而这些多项式是在 $H^2$ 内稠密的（根据 Parseval 定理，任一 $f\in H^2$ 的幂级数的部分和依 $H^2$ 的范数收敛于 $f$），又因为 $Y$ 是闭的，并且 $|\varphi|\leqslant 1$，这就得出 $\varphi H^2\subset Y$．我们必须证明这个包含关系不是真正的包含．因为 $\varphi H^2$ 是闭的，所以只须证明 $h\in Y$ 和 $h\perp\varphi H^2$ 的假定蕴涵着 $h=0$ 即可．

如果 $h\perp\varphi H^2$，则对 $n=0,1,2,\cdots$，$h\perp\varphi z^n$，或者

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h^*(e^{i\theta})\overline{\varphi^*(e^{i\theta})}\,e^{-in\theta}d\theta=0\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

如果 $h\in Y$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $z^nh\in zY$，我们对 $\varphi$ 的选取表明 $z^nh\perp\varphi$，或者

$$(6)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h^*(e^{i\theta})\overline{\varphi^*(e^{i\theta})}\,e^{-in\theta}d\theta=0\qquad (n=-1,-2,-3,\cdots)$$

于是 $h^*\overline{\varphi^*}$ 的所有的 Fourier 系数均为 0，因此在 $T$ 上 $h^*\overline{\varphi^*}=0$ a.e.；又因为 $|\varphi^*|=1$ a.e. 成立，我们有 $h^*=0$ a.e.．所以 $h=0$．证明完毕．

**17.22　评注**　如果我们把定理 17.15 和定理 17.21 结合起来，就可以看出：$H^2$ 的 $S$-不变子空间可用下列两组数据刻划：一个复数序列 $\{\alpha_n\}$（可能是有限的，甚至是空集），使得 $|\alpha_n|<1$ 和

$\Sigma(1-|\alpha_n|)<\infty$,以及 $T$ 上的一个正的Borel 测度 $\mu$,它关于 Lebesgue 测度是奇异的(所以 $D\mu=0$ a. e.). 找出用 $\{\alpha_n\}$ 和 $\mu$ 的语言叙述的条件, 以保证 $H^2$ 的一个 $S$-不变子空间包含另一个 $S$-不变子空间, 这是不难的(我们把它留作练习). 这样看得出所有的 $S$-不变子空间的半序集具有极其复杂的构造, 它比从 $l^2$ 上的移位算子的简单定义中所能料想到的要复杂得多.

我们用定理 17.21 的一个浅易的推论结束这一节. 这个推论依赖于定理 17.17 中所描述的因式分解.

**17.23 定理** 假定 $M_f$ 是 $f\in H^2$ 的内因式, $Y$ 是包含 $f$ 的 $H^2$ 的最小的闭 $S$-不变子空间. 则

(1) $$Y=M_fH^2$$

特别, 当且仅当 $f$ 是一外函数时 $Y=H^2$.

**证明** 设 $f=M_fQ_f$ 是分解 $f$ 为它的内因式和外因式之积的分解式. 显然 $f\in M_fH^2$; 又因为 $M_fH^2$ 是闭的和 $S$-不变的, 我们有 $Y\subset M_fH^2$.

另一方面, 定理 17.21 指出, 存在一个内函数 $\varphi$, 使得 $Y=\varphi H^2$. 因为 $f\in Y$, 存在一个 $h=M_hQ_h\in H^2$, 使得

(2) $$M_fQ_f=\varphi M_hQ_h$$

因为内函数的绝对值在 $T$ 上 a. e. 为 1, (2)蕴涵着 $Q_f=Q_h$, 因此 $M_f=\varphi M_h\in Y$, 因而 $Y$ 必须包含最小的含有 $M_f$ 的 $S$-不变闭子空间. 于是 $M_fH^2\subset Y$. 这就完成了证明.

用两个问题小结这些结果可能是有趣的, 这些结果将提供问题的答案.

如果 $f\in H^2$, 什么样的函数 $g\in H^2$ 能够用形如 $fP$ 的函数依 $H^2$ 的范数逼近? 这里 $P$ 跑遍所有的多项式. 答案: 恰好是使 $g/M_f\in H^2$ 的这些 $g$.

对于什么样的 $f\in H^2$, 集 $\{fP\}$ 在 $H^2$ 内稠密是正确的? 答案:

恰好是那些满足

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f^*(e^{it})|dt$$

的函数 $f$.

## 共轭函数

**17.24 问题的叙述** 在单位圆盘$U$内的每一个实的调和函数$u$是一个而且仅是一个使得$f(0)=u(0)$的$f\in H(U)$的实部. 如果$f=u+iv$, $f(0)=u(0)$这一要求也可以表示为$v(0)=0$的形式. 这个函数$v$叫做$u$的调和共轭函数或$u$的共轭函数.

象定理17.6一样, 定义$M_p(u;r)$(用$u$代替$f$). 因为$|u|$是次调和的, 定理17.6应用于$M_p(u;r)$, 因此若$p\geqslant 1$

$$\lim_{r\to 1}M_p(u;r)=\sup_{0<r<1}M_p(u;r) \tag{1}$$

我们将用$\|u\|_p$记这个共同的值.

现在提出了下列问题: $\|u\|_p$的有限性能蕴涵$\|v\|_p$的有限性吗?

这个问题等价于下面的问题: 若$\|u\|_p<\infty$, 必定有$f\in H^p$吗?

这个问题还有另一个表达形式, 它包含在习题25中.

如果$1<p<\infty$, 这个答案是肯定的(由M. Riesz给出). (对$p=1$和$p=\infty$, 这个答案是否定的; 见习题24.) 在定理17.26中将给出精确的叙述.

**17.25 引理** 假定$1<p\leqslant 2$, 则存在一个仅依赖于$p$的正的常数$B$, 使得

$$(1+B)(B\cos\beta)^p-B\cos p\beta\geqslant 1 \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

**证明** 令$B=(\cos\delta)^{-1}$, 这里$\delta$这样地选取使$(1+p)\delta=\pi$. 则$\delta<\pi/2$, 所以$B>0$并且$\cos p\delta=-\cos\delta$.

如果 $0\leqslant|\beta|\leqslant\delta$, 则$B\cos\beta\geqslant B\cos\delta=1$. 所以,(1)的左边至少是$(1+B)-B=1$.

如果 $\delta<|\beta|\leqslant\pi/2$, 则 $p\delta<p|\beta|<p\pi/2\leqslant\pi$, 所以

$$\cos p\beta<\cos p\delta=-1/B$$

因此、$-B\cos p\beta>1$, (1)式再一次成立.

**17.26 定理** 对满足 $1<p<\infty$ 的每个 $p$, 对应有一个常数 $A_p$, 使得不等式

$$\|v\|_p\leqslant A_p\|u\|_p \tag{1}$$

对$U$内的每一个实的调和函数 $u$ 成立, 其中 $v$ 是 $u$ 的调和共轭函数.

**证明** 我们首先假定 $1<p\leqslant 2$, 并且令 $f=u+iv$.

引理解决了在$U$内 $u>0$ 的情况. 由于 $f$ 在$U$内不存在零点, 又因为$U$是单连通的, 故存在一个 $g\in H(U)$, 使得 $f=e^g$, $g=\alpha+i\beta$(所以 $\alpha$ 和 $\beta$ 都是调和的), 并且 $\beta(0)=0$. 因为 $u>0$, 故在$U$内有$|\beta|<\pi/2$. 因为

$$u=e^\alpha\cos\beta=|f|\cos\beta \tag{2}$$

引理 17.25 指出

$$|f|^p\leqslant(1+B)B^pu^p-B|f|^p\cos p\beta \tag{3}$$

注意到$|f|^p\cos p\beta$是$\exp(pg)$的实部, 因而它也是调和的. 所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p\cos[p\beta(re^{i\theta})]d\theta=|f(0)|^p>0 \tag{4}$$

$$(0<r<1)$$

因此(3)的积分导致

$$\|f\|_p\leqslant C\|u\|_p \tag{5}$$

这里 $C=(1+B)^{1/p}B$.

这是证明的关键. 余下的只是例行手续并且能以不同的方式处理.

若在 $U$ 内$u>0$, 在$\overline{U}$上 $u$ 是连续的. 则(5)式可写成下列形式

(6) $$\|f\|_p\leqslant C\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(e^{it})^p dt\right)^{1/p}$$

现在假定 $u$ 在 $\overline{U}$ 上连续, 在 $U$ 内是实的和调和的, 并且对$z\in U$定义

(7) $$f_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}u^+(e^{it})dt=u_1(z)+iv_1(z)$$

用$u^-$代替$u^+$以同样的方式定义$f_2=u_2+iv_2$. 然后, 以$f_1$, $u_1$ 和$f_2$, $u_2$代替(6)式中的 $f$, $u$; 应用(6)式, 在 $T$ 上我们有$u_1=u^+\leqslant|u|$. 在$\overline{U}$上, $u=u_1-u_2$. 在 $U$ 内$f=f_1-f_2$. 这就得出一对 $f$, $u$ 满足以$2C$代替 $C$ 的(6)式. 因此, 假定 $u$ 是在 $\overline{U}$ 上连续, (1)式对 $A_p=2C$成立.

在一般情况下, 选取$R<1$, 并且对$z\in U$令$f_R(z)=f(Rz)$. 将上面的结果应用于$f_R$, 因此$\|u_R\|_p\leqslant\|u\|_p$, 我们得到

(8) $$\|f_R\|_p\leqslant A_p\|u_R\|_p\leqslant A_p\|u\|_p$$

对每一个 $R<1$成立. 因为$|v|\leqslant|f|$, 这就给出了(1).

我们现在已经证明在$1<p\leqslant2$ 时定理的结论成立.

为完成这个证明, 假定$2\leqslant q<\infty$, 并设 $p$ 是共轭于 $q$ 的指数.

设 $u$ 和 $v$ 如定理所述, 令$f=u+iv$, 并且设 $g(z)=\alpha(z)+i\beta(z)$是一个多项式, 使$g(0)$是实数. 我们要证

(9) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(re^{i\theta})\beta(e^{i\theta})d\theta=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(re^{i\theta})\alpha(e^{i\theta})d\theta$$

对$0<r<1$成立. 为看出这点, 注意到 $u\beta+v\alpha$是调和的. 它是 $fg$ 的虚部. 因此

(10) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[u(re^{i\theta})\beta(e^{i\theta})+v(re^{i\theta})\alpha(e^{i\theta})]d\theta$$
$$=u(0)\beta(0)+v(0)\alpha(0)$$

因为$\beta(0)=0$ 和 $v(0)=0$, 我们得到(9). Hölder不等式给出

$$(11)\qquad \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta})\alpha(e^{i\theta})\,d\theta\right| \leqslant \|u\|_q\|\beta\|_p \leqslant \|u\|_q A_p\|\alpha\|_p$$

因为实的三角多项式 $\alpha$ 的类在 $T$ 上的所有实的 $L^p$-函数空间里是稠密的. (11)和定理 6.16 指出

$$\|v\|_q \leqslant A_p\|u\|_q$$

我们现在已经证明了对 $2\leqslant q<\infty$ 时的定理并且我们看到 $A_q\leqslant A_p$. 如果我们对 $A_p$ 和 $A_q$ 取最小的允许值, 最后一道计算可以反过来, 我们就会发现 $A_p=A_q$.

## 习　题

1　对于上半连续的次调和函数, 证明定理 17.4 和定理 17.5.

2　假设 $f\in H(\Omega)$, 证明 $\log(1+|f|)$ 是在 $\Omega$ 内次调和的.

3　假定 $0<p\leqslant\infty$ 和 $f\in H(U)$, 证明 $f\in H^p$ 当且仅当在 $U$ 内存在一个调和函数 $u$, 使得对所有的 $z\in U$, $|f(z)|^p\leqslant u(z)$. 证明若存在 $|f|^p$ 的这样一个调和的优函数 $u$, 则存在一个最小的这样的函数, 记作 $u_f$. (说明显一点, $|f|^p\leqslant u_f$ 且 $u_f$ 是调和的; 若 $|f|^p\leqslant u$ 且 $u$ 是调和的, 则 $u_f\leqslant u$.) 证明 $\|f\|_p=u_f(0)^{1/p}$. 提示: 对 $R<1$ 考虑在 $D(0;R)$ 上的具有边界值 $|f|^p$ 的调和函数, 并且令 $R\to1$.

4　照样地证明当且仅当 $\log^+|f|$ 在 $U$ 内有调和的优函数时 $f\in N$.

5　假定 $f\in H^p$, $\varphi\in H(U)$, 以及 $\varphi(U)\subset U$. 能够得出 $f\circ\varphi\in H^p$ 吗? 用 $N$ 代替 $H^p$, 回答同样的问题.

6　如果 $0<r<s\leqslant\infty$, 证明 $H^s$ 是 $H^r$ 的真子类.

7　证明 $H^\infty$ 是 $p<\infty$ 时所有 $H^p$ 的交的真子类.

8　如果 $f\in H^1$ 并且 $f^*\in L^p(T)$, 证明 $f\in H^p$.

9　假定 $f\in H(U)$ 和 $f(U)$ 在平面内不是稠密的. 证明 $f$ 在 $T$ 的几乎所有的点上具有有限的径向极限.

10　固定 $\alpha\in U$. 证明映射 $f\to f(\alpha)$ 是 $H^2$ 上的有界线性泛函. 因为 $H^2$ 是 Hilbert 空间, 这个泛函能表示为和某个 $g\in H^2$ 的内积. 找出这个 $g$.

11　固定 $\alpha\in U$, 若 $\|f\|_2\leqslant1$, $|f'(\alpha)|$ 能够有多大? 找出极值函数. 对 $f^{(n)}(\alpha)$ 同样地做.

12　假定 $p\geqslant 1$, $f\in H^p$, 并且 $f^*$ 在 $T$ 上几乎处处是实的，证明 $f$ 是常数. 指出这个结果对每一个 $p<1$ 不成立.

13　假定 $f\in H(U)$ 和假定存在一个 $M<\infty$，使得 $f$ 将每一个半径 $r<1$ 中心为 0 的圆周映到长度至多是 $M$ 的一条曲线 $\gamma_r$ 上. 证明 $f$ 具有到 $\overline{U}$ 上的连续开拓, 并且 $f$ 在 $T$ 上的限制是绝对连续的.

14　假定 $\mu$ 是 $T$ 上的复 Borel 测度, 使得

$$\int_T e^{int}d\mu(t)=0 \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

证明或者 $\mu=0$, 或者 $\mu$ 的支集是整个 $T$.

15　假定 $K$ 是单位圆周 $T$ 的真紧子集. 证明 $K$ 上的每一个连续函数在 $K$ 上能够用多项式一致逼近. 提示: 应用习题 14.

16　完成定理 17.17 对于 $0<p<1$ 时的证明.

17　设 $\varphi$ 是非常数的内函数, 它在 $U$ 内没有零点.

(a) 证明若 $p>0$ 则 $1/\varphi\notin H^p$.

(b) 证明至少存在一个 $e^{i\theta}\in T$, 使得 $\lim\limits_{r\to 1}\varphi(re^{i\theta})=0$.

提示: $\log|\varphi|$ 是一个非负的调和函数.

18　假定 $\varphi$ 是一个非常数的内函数, $|\alpha|<1$ 和 $\alpha\notin\varphi(U)$. 证明

$$\lim_{r\to 1}\varphi(re^{i\theta})=\alpha$$

至少对一个 $e^{i\theta}\in T$ 成立.

19　假定 $f\in H^1$ 和 $1/f\in H^1$. 证明 $f$ 是一个外函数.

20　假定 $f\in H^1$ 以及对所有 $z\in U$, $\mathrm{Re}[f(z)]>0$. 证明 $f$ 是一个外函数.

21　证明 $f\in N$ 当且仅当 $f=g/h$, 其中 $g$ 和 $h\in H^\infty$, $h$ 在 $U$ 内不存在零点.

22　证明下面的定理 15.24 的逆定理:

如果 $f\in H(U)$ 且

$$(*)\qquad \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|\log|f(re^{i\theta})||d\theta=0$$

则 $f$ 是一个 Blaschke 乘积. 提示: (*)蕴涵着

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta=0$$

因为 $\log^+|f|\geqslant 0$, 从定理 17.3 和定理 17.5 得出 $\log^+|f|=0$. 所以 $|f|\leqslant 1$. 现在 $f=Bg$, $g$ 不存在零点, $|g|\leqslant 1$. 用 $1/g$ 代替 $f$, (*)仍成立. 根据前面的论证, $|1/g|\leqslant 1$, 因此 $|g|=1$.

23　找出在 17.22 节里所提到的条件.

24　$U$ 到一个垂直带上的保形映射说明关于共轭函数的 M. Riesz 定理不能推广到 $p=\infty$ 的情况. 试推证出它也不能推广到 $p=1$ 的情况.

25　假定 $1<p<\infty$, 将每一个 $f\in L^p(T)$ 对应于它的 Fourier 系数

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})e^{-int}dt\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

试从定理 17.26推导下列结论:

($a$) 对于每一个 $f\in L^p(T)$, 对应有一个 $g\in L^p(T)$, 使得对 $n\geqslant0$时 $\hat{g}(n)=\hat{f}(n)$, 但当 $n<0$ 时 $\hat{g}(n)=0$. 事实上, 存在一个仅依赖于 $p$ 的常数 $C$, 使得

$$\|g\|_p\leqslant C\|f\|_p$$

于是映射 $f\to g$ 是 $L^p(T)$ 到 $L^p(T)$ 内的有界线性射影. 从 $f$ 的 Fourier 级数中删去 $n<0$ 的那些项就获得 $g$ 的 Fourier 级数.

($b$) 如果我们删去 $n<k$ 的那些项, 这里 $k$ 是任意给定的正整数, 证明同样的结论是正确的.

($c$) 从($b$)推导出: 任一$f\in L^p(T)$的 Fourier级数的部分和$s_n$构成$L^p(T)$内的一个有界序列. 我们进而获得: 实际上有

$$\lim_{n\to\infty}\|f-s_n\|_p=0$$

($d$) 若 $f\in L^p(T)$, 且

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n$$

则 $F\in H^p$, 并且每一个 $F\in H^p$ 都能这样得出. 于是($a$)里所述及的射影可以看成一个 $L^p(T)$到 $H^p$ 上的映射.

26　证明当 $p=2$ 时定理 17.26 存在一个很简单的证明, 并且找出 $A_2$的最好值.

27　假定在$U$内 $f(z)=\sum_0^{\infty}a_nz^n$并且 $\Sigma|a_n|<\infty$. 证明

$$\int_0^1|f'(re^{i\theta})|dr<\infty$$

对所有的 $\theta$ 成立.

28　证明下列命题是正确的: 如果$\{n_k\}$是一个很快地趋于$+\infty$ 的正整数序列, 若设

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{n_k}}{k}$$

则对所有的使得

$$1-\frac{1}{n_k}<|z|<1-\frac{1}{2n_k}$$

成立的那些 $z$，有 $|f'(z)|>n_k/(10k)$ 成立．因此，虽然对几乎所有的 $\theta$

$$\lim_{R\to 1}\int_0^R f'(re^{i\theta})\,dr$$

存在(并且是有限的)．但是对每一个 $\theta$

$$\int_0^1 |f'(re^{i\theta})|\,dr=\infty$$

用 $U$ 的半径在 $f$ 之下的象的长度对此作出几何解释．

# 第十八章　Banach 代数的初等理论

## 引言

**18.1　定义**　复代数是一个复数域上的向量空间 $A$，其中定义了一个可结合和可分配的乘法运算，即

(1)　　$x(yz)=(xy)z,\ (x+y)z=xz+yz,\ x(y+z)=xy+xz$

对 $x, y, z\in A$ 成立，并且与纯量乘法的关系是对 $x, y\in A$ 和纯量 $\alpha$，有

(2)　　$\alpha(xy)=x(\alpha y)=(\alpha x)y$

如果在 $A$ 中定义了一个范数，使 $A$ 成为一个赋范线性空间，并且满足乘法不等式

(3)　　$\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|\qquad(x, y\in A)$

则 $A$ 是一个赋范的复代数．如果再加上 $A$ 关于这一范数而言是完备度量空间，即若 $A$ 是 Banach空间，那末我们就称 $A$ 为 Banach 代数．

不等式(3)使乘法成为一个连续运算．这意味着：如果 $x_n\to x$ 和 $y_n\to y$，则 $x_n y_n\to xy$，这可以从(3)及恒等式

(4)　　$x_n y_n-xy=(x_n-x)y_n+x(y_n-y)$

得出．

注意，我们未曾要求 $A$ 是交换的，即对所有 $x$ 和 $y\in A$，$xy=yx$．并且除非明显地提了出来，以后也将不要求是交换的．

不过，我们将假定 $A$ 有个单位元．这是一个元素 $e$，它使得

(5)　　$xe=ex=x\qquad(x\in A)$

成立．容易看出，至多存在一个这样的 $e$ ($e'=e'\cdot e=e$)，并且由(3)，$\|e\|\geqslant1$．我们将作出一个附带的假设

(6) $$\|e\|=1$$

元素$x\in A$称为可逆的，如果$x$在$A$中有一个逆元，就是说，如果存在一个元素$x^{-1}\in A$使得

(7) $$x^{-1}x=xx^{-1}=e$$

再者，容易看出没有一个$x\in A$能有多于一个逆元.

如果$x$和$y$在$A$中都是可逆的，则$x^{-1}$和$xy$亦然，因为$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$. 因此，可逆元对于乘法构成一个群.

一个元素$x\in A$的谱是使$x-\lambda e$不可逆的全体复数$\lambda$组成的集. 我们用$\sigma(x)$表示$x$的谱.

**18.2** Banach 代数的理论包含着以代数性质为一方和以拓扑性质为另一方之间的大量的相互影响. 在定理9.21中我们已经看到这方面的一个例子，并且还将会看到别的例子. 在 Banach代数和全纯函数之间也有着密切的关系：$\sigma(x)$ 决不会是空集这一基本事实的最简易的证明有赖于关于整函数的 Liouville定理，而谱半径公式则自然由关于幂级数的定理得到. 这就是我们着意讨论复Banach 代数的原因之一. 实 Banach 代数的理论(其定义应当是很明显的，从略)是不那么合适的.

## 可逆元

在本节中，$A$是具有单位元$e$的复 Banach 代数，而$G$是$A$内的全体可逆元的集.

**18.3 定理** 如果$x\in A$而$\|x\|<1$，则$e+x\in G$

(1) $$(e+x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

且

(2) $$\|(e+x)^{-1}-e+x\|\leqslant\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$$

**证明** 乘法不等式18.1(3)表明$\|x^n\|\leqslant\|x\|^n$. 若

$$(3)\qquad S_N=e-x+x^2-\cdots+(-1)^N x^N$$

便得知$\{S_n\}$是$A$中的Cauchy序列. 因此,(1)中的级数(关于$A$的范数)收敛于一个元素$y\in A$. 因为乘法运算是连续的,且

$$(4)\qquad (e+x)S_N=e+(-1)^N x^{N+1}=S_N(e+x)$$

可见$(e+x)y=e=y(e+x)$. 这就给出了(1),而(2)可从

$$(5)\qquad \left\|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^n\right\|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\|x^n\|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\|x\|^n=\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$$

得出.

**18.4 定理** 假设$x\in G$, $\|x^{-1}\|=1/\alpha$, $h\in A$, 且$\|h\|=\beta<\alpha$. 则$x+h\in G$, 且

$$(1)\qquad \|(x+h)^{-1}-x^{-1}+x^{-1}hx^{-1}\|\leqslant\frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

**证明** $\|x^{-1}h\|\leqslant\beta/\alpha<1$, 由定理18.3, $e+x^{-1}h\in G$; 又由于$x+h=x(e+x^{-1}h)$, 有 $x+h\in G$, 且

$$(2)\qquad (x+h)^{-1}=(e+x^{-1}h)^{-1}x^{-1}$$

这样,

$$(3)\qquad (x+h)^{-1}-x^{-1}+x^{-1}hx^{-1}=[(e+x^{-1}h)^{-1}-e+x^{-1}h]x^{-1}$$

在定理18.3中以$x^{-1}h$代替$x$便得不等式(1).

**系1** $G$是开集,并且映射$x\to x^{-1}$是$G$到$G$上的同胚.

因为,若$x\in G$且$\|h\|\to 0$, 则(1)蕴涵着$\|(x+h)^{-1}-x^{-1}\|\to 0$. 因此$x\to x^{-1}$是连续的;显然它映$G$到$G$上. 并且由于它本身就是它的逆映射,所以它是一个同胚.

**系2** 映射$x\to x^{-1}$是可微的,它在任一$x\in G$的微分是将$h\in A$对应于$-x^{-1}hx^{-1}$的线性算子.

这也可以从(1)看出来. 注意变换的微分这一概念并不象定义8.22那样仅在$R^k$中,而是在任意赋范线性空间中都有意义. 如

果$A$是交换的，上述微分将$h$变为$-x^{-2}h$，这和全纯函数$z^{-1}$的导数是$-z^{-2}$这一事实是相一致的.

**系 3** 对每个$x\in A$，$\sigma(x)$是紧的. 并且当$\lambda\in\sigma(x)$时，$|\lambda|\leqslant\|x\|$.

因为，若$|\lambda|>\|x\|$，由定理18.3，$e-\lambda^{-1}x\in G$. 对于$x-\lambda e=-\lambda(e-\lambda^{-1}x)$结论也同样真确；所以$\lambda\notin\sigma(x)$. 欲证$\sigma(x)$是闭的，注意，(a) $\lambda\in\sigma(x)$当且仅当$x-\lambda e\notin G$；(b) 由系1，$G$的余集是$A$的闭子集；(c) 映射$\lambda\to x-\lambda e$是复平面到$A$内的连续映射.

**18.5 定理** 设$\Phi$是$A$上的有界线性泛函，固定$x\in A$，并定义

$$f(\lambda)=\Phi[(x-\lambda e)^{-1}] \qquad (\lambda\notin\sigma(x)) \tag{1}$$

则$f$在$\sigma(x)$的余集上是全纯的，且$\lambda\to\infty$时，$f(\lambda)\to 0$.

**证明** 固定$\lambda\notin\sigma(x)$，在定理8.14中用$x-\lambda e$代替$x$，$(\lambda-\mu)e$代替$h$，可以看出存在一个依赖于$x$和$\lambda$的常数$C$，使得

$$\|(x-\mu e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1}+(\lambda-\mu)(x-\lambda e)^{-2}\|\leqslant C|\mu-\lambda|^2 \tag{2}$$

对所有充分接近$\lambda$的$\mu$成立. 因此当$\mu\to\lambda$时

$$\frac{(x-\mu e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1}}{\mu-\lambda}\longrightarrow(x-\lambda e)^{-2} \tag{3}$$

并且，若我们将$\Phi$作用于(3)两边，则$\Phi$的连续性和线性表明

$$\frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}\longrightarrow\Phi[(x-\lambda e)^{-2}] \tag{4}$$

于是$f$是可微的，从而在$\sigma(x)$之外是全纯的. 最后，当$\lambda\to\infty$时，由$G$中逆映射的连续性，有

$$\lambda f(\lambda)=\Phi[\lambda(x-\lambda e)^{-1}]=\Phi\left[\left(\frac{x}{\lambda}-e\right)^{-1}\right]\to\Phi(-e) \tag{5}$$

**18.6 定理** 对每个$x\in A$，$\sigma(x)$是紧的和不空的.

**证明** 我们已经知道了$\sigma(x)$是紧的. 固定$x\in A$，并固定$\lambda_0\notin\sigma(x)$. 则$(x-\lambda_0 e)^{-1}\neq 0$，Hahn-Banach 定理蕴涵着存在一个$A$上的有界线性泛函$\Phi$，使得$f(\lambda_0)\neq 0$，此处$f$如定理18.5中所定

义．如果$\sigma(x)$是空的，由定理18.5就会推出$f$是一个在$\infty$处趋于0的整函数．因此，由Liouville定理，对每个$\lambda$，$f(\lambda)=0$，这和$f(\lambda_0)\neq 0$矛盾．所以，$\sigma(x)$是不空的．

**18.7 定理**(Gelfand-Mazur) 如果$A$是具有单位元的复Banach代数，其中每个非零元都是可逆的，则$A$就是(等距同构于)复数域．

每个非零元都是可逆的代数称为可除代数．注意，$A$的交换性并不是假设的一部分；它是结论的一部分．

**证明** 若$x\in A$且$\lambda_1\neq\lambda_2$，则$x-\lambda_1 e$和$x-\lambda_2 e$必定有一个是可逆的，因为它们不能同时为零．现在由定理18.6得知：对每个$x\in A$，$\sigma(x)$刚好由一个点组成，记它为$\lambda(x)$．由于$x-\lambda(x)e$不可逆，它一定是0，因此$x=\lambda(x)e$．映射$x\to\lambda(x)$因此是$A$到复数域上的同构．因为对所有$x\in A$，$|\lambda(x)|=\|\lambda(x)e\|=\|x\|$，所以它也是一个等距．

**18.8 定义** 对任意$x\in A$，$x$的谱半径$\rho(x)$是包含$\sigma(x)$的、中心在原点的最小闭圆盘的半径(有时也称为$x$的谱范数；参看习题14)：

$$\rho(x)=\sup\{|\lambda|: \lambda\in\sigma(x)\}$$

**18.9 定理**(谱半径公式) 对每个$x\in A$，

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}=\rho(x) \tag{1}$$

(极限的存在性是结论的一部分．)

**证明** 固定$x\in A$，设$n$是一个正整数．$\lambda$是复数．并假定$\lambda^n\notin\sigma(x^n)$．我们有

$$(x^n-\lambda^n e)=(x-\lambda e)(x^{n-1}+\lambda x^{n-2}+\cdots+\lambda^{n-1}e) \tag{2}$$

以$(x^n-\lambda^n e)^{-1}$乘(2)两边，就证明了$x-\lambda e$是可逆的，因此$\lambda\notin\sigma(x)$．

这样一来，若$\lambda\in\sigma(x)$，则$\lambda^n\in\sigma(x^n)$对$n=1,2,3,\cdots$成立．定

理 18.4 的系 3 指出了 $|\lambda^n|\leqslant\|x^n\|$，因此 $|\lambda|\leqslant\|x^n\|^{1/n}$. 这就给出

$$\rho(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\|x^n\|^{1/n} \tag{3}$$

现在，若 $|\lambda|>\|x\|$，容易验证

$$(\lambda e-x)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}x^n=e \tag{4}$$

上述级数因此就是 $-(x-\lambda e)^{-1}$. 设 $\Phi$ 是 $A$ 上的有界线性泛函并如定理 18.5 中一样定义 $f$. 由(4)，展开式

$$f(\lambda)=-\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(x^n)\lambda^{-n-1} \tag{5}$$

对所有使得 $|\lambda|>\|x\|$ 的 $\lambda$ 都成立. 由定理 18.5，$f$ 在 $\sigma(x)$ 外，因此也在集 $\{\lambda:|\lambda|>\rho(x)\}$ 中是全纯的. 于是得出若 $|x|>\rho(x)$，则幂级数(5)收敛. 特别对 $A$ 上的每一个有界线性泛函 $\Phi$，

$$\sup_n|\Phi(\lambda^{-n}x^n)|<\infty\qquad(|\lambda|>\rho(x)) \tag{6}$$

$A$ 中任意一个元素的范数与它作为 $A$ 的对偶空间上的线性泛函的范数相同，这一点是 Hahn-Banach 定理（第 5.21 节）的推论. 因为(6)对每个 $\Phi$ 成立，现在我们可以应用 Banach-Steinhaus 定理并作出结论：对每个使 $|\lambda|>\rho(x)$ 的 $\lambda$ 都对应有一个实数 $C(\lambda)$ 使

$$\|\lambda^{-n}x^n\|\leqslant C(\lambda)\qquad(n=1,2,3,\cdots) \tag{7}$$

以 $|\lambda|^n$ 乘(7)并取 $n$ 次根，若 $|\lambda|>\rho(x)$，则可给出

$$\|x^n\|^{1/n}\leqslant|\lambda|[C(\lambda)]^{1/n}\qquad(n=1,2,3,\cdots) \tag{8}$$

因此

$$\limsup_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}\leqslant\rho(x) \tag{9}$$

从(3)和(9)即得本定理.

**18.10 评注**

(a) $A$ 的一个元素是否在 $A$ 中可逆，纯粹是一种代数性质.

所以 $x$ 的谱及诸如谱半径之类是用 $A$ 的代数结构来定义的，没有涉及到任何度量(或拓扑)方面的考虑. 另一方面，定理 18.9 的陈述中的极限则依赖于 $A$ 的度量性质. 这是该定理引人注意的特色之一：它断言了完全由不同的途径提出来的两个数量的相等.

(*b*) 我们所考虑的代数也可能是一个较大的 Banach 代数 $B$ 的子代数（一个例子见后)，因此很可能出现这样的情况，某个 $x\in A$，在 $A$ 中不是可逆的，但在 $B$ 中是可逆的. 因此 $x$ 的谱与代数有关；利用很明显的记号，有 $\sigma_A(x)\supset\sigma_B(x)$，并且可以是真正的包含关系. 但是，$x$ 的谱半径却不受此影响，因为定理 18.9 指出它可以用 $x$ 的幂的度量性质表示出来，而它们却与 $A$ 之外所发生的任何事情无关.

**18.11 例** 设 $C(T)$ 是单位圆周 $T$ 上的全体复连续函数(关于点态加法、乘法及上确界范数)的代数，$A$ 是所有 $f\in C(T)$ 的集，而这些 $f$ 可以开拓为单位圆盘 $U$ 的闭包上的连续函数 $F$，并使 $F$ 在 $U$ 中是全纯的. 容易看出 $A$ 是 $C(T)$ 的子代数. 如果 $f_n\in A$ 并且 $\{f_n\}$ 在 $T$ 上一致收敛，那末最大模定理保证了相应的序列 $\{F_n\}$ 在 $U$ 的闭包上一致收敛. 这表明 $A$ 是 $C(T)$ 的闭子代数，从而 $A$ 本身也是 Banach 代数.

由 $f_0(e^{i\theta})=e^{i\theta}$ 定义 $f_0$. 则 $F_0(z)=z$. $f_0$ 作为 $A$ 的元素，它的谱由闭单位圆盘组成. 对于 $C(T)$，$f_0$ 的谱仅由单位圆组成. 根据定理 18.9，这两个谱半径是相同的.

## 理想与同态

从现在起我们只讨论交换代数.

**18.12 定义** 交换的复代数 $A$ 的子集 $I$ 称为理想，如果：(*a*) $I$ 是 $A$ 的子空间(在向量空间的意义下)，并且 (*b*) 当 $x\in A$，$y\in I$ 时，$xy\in I$. 若 $I\neq A$，$I$ 就称为真理想. 极大理想是一个不能被任一更

大的真理想所包含的真理想. 注意, 没有一个真理想能包含可逆元.

如果$B$是另一个复代数, $A$到$B$的映射$\varphi$称为同态, 若它是一个线性映射, 同时也保持乘法运算: 对所有$x$、$y\in A$, $\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(xy)$. $\varphi$的核(或零空间)是全体使$\varphi(x)=0$的$x\in A$的集. 验证一个同态核是理想是极容易的. 其逆命题请参看18.14节.

**18.13 定理** 如果$A$是具有单位元的交换复代数, 则$A$的每一个真理想都包含在一个极大理想之内. 如果再加上$A$是Banach代数, 则$A$的每一个极大理想都是闭的.

**证明** 第一部分几乎是Hausdorff极大原理的一个直接推论. (并且在任何一个具有单位元的交换环中都成立.) 将所有包含$I$的$A$的真理想组成的族$\mathscr{P}$半序化(根据集的包含关系). 设$M$是$\mathscr{P}$的某个极大线性序子族$\mathscr{Q}$中诸理想之并, 因为$\mathscr{P}$的任何成员都不包含单位元, 故$M$是一个理想 (因为它是理想的线性序族之并), $I\subset M$且$M\neq A$. $\mathscr{Q}$的极大性可推出$M$是$A$的极大理想.

若$A$是Banach代数, 则$M$的闭包$\overline{M}$仍是一个理想 (这一命题的证明细节留给读者). 因为$M$不包含$A$的可逆元, 并且全体可逆元的集是开的, 故$\overline{M}\neq A$. 于是$M$的极大性指出$\overline{M}=M$.

**18.14 商空间和商代数** 假定$J$是向量空间$A$的子空间, 并且对每个$x\in A$, 对应一个陪集

$$\varphi(x)=x+J=\{x+y: y\in J\} \tag{1}$$

若$x_1-x_2\in J$, 则$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$. 若$x_1-x_2\notin J$, 则$\varphi(x_1)\cap\varphi(x_2)=\varnothing$. $J$的陪集的全体用$A/J$表示. 如果我们对任意$x$, $y\in A$和纯量$\lambda$定义

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x+y), \quad \lambda\varphi(x)=\varphi(\lambda x) \tag{2}$$

则$A/J$是一个向量空间. 由于$J$是向量空间, 运算(2)是完全确定的, 这就是说, 若$\varphi(x)=\varphi(x')$和$\varphi(y)=\varphi(y')$, 则

恩

(3) $$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x')+\varphi(y'),\quad \lambda\varphi(x)=\lambda\varphi(x')$$

显然，$\varphi$ 也是一个由 $A$ 到 $A/J$ 上的线性映射；$A/J$ 的零元素就是 $\varphi(0)=J$.

下一步假设 $A$ 不仅是一个向量空间而且是一个交换代数. $J$ 是 $A$ 的一个真理想. 若 $x'-x\in J$ 且 $y'-y\in J$，则恒等式

(4) $$x'y'-xy=(x'-x)y'+x(y'-y)$$

表明 $x'y'-xy\in J$. 因此在 $A/J$ 中的乘法可以用一种协调的方式予以定义：

(5) $$\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(xy)\qquad (x \text{ 和 } y\in A)$$

容易验证 $A/J$ 是一个代数，并且 $\varphi$ 是 $A$ 到 $A/J$ 上的同态，其核是 $J$.

若 $A$ 有单位元 $e$，则 $\varphi(e)$ 是 $A/J$ 的单位元. 而且当且仅当 $J$ 是极大理想时，$A/J$ 是一个域.

为看出这点，假设 $x\in A$ 而 $x\notin J$，并令

(6) $$I=\{ax+y: a\in A, y\in J\}$$

则 $I$ 是 $A$ 的一个理想. 因为 $x\in I$，故 $I$ 真正包含 $J$. 当 $J$ 是极大时，$I=A$，因此对某个 $a\in A$ 和 $y\in J$ 有 $ax+y=e$. 因此 $\varphi(a)\varphi(x)=\varphi(e)$；而这就是说，$A/J$ 的每个非零元都是可逆的，于是 $A/J$ 是域. 若 $J$ 不是极大的，我们可以象上述一样选择 $x$，使 $I\neq A$. 因此 $e\notin I$，从而 $\varphi(x)$ 在 $A/J$ 中不是可逆的.

**18.15 商范数** 假设 $A$ 是一个赋范线性空间，$J$ 是 $A$ 的闭子空间，且如上所述，$\varphi(x)=x+J$. 定义

(1) $$\|\varphi(x)\|=\inf\{\|x+y\|: y\in J\}$$

注意 $\|\varphi(x)\|$ 是陪集 $\varphi(x)$ 中诸元素的范数的最大下界；这就与从 $x$ 到 $J$ 的距离相同. 称 $A/J$ 中由(1)定义的范数为 $A/J$ 的商范数. 它有下列性质：

(a) $A/J$ 是赋范线性空间.

(*b*) 若 $A$ 是Banach空间，则$A/J$亦然.

(*c*) 若 $A$ 是交换 Banach 代数而 $J$ 是一个真闭理想，则$A/J$是交换 Banach 代数.

这些都是容易验证的:

若$x\in J$，则$\|\varphi(x)\|=0$. 若$x\notin J$，则 $J$ 闭这一事实蕴涵着$\|\varphi(x)\|>0$. 显然$\|\lambda\varphi(x)\|=|\lambda|\|\varphi(x)\|$. 若$x_1$ 和 $x_2\in A$ 且 $\varepsilon>0$，则存在 $y_1$ 和$y_2\in J$使得

(2) $$\|x_i+y_i\|<\|\varphi(x_i)\|+\varepsilon \qquad (i=1,2)$$

因此

(3) $$\|\varphi(x_1+x_2)\|\leqslant\|x_1+x_2+y_1+y_2\| <\|\varphi(x_1)\|+\|\varphi(x_2)\|+2\varepsilon$$

它给出了三角不等式并证明了(*a*).

假如$A$是完备的且$\{\varphi(x_n)\}$是$A/J$中的 Cauchy 序列，则存在子序列使得

(4) $$\|\varphi(x_{n_i})-\varphi(x_{n_{i+1}})\|<2^{-i} \qquad (i=1,2,3,\cdots)$$

并存在元素 $z_i$ 使 $z_i-x_{n_i}\in J$，且$\|z_i-z_{i+1}\|<2^{-i}$. 这样，$\{z_i\}$是 $A$ 内的一个Cauchy序列；由于 $A$ 是完备的，存在 $z\in A$使$\|z_i-z\|\to0$. 由此得出在 $A/J$中，$\varphi(x_{n_i})$收敛于$\varphi(z)$. 但是一个 Cauchy 序列若有收敛子序列则整个序列收敛. 因此$A/J$是完备的，并且证明了(*b*).

为证明(*c*)，选择 $x_1$ 和 $x_2\in A$ 以及 $\varepsilon>0$，并选择 $y_1, y_2\in J$使(2)成立. 注意$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\in x_1x_2+J$，所以

(5) $$\|\varphi(x_1x_2)\|\leqslant\|(x_1+y_1)(x_2+y_2)\|\leqslant\|x_1+y_1\|\|x_2+y_2\|$$

现在(2)蕴涵着

(6) $$\|\varphi(x_1x_2)\|\leqslant\|\varphi(x_1)\|\|\varphi(x_2)\|$$

最后，如果 $e$ 是 $A$ 的单位元，在(6)中取 $x_1\notin J$及 $x_2=e$，就给出$\|\varphi(e)\|\geqslant1$但$e\in\varphi(e)$，商范数的定义表明$\|\varphi(e)\|\leqslant\|e\|=1$. 所以

$\|\varphi(e)\|=1$, 证明完毕.

**18.16** 在论述了这些预备知识后，现在我们就能够导出有关交换Banach代数的一些关键性事实了.

如前一样，假设$A$是一个有单位元的交换的复Banach代数. 对于$A$, 我们让它对应于$A$的全体复同态的集$\Delta$; 这些同态是$A$到复数域上的同态，或者用不同的术语，是$A$上的不恒等于零的乘法线性泛函. 如前一样，$\sigma(x)$表示元素$x\in A$的谱而$\rho(x)$是$x$的谱半径.

那末，下述关系成立:

**18.17 定理**

(*a*) $A$的每个极大理想都是某个$h\in\Delta$的核.

(*b*) $\lambda\in\sigma(x)$当且仅当$h(x)=\lambda$对某个$h\in\Delta$成立.

(*c*) $x$在$A$中是可逆的当且仅当对每个$h\in\Delta$, $h(x)\neq 0$.

(*d*) 对每个$x\in A$和$h\in\Delta$, $h(x)\in\sigma(x)$.

(*e*) 对每个$x\in A$和$h\in\Delta$, $|h(x)|\leqslant\rho(x)\leqslant\|x\|$.

**证明** 如果$M$是$A$的极大理想，则$A/M$是域; 因为$M$是闭的(定理18.13), $A/M$是Banach代数. 由定理18.7, 存在$A/M$到复数域上的同构$j$. 若$h=j\circ\varphi$, 这里$\varphi$是$A$到$A/M$上的同态，其核为$M$, 则$h\in\Delta$而$h$的核是$M$. (*a*)就得证.

如$\lambda\in\sigma(x)$, 则$x-\lambda e$是不可逆的; 因此，对所有$y\in A$, 元素$(x-\lambda e)y$的集是$A$的一个真理想. (由定理18.13)它位于一个极大理想之内. (*a*) 表明存在$h\in\Delta$使$h(x-\lambda e)=0$. 因为$h(e)=1$, 即给出$h(x)=\lambda$.

另一方面，如果$\lambda\notin\sigma(x)$, 则对某个$y\in A$有$(x-\lambda e)y=e$, 由此得知对每个$h\in\Delta$, $h(x-\lambda e)h(y)=1$, 所以$h(x-\lambda e)\neq 0$或者$h(x)\neq\lambda$. (*b*)式得证.

因为当且仅当$0\notin\sigma(x)$时，$x$是可逆的，故由(*b*)可得(*c*).

最后，(*d*)和(*e*)都是(*b*)的直接推论.

注意，(e)蕴涵着 $h$ 作为线性泛函其范数至多是 1．特别每个 $h\in\Delta$ 是连续的．这已经在早些时候证明过了(定理9.21)．

## 应用

现在给出一些定理的例子，这些定理的陈述并不包含代数的概念，然而却可以通过 Banach 代数的技巧来证明．

**18.18 定理** 设 $A(U)$ 是开单位圆盘 $U$ 的闭包 $\overline{U}$ 上全体连续函数的集，这些函数在 $U$ 上的限制是全纯的．假设 $f_1$，…，$f_n$ 是 $A(U)$ 的元素，使得

(1)
$$|f_1(z)|+\cdots+|f_n(z)|>0$$

对每个 $z\in\overline{U}$ 成立．则存在 $g_1,\cdots,g_n\in A(U)$ 使得

(2)
$$\sum_{i=1}^{n}f_i(z)g_i(z)=1 \qquad (z\in\overline{U})$$

成立．

**证明** 由于全纯函数的和、积以及一致极限是全纯的，故 $A(U)$ 赋以上确界范数时是 Banach 代数．对 $A(U)$ 的任意元素 $g_i$，所有形如 $\sum f_ig_i$ 的函数组成的集 $J$ 是 $A(U)$ 的一个理想．我们必须证明 $J$ 包含 $A(U)$ 的单位元 1．由定理 18.13，当且仅当 $J$ 不包含于 $A(U)$ 的最大理想时才会出现这情况．由定理 18.17($a$)，只需证明不存在 $A(U)$ 到复数域上的同态 $h$ 使得 $h(f_i)=0$ 对每个 $i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 成立就够了．

在确定这些同态之前，先要注意到多项式构成 $A(U)$ 的稠密子集．为看出这一点，设 $f\in A(U)$ 和 $\varepsilon>0$，因为 $f$ 在 $\overline{U}$ 上一致连续，存在 $r<1$ 使 $|f(z)-f(rz)|<\varepsilon$ 对所有的 $z\in\overline{U}$ 成立．当 $|rz|<1$ 时，$f(rz)$ 关于 $z$ 的幂级数展开式是收敛的，因此它对于 $z\in\overline{U}$ 一致收敛于 $f(rz)$．这就给出了所需的逼近．

现在设 $h$ 是 $A(U)$ 的一个复同态．令 $f_0(z)=z$，则 $f_0\in A(U)$．

很明显 $\sigma(f_0)=\bar{U}$. 由定理18.17(d), 存在 $\alpha\in\bar{U}$ 使得 $h(f_0)=\alpha$. 因此 $h(f_0^n)=\alpha^n=f_0^n(\alpha)$, 对 $n=1,2,3,\cdots$ 成立. 于是, 对每个多项式 $P$, $h(P)=P(\alpha)$. 因为 $h$ 连续而多项式稠密于 $A(U)$, 由此得知对每个 $f\in A(U)$ 有 $h(f)=f(\alpha)$.

我们的假设 (1) 蕴涵着至少有一个指标 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 使得 $|f_i(\alpha)|>0$. 因此 $h(f_i)\neq 0$.

我们已经证明对每个 $h\in\Delta$ 都至少对应有一个给定的函数 $f_i$, 使得 $h(f_i)\neq 0$. 而这一点, 正如上面曾注意到的一样, 足以证明本定理.

注: 根据前述证明, 我们已经确定了 $A(U)$ 所有的极大理想. 因为其中每一个都是某个 $h\in\Delta$ 的核: 如果 $\alpha\in\bar{U}$ 且 $M_\alpha$ 是所有使得 $f(\alpha)=0$ 的 $f\in A(U)$ 的集, 则 $M_\alpha$ 就是 $A(U)$ 的一个极大理想, 而且 $A(U)$ 的全体极大理想都能由这个途径得出.

$A(U)$ 通常被称为圆盘代数.

**18.19** $A(U)$ 的元素在单位圆周 $T$ 上的限制构成了一个 $C(T)$ 的闭子代数. 这就是在例 18.11 中讨论过的代数 $A$. 事实上 $A$ 是 $C(T)$ 的一个极大子代数. 说得更明确些, 若 $A\subset B\subset C(T)$, 且 $B$ 是 $C(T)$ 的 (关于上确界范数而言的) 闭子代数, 则 $B=A$ 或 $B=C(T)$.

从定理 11.21 得知 $A$ 恰好由使得

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta=0 \tag{1}$$

$$(n=-1,-2,-3,\cdots)$$

成立的那些 $f\in C(T)$ 组成. 因此上面提到的极大性定理可以作为一个逼近定理来叙述:

**18.20 定理** 假设 $g\in C(T)$, 而对某个 $n<0$, $\hat{g}(n)\neq 0$. 则对每个 $f\in C(T)$ 和 $\varepsilon>0$, 都对应一个多项式

(1) $$P_n(e^{i\theta})=\sum_{k=0}^{m(n)}a_{n,k}e^{ik\theta} \qquad (n=0,\cdots,N)$$

使得

(2) $$\left|f(e^{i\theta})-\sum_{n=0}^{N}P_n(e^{i\theta})g^n(e^{i\theta})\right|<\varepsilon \qquad (e^{i\theta}\in T)$$

**证明** 设$B$是所有形如

(3) $$\sum_{n=0}^{N}P_n g^n$$

的函数的集在$C=C(T)$中的闭包. 这时定理断言$B=C$. 现在假定$B\neq C$.

所有形如(3)的函数的集(注意$N$不是固定的)构成一个复代数. 它的闭包是 Banach 代数. 它包含了函数$f_0$, 这里$f_0(e^{i\theta})=e^{i\theta}$. $B\neq C$ 的假定蕴涵着 $1/f_0\notin B$. 如若不然, 对全体整数$n$, $B$就会包含$f_0^n$. 因而全体三角多项式都属于$B$, 但由于三角多项式在$C$中稠密(定理4.25)就应当有$B=C$.

于是$f_0$在$B$中是不可逆的. 由定理18.17, 存在$B$的复同态$h$, 使$h(f_0)=0$. 每个到复数域上的同态都满足$h(1)=1$; 而因为$h(f_0)=0$, 故也有

(4) $$h(f_0^n)=[h(f_0)]^n=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

我们知道$h$是$B$上的线性泛函, 其范数至多是1. Hahn-Banach 定理可将$h$开拓为$C$上具有相同范数的线性泛函(仍以$h$记之). 因为$h(1)=1$而$\|h\|\leqslant 1$, 5.22节所用的论证表明$h$是$C$上的正线性泛函. 特别, 对于实的$f$, $h(f)$是实的, 因此$h(\bar{f})=\overline{h(f)}$. 由于$f_0^{-n}$是$f_0^n$的共轭复数, 得知(4)对$n=-1,-2,-3,\cdots$也成立. 这样

(5) $$h(f_0^n)=\begin{cases}1 & 若\ n=0\\ 0 & 若\ n\neq 0\end{cases}$$

由于三角多项式稠于$C$，故$C$上只有一个满足(5)的有界线性泛函．因此$h$由公式

$$h(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta})d\theta \qquad (f\in C) \tag{6}$$

给出．

现在当$n$是正整数时，$gf_0^n\in B$；由于$h$在$B$上是可乘的以及根据(5)式，(6)给出

$$\begin{aligned}\hat{g}(-n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta=h(gf_0^n)\\&=h(g)\cdot h(f_0^n)=0.\end{aligned} \tag{7}$$

这就与定理的假设矛盾．

我们用Wiener所作出的一个定理结束．

**18.21 定理** 假设

$$f(e^{i\theta})=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{in\theta},\quad \sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|<\infty \tag{1}$$

且对每一个实的$\theta$，$f(e^{i\theta})\neq 0$．则

$$\frac{1}{f(e^{i\theta})}=\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_n e^{in\theta},\ 且有\ \sum_{-\infty}^{\infty}|\gamma_n|<\infty \tag{2}$$

**证明** 设$A$为所有在单位圆周上满足(1)的复函数的空间，赋以范数

$$\|f\|=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n| \tag{3}$$

显然$A$是一个Banach空间．事实上，$A$等距同构于$l^1$，即整数集上的关于计数测度可积的全体复函数的空间．但$A$对于点态乘法而言也是一个交换Banach代数．因为，若$g\in A$而$g(e^{i\theta})=\Sigma b_n e^{in\theta}$，则

(4) $$f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})=\sum_n\Big(\sum_k c_{n-k}b_k\Big)e^{in\theta}$$

并因之有

(5) $$\|fg\|=\sum_n\Big|\sum_k c_{n-k}b_k\Big|\leqslant\sum_k|b_k|\sum_n|c_{n-k}|$$

$$=\|f\|\cdot\|g\|$$

同样，函数 1 是 $A$ 的单位元，且 $\|1\|=1$.

令 $f_0(e^{i\theta})=e^{i\theta}$ 如前，则 $f_0\in A$，$1/f_0\in A$，且对 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ $\|f_0^n\|=1$. 若 $h$ 是 $A$ 的任意一个复同态且 $h(f_0)=\lambda$，则 $\|h\|\leqslant1$ 的事实蕴涵着

(6) $$|\lambda^n|=|h(f_0^n)|\leqslant\|f_0^n\|=1\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

因此 $|\lambda|=1$. 换言之，对每个 $h$ 都对应有一个点 $e^{i\alpha}\in T$，使 $h(f_0)=e^{i\alpha}$，于是

(7) $$h(f_0^n)=e^{in\alpha}=f_0^n(e^{i\alpha})\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

如果 $f$ 由(1)给出，则 $f=\sum c_nf_0^n$. 这个级数在 $A$ 中收敛；由于 $h$ 是 $A$ 上的连续线性泛函，从(7)可得出结论

(8) $$h(f)=f(e^{i\alpha})\qquad(f\in A)$$

因此 $T$ 上没有一个点能使 $f$ 变为 0 这一假设说明了 $f$ 不能属于 $A$ 的任何一个复同态的核. 现在，定理 18.17 蕴涵着 $f$ 在 $A$ 中是可逆的. 而这恰好是本定理所断言的.

## 习　题

1　假设 $B(X)$ 是 Banach 空间 $X$ 上全体有界线性算子的代数，当 $A$, $A_1$ 和 $A_2\in B(X)$ 时，有

$$(A_1+A_2)(x)=A_1x+A_2x,\ (A_1A_2)(x)=A_1(A_2x),$$

$$\|A\|=\sup\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

证明 $B(X)$ 是 Banach 代数.

2 设 $n$ 是一个正整数，$X$ 是全体 $n$ 元复数序组的空间（用任一种方式赋范，只要能满足赋范线性空间的公理），而设 $B(X)$ 如习题 1. 证明 $B(X)$ 中每一个元素的谱至多由 $n$ 个复数组成. 它们是些什么？

3 取 $X=L^2(-\infty,\infty)$，假设 $\varphi\in L^2(-\infty,\infty)$，并设 $M$ 是一个乘法算子，它将 $f\in L^2$ 变为 $\varphi f$. 证明 $M$ 是 $L^2$ 上有界线性算子并且 $M$ 的谱等于 $\varphi$ 的本性值域（第三章习题 19）.

4 $l^2$ 上的移位算子的谱是什么？（关于定义请参看定理 17.20.）

5 证明 Banach 代数中的理想的闭包仍是一个理想.

6 若 $X$ 是紧 Hausdorff 空间，找出 $C(X)$ 中的全体极大理想.

7 假设 $A$ 是一个具有单位元的交换 Banach 代数，它由单个元素 $x$ 生成. 这就是说 $x$ 的多项式在 $A$ 中稠密. 证明 $\sigma(x)$ 的余集是平面上的一个连通子集. 提示：若 $\lambda\notin\sigma(x)$，则存在多项式 $P_n$ 使得在 $A$ 中 $P_n(x)\to(x-\lambda e)^{-1}$. 证明对于 $z\in\sigma(x)$，$P_n(z)\to(z-\lambda e)^{-1}$ 一致地成立.

8 假设 $\sum_0^\infty|c_n|<\infty$，$f(z)=\sum_0^\infty c_nz^n$，对每个 $z\in\overline{U}$，$|f(z)|>0$，且 $1/f(z)=\sum_0^\infty a_nz^n$，证明 $\sum_0^\infty|a_n|<\infty$.

9 证明 Banach 代数 $L^1(R^1)$（见 9.19 节）的闭线性子空间当且仅当它是一个理想时，是平移不变的.

10 证明 $L^1(T)$ 的乘法按

$$(f*g)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t-s)g(s)ds$$

定义时是一个（没有单位元的）交换 Banach 代数. 如定理 9.23 一样，找出 $L^1(T)$ 的全体复同态. 如果 $E$ 是一个整数集且 $I_E$ 是对所有的 $n\in E$，$\hat{f}(n)=0$ 的全体 $f\in L^1(T)$ 的集，证明 $I_E$ 是 $L^1(T)$ 的闭理想，并证明 $L^1(T)$ 的每个闭理想都可按这一方式得出.

11 具有单位元的 Banach 代数中的元素 $x$ 的预解式 $R(\lambda,x)$ 定义为

$$R(\lambda,x)=(\lambda e-x)^{-1}$$

它对所有使这个逆元素存在的复数 $\lambda$ 定义. 证明恒等式

$$R(\lambda,x)-R(\mu,x)=(\mu-\lambda)R(\lambda,x)R(\mu,x)$$

并用它给出定理 18.5 的另一种证明.

12　设 $A$ 是具有单位元的交换 Banach 代数．$A$ 的根式定义为 $A$ 的全体极大理想之交．证明关于元素 $x\in A$ 的下述三个命题是等价的．

(a)　$x$ 属于 $A$ 的根式．

(b)　$\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}=0$．

(c)　对于 $A$ 的每个复同态 $h$，$h(x)=0$．

13　在 Banach 代数 $A$ 中，找出一个元素 $x$（例如，Hilbert 空间上的一个有界线性算子）使得对所有 $n>0$，$x^n\neq 0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}=0$．

14　如 18.16 节一样，假设 $A$ 是具有单位元的交换 Banach 代数，而 $\Delta$ 是 $A$ 的全体复同态的集．对每个 $x\in A$，由公式

$$\hat{x}(h)=h(x)\qquad (h\in\Delta)$$

对应有 $\Delta$ 上的函数 $\hat{x}$，$\hat{x}$ 称为 $x$ 的 Gelfand 变式．

证明映射 $x\to\hat{x}$ 是 $A$ 到 $\Delta$ 上的复函数所组成的关于点态乘法运算的代数 $\hat{A}$ 上的一个同态．在关于 $A$ 的什么条件下，这个同态是一个同构？（参看习题 12.）

证明谱半径 $\rho(x)$ 等于

$$\|\hat{x}\|_\infty=\sup\{|\hat{x}(h)|:h\in\Delta\}$$

证明 $\hat{x}$ 的值域恰好是谱 $\sigma(x)$．

15　如果 $A$ 是一个没有单位元的交换 Banach 代数，设 $A_1$ 是所有序对 $(x,\lambda)$（这里 $x\in A$，$\lambda$ 是复数）的代数，其加法和乘法按"明显的"方式定义，且 $\|(x,\lambda)\|=\|x\|+|\lambda|$．证明 $A_1$ 是具有单位元的交换 Banach 代数，并且映射 $x\to(x,0)$ 是 $A$ 到 $A_1$ 的一个极大理想上的等距同构．这是一个没有单位元的代数到一个具有单位元的代数的标准的嵌入．

16　证明 $H^\infty$ 对于上确界范数及点态的加法和乘法是一个交换 Banach 代数．映射 $f\to f(\alpha)$ 当 $|\alpha|<1$ 时是 $H^\infty$ 的一个复同态．证明一定还有其他的复同态．

17　证明所有函数 $(z-1)^2f$ 的集是 $H^\infty$ 内的一个非闭的理想，这里 $f\in H^\infty$．提示：当 $|z|<1$，$\varepsilon>0$ 时

$$|(1-z)^2(1+\varepsilon-z)^{-1}-(1-z)|<\varepsilon$$

18　假设 $\varphi$ 是一个内函数，证明 $\{\varphi f: f\in H^\infty\}$ 是 $H^\infty$ 的闭理想．换言之，证明如果 $H^\infty$ 的序列 $\{f_n\}$，使得 $\varphi f_n\to g$ 在 $U$ 上一致成立，则 $g/\varphi\in H^\infty$．

# 第十九章　全纯 Fourier 变式

## 引言

**19.1**　在第九章，$R^1$上的函数$f$的 Fourier 变式定义为$R^1$上的一个函数$\hat{f}$. 通常$\hat{f}$能开拓为在平面上某区域内全纯的函数. 例如，若$f(t)=e^{-|t|}$，则$\hat{f}(x)=(1+x^2)^{-1}$，是一个有理函数. 这并不会太奇怪. 因为对每个实数$t$，核$e^{itz}$是$z$的整函数，于是人们自然期望在$f$满足某些条件下，$\hat{f}$将在某个区域内全纯.

我们将描述用这种方法引出的两类全纯函数.

对于第一类，设$F$是$L^2(-\infty,\infty)$的任意一个函数，它在$(-\infty,0)$上为零. [也就是，取$F\in L^2(0,\infty)$.]并定义

(1)
$$f(z)=\int_0^\infty F(t)e^{itz}dt \qquad (z\in \Pi^+)$$

此处$\Pi^+$为$y>0$的、所有$z=x+iy$的集. 若$z\in\Pi^+$，则$|e^{itz}|=e^{-ty}$，这表明积分(1)作为 Lebesgue 积分存在.

如果$\mathrm{Im}z>\delta>0$, $\mathrm{Im}z_n>\delta$，且$z_n\to z$. 则控制收敛定理表明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty |\exp(itz_n)-\exp(itz)|^2dt=0$$

因为被积函数以$L^1$-函数$4\exp(-2\delta t)$为界，并且对每个$t>0$，它是趋于0的. 因此由 Schwarz 不等式推出$f$在$\Pi^+$内连续. Fubini 定理和 Cauchy 定理表明，对$\Pi^+$内每一条闭路径$\gamma$，$\int_\gamma f(z)dz=0$. 由 Morera 定理，$f\in H(\Pi^+)$.

让我们改写(1)为如下形式

(2)
$$f(x+iy)=\int_0^\infty F(t)e^{-ty}e^{itx}dt$$

把 $y$ 看作固定的，并应用 Plancherel 定理．对每个 $y>0$，我们得到

(3)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dx$$
$$=\int_0^{\infty}|F(t)|^2e^{-2ty}dt\leqslant\int_0^{\infty}|F(t)|^2dt$$

［注意，我们现在的符号与第九章的不同．那里基本的测度是 Lebesgue 测度除以 $\sqrt{2\pi}$．此处我们正好是用的 Lebesgue 测度．这说明了 (3) 内出现的因子 $\frac{1}{2\pi}$．］这就表明

($a$) 若 $f$ 属于形式(1)，则 $f$ 在 $\Pi^+$ 内全纯，且它们在 $\Pi^+$ 的水平线上的限制构成了 $L^2(-\infty,\infty)$ 内一个有界集．

第二类由所有形如

(4)
$$f(z)=\int_{-A}^{A}F(t)e^{itz}dt$$

的 $f$ 组成．此处 $0<A<\infty$ 且 $F\in L^2(-A,A)$．这些函数 $f$ 是整函数(证明同上)，并且它们满足增长条件：

(5)
$$|f(z)|\leqslant\int_{-A}^{A}|F(t)|e^{-ty}dt\leqslant e^{A|y|}\int_{-A}^{A}|F(t)|dt$$

如果 $C$ 是最后一个积分，则 $C<\infty$，且由(5)可推出

(6)
$$|f(z)|\leqslant Ce^{A|z|}$$

［满足(6)的整函数称为指数型的．］因而：

($b$) 每个属于(4)型的 $f$ 都是满足(6)的整函数，且它们在实轴上的限制属于 $L^2$(由 Plancherel 定理)．

值得注意的是($a$)和($b$)的逆仍真．这是定理 19.2 及 19.3 的内容．

## Paley 和 Wiener 的两个定理

**19.2 定理** 假设 $f\in H(\Pi^+)$ 及

(1)
$$\sup_{0<y<\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dx=C<\infty$$

则存在 $F\in L^2(0,\infty)$，使得

(2)
$$f(z)=\int_0^{\infty}F(t)e^{itz}dt \qquad (z\in\Pi^+)$$

且

(3)
$$\int_0^{\infty}|F(t)|^2dt=C$$

注　我们寻求的函数 $F$ 具有这样的性质，它使 $f(x+iy)$ 是 $F(t)e^{-yt}$ 的Fourier 变式(我们把 $y$ 视为一个正的常数)，应用反演公式(这样做正确与否不是主要的，我们是在尝试引导出下列的证明)，所求的 $F$ 将具有形式

(4)
$$F(t)=e^{ty}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+iy)e^{-itx}dx=\frac{1}{2\pi}\int f(z)e^{-itz}dz$$

最后的积分是沿 $\Pi^+$ 内一条水平直线的，并且当这一推理完全正确时，这个积分将不依赖于我们偶然选取的特殊直线．这暗示应当求助于 Cauchy 定理．

证明　固定 $y$, $0<y<\infty$. 对每个 $\alpha>0$，令 $\Gamma_\alpha$ 为顶点在 $\pm\alpha+i$ 及 $\pm\alpha+iy$ 的长方形路径．由 Cauchy 定理

(5)
$$\int_{\Gamma_\alpha}f(z)e^{-itz}dz=0$$

我们仅考虑 $t$ 的实数值．令 $\Phi(\beta)$ 为 $f(z)e^{-itz}$ 沿 $\beta+i$ 到 $\beta+iy$ ($\beta$ 为实数)的直线区间的积分．若 $y<1$，令 $I=[y,1]$，若 $1<y$，令 $I=[1,y]$，则

(6)
$$|\Phi(\beta)|^2=\left|\int_I f(\beta+iu)e^{-it(\beta+iu)}du\right|^2$$
$$\leqslant\int_I|f(\beta+iu)|^2du\int_I e^{2tu}du$$

令

(7) $$\Lambda(\beta)=\int_I|f(\beta+iu)|^2du$$

由 Fubini 定理，则(1)表明，有

(8) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\beta)d\beta\leqslant Cm(I)$$

因此存在序列$\{\alpha_j\}$，使得$\alpha_j\to\infty$，并且

(9) $$\Lambda(\alpha_j)+\Lambda(-\alpha_j)\to 0\qquad(j\to\infty)$$

由(6)，这蕴涵着当 $j\to\infty$ 时，

(10) $$\Phi(\alpha_j)\to 0,\ \Phi(-\alpha_j)\to 0$$

注意，对每个 $t$ 这个式子都成立，且序列$\{\alpha_j\}$不依赖于 $t$。

让我们定义

(11) $$g_j(y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}f(x+iy)e^{-itx}dx$$

则我们由(5)和(10)推导出

(12) $$\lim_{j\to\infty}[e^{ty}g_j(y,t)-e^tg_j(1,t)]=0\qquad(-\infty<t<\infty)$$

记 $f(x+iy)$为 $f_y(x)$. 由假设 $f_y\in L^2(-\infty,\infty)$，且Plancherel 定理断言

(13) $$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_y(t)-g_j(y,t)|^2dt=0$$

此处 $\hat{f}_y$ 是 $f_y$ 的 Fourier 变式. 因此$\{g_j(y,\ t)\}$有一个子序列，对几乎所有的 $t$，点态收敛于 $\hat{f}_y(t)$(定理 3.12). 如果我们定义

(14) $$F(t)=e^t\hat{f}_1(t)$$

由(12)即得

(15) $$F(t)=e^{ty}\hat{f}_y(t)$$

注意(14)不包含 $y$，且(15)对每个 $y\in(0,\infty)$成立. Plancherel定理能应用于(15)：

(16) $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2ty}|F(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}_y(t)|^2dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f_y(x)|^2dx\leqslant C$$

令 $y\to\infty$, (16)表明在$(-\infty,0)$内几乎处处有 $F(t)=0$.

令 $y\to 0$, (16)表明

(17) $$\int_0^{\infty}|F(t)|^2dt\leqslant C$$

现由(15)得出, $y>0$时, $\hat{f}_y\in L^1$. 因此定理 9.14 给出

(18) $$f_y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_y(t)e^{itx}dt$$

或

(19) $$f(z)=\int_0^{\infty}F(t)\,e^{-yt}e^{itx}dt=\int_0^{\infty}F(t)e^{itz}dt\qquad(z\in\Pi^+)$$

这就是(2). 现在由(17)及公式 19.1(3)得出(3).

**19.3 定理** 假设 $A$ 和 $C$ 是正的常数, $f$ 是一个整函数, 使得对所有 $z$

(1) $$|f(z)|\leqslant Ce^{A|z|}$$

且

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx<\infty$$

则存在一个 $F\in L^2(-A,A)$, 使得

(3) $$f(z)=\int_{-A}^{A}F(t)e^{itz}dt$$

**证明** 对 $\varepsilon>0$ 及实数 $x$, 令 $f_\varepsilon(x)=f(x)e^{-\varepsilon|x|}$, 我们将证明

(4) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f_\varepsilon(x)e^{-itx}dx=0\qquad(t\text{ 是实数}, |t|>A)$$

因为当 $\varepsilon\to 0$ 时, $\|f_\varepsilon-f\|_2\to 0$, Plancherel 定理蕴涵着在 $L^2$ 内 $f_\varepsilon$ 的 Fourier 变式收敛于 $f$ 的 Fourier 变式 $F$. (更确切一点, 是 $f$ 在实轴上的限制.) 因此, 由(4)将推出 $F$ 在$[-A,A]$外为零. 这样, 定理 9.14 表明(3)对几乎每一个实数 $z$ 都成立. 由于(3)的

每一边都是整函数，便得出(3)对每一个复数 $z$ 成立。

这样，(4)蕴涵着本定理.

对每一实数 $\alpha$，设 $\Gamma_\alpha$ 是由

$$\Gamma_\alpha(s)=se^{i\alpha} \qquad (0\leqslant s<\infty) \tag{5}$$

定义的路径，令

$$\Pi_\alpha=\{w: \mathrm{Re}(we^{i\alpha})>A\} \tag{6}$$

并且，当 $w\in\Pi_\alpha$ 时，定义

$$\Phi_\alpha(w)=\int_{\Gamma_\alpha} f(z)e^{-wz}dz=e^{i\alpha}\int_0^\infty f(se^{i\alpha})\exp(-wse^{i\alpha})ds \tag{7}$$

由(1)和(5)，被积函数的绝对值最多是

$$C\exp\{-[\mathrm{Re}(we^{i\alpha})-A]s\}$$

由此得出(如在 19.1 节一样)，$\Phi_\alpha$ 在半平面 $\Pi_2$ 内全纯.

然而，进一步当 $\alpha=0$ 及 $\alpha=\pi$ 时也是正确的：我们有

$$\Phi_0(w)=\int_0^\infty f(x)e^{-wx}dx \qquad (\mathrm{Re}w>0) \tag{8}$$

$$\Phi_\pi(w)=-\int_{-\infty}^0 f(x)e^{-wx}dx \qquad (\mathrm{Re}w<0) \tag{9}$$

因为(2)，$\Phi_0$ 及 $\Phi_\pi$ 在所指定的半平面是全纯的.

函数 $\Phi_\alpha$ 对于(4)的意义，在于下述容易验证的关系：

$$\int_{-\infty}^\infty f_\varepsilon(x)e^{-itx}dx=\Phi_0(\varepsilon+it)-\Phi_\pi(-\varepsilon+it) \qquad (t\text{为实数}) \tag{10}$$

因此我们要证明，若 $t>A$ 和 $t<-A$，则当 $\varepsilon\to0$ 时，(10)的右边趋于零.

我们的证明，将通过证明任意两个函数 $\Phi_\alpha$ 在它们的定义域交集内是相同的，也就是说，它们能彼此解析延拓来实现. 一旦做了这一点，我们就能在 $t<-A$ 时用 $\Phi_{\frac{\pi}{2}}$，而 $t>A$ 时，用 $\Phi_{-\frac{\pi}{2}}$来代替(10)中的 $\Phi_0$ 和 $\Phi_\pi$，因此当 $\varepsilon\to0$ 时，差趋于 0 就是很明显的了.

于是假设$0<\beta-\alpha<\pi$. 令

(11) $$\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2},\ \eta=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}>0$$

如果$w=|w|e^{-i\gamma}$, 则

(12) $$\mathrm{Re}(we^{i\alpha})=\eta|w|=\mathrm{Re}(we^{i\beta})$$

于是一旦$|w|>A/\eta$, 则$w\in\Pi_\alpha\cap\Pi_\beta$. 考虑沿由$\Gamma(t)=re^{it}$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$的圆弧$\Gamma$的积分

(13) $$\int_\Gamma f(z)e^{-wz}dz$$

由于

(14) $$\mathrm{Re}(-wz)=-|w|r\cos(t-\gamma)\leqslant-|w|r\eta$$

(13)内的被积函数的绝对值不会超过

$$C\exp\{(A-|w|\eta)r\}$$

如果$|w|>A/\eta$, 便得出当$r\to\infty$时, (13)趋于0.

我们现在应用Cauchy定理. $f(z)e^{-wz}$沿区间$[0,\ re^{i\beta}]$的积分等于(13)与沿$[0, re^{i\alpha}]$的积分之和. 由于当$r\to\infty$时, (13)趋于0, 我们最终得出, 如果$w=|w|e^{-i\gamma}$和$|w|>A/\eta$. 则有$\Phi_\alpha(w)=\Phi_\beta(w)$. 这样, 定理10.18表明$\Phi_\alpha$及$\Phi_\beta$在它们原来定义的半平面的交集内重合.

这就完成了证明.

**19.4 评注** 上述两个证明每一个都依靠Cauchy定理的一个典型的应用. 在定理19.2, 我们用沿另一水平线的积分代替沿一水平线的积分来证明19.2(15)不依赖于$y$; 在定理19.3用另一条射线代替一条射线用以构成解析延拓. 这结果确实表明这些函数$\Phi_\alpha$都是一个在$[-A_i,\ A_i]$的余集内全纯的函数$\Phi$的限制.

在定理19.2中所描述的函数类是在第十七章讨论的$H^2$类的半平面类似物. 定理19.3将用于Denjoy-Carleman定理(定理19.11)的证明.

## 拟解析类

**19.5** 如果$\Omega$是一个区域且$z_0\in\Omega$，每一个$f\in H(\Omega)$是由数$f(z_0)$，$f'(z_0)$，$f''(z_0)\cdots$唯一确定的。另一方面，存在$R^1$上的无限次可微函数，它不恒等于零，但在某个区间上为零。这样，我们在此得到全纯函数具有的而在$C^\infty$（在$R^1$所有无限次可微的复函数类）不成立的唯一性性质。

如果$f\in H(\Omega)$，序列$\{|f^n(z_0)|\}$的增长，受到定理10.26限制。因此有理由问，上述的唯一性性质，是否对$C^\infty$中导数的增长遵守某些限制的函数组成适当的子类仍然成立？这就是作出下列定义的动机。问题的答案由定理19.11给出。

**19.6** $C\{M_n\}$**类** 如果$M_0$，$M_1$，$M_2$，$\cdots$是正数，我们令$C\{M_n\}$为所有$f\in C^\infty$，并满足下列不等式的类

(1) $$\|D^nf\|_\infty\leqslant\beta_fB_f^nM_n\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

此处$D^0f=f$，$n\geqslant1$时，$D^nf$是$f$的$n$阶导数。范数是在$R^1$上的上确界范数，而$\beta_f$和$B_f$是正的常数（依赖于$f$，但不依赖$n$）。

如果$f$满足(1)，则

(2) $$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{\|D^nf\|_\infty}{M_n}\right\}^{1/n}\leqslant B_f$$

这表明$B_f$是比$\beta_f$更有意义的量。然而，若在(1)内省略掉$\beta_f$，则$n=0$的场合将推出$\|f\|_\infty\leqslant M_0$。这是一个不希望有的限制。而包括$\beta_f$在内就使$C\{M_n\}$成为一向量空间。

每一个$C\{M_n\}$在仿射变换下是不变的。更清楚地说，假设$f\in C\{M_n\}$及$g(x)=f(ax+b)$，则$g$满足(1)，并有$\beta_g=\beta_f$及$B_g=aB_f$。

在研究时，我们将对序列$\{M_n\}$作出两个补充假设：

(3) $$M_0=1$$

(4) $$M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

假设(4)也可以表示为这样的形式：$\{\log M_n\}$是一个凸序列.

这些假设将简化我们某些工作，并且也不会丧失一般性. [能够证明，每一类 $C\{M_n\}$是等于某一类 $C\{\bar{M}_n\}$，其中$\{\bar{M}_n\}$满足(3)和(4)，不过我们不打算这样做.]

下列结果说明(3)及(4)的作用.

**19.7 定理** 每个 $C\{M_n\}$关于点态乘法是一个代数.

**证明** 假设 $f$ 和 $g\in C\{M_n\}$，且 $\beta_f, B_f, \beta_g$ 及 $B_g$ 为对应的常数. 微分乘积法则表明

(1) $$D^n(fg)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(D^jf)(D^{n-j}g)$$

因此

(2) $$|D^n(fg)|\leqslant\beta_f\beta_g\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_f^jB_g^{n-j}M_jM_{n-j}$$

$\{\log M_n\}$ 的凸性与 $M_0=1$ 联系起来，表明对于 $0\leqslant j\leqslant n$，就有 $M_jM_{n-j}\leqslant M_n$. 因此，由(2)，二项式定理引导出

(3) $$\|D^n(fg)\|_\infty\leqslant\beta_f\beta_g(B_f+B_g)^nM_n \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

于是 $fg\in C\{M_n\}$.

**19.8 定义** 如果条件

(1) $$f\in C\{M_n\},\ (D^nf)(0)=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

能推出 $f(x)=0$ 对所有 $x\in R^1$ 成立，则称类 $C\{M_n\}$为拟解析的.

$(D^nf)(0)$用$(D^nf)(x_0)$代替时，对于任何给定的点 $x_0$，这个定义的内容当然不会改变.

因此拟解析类是具有我们在 19.6 节陈述的唯一性性质的函数类的一种. 这些类中之一是密切地关系到全纯函数的.

**19.9 定理** 类 $C\{n!\}$ 由所有这样的 $f$ 组成，$f$ 对应有一个

$\delta>0$，使得 $f$ 在由 $|\mathrm{Im}(z)|<\delta$ 定义的带形域内，能开拓为有界全纯函数．

因此，$C\{n!\}$ 是一个拟解析类．

**证明** 假设 $f\in H(\Omega)$，且对所有 $z\in\Omega$，$|f(z)|<\beta$．这里 $\Omega$ 由具有 $|y|<\delta$ 的所有 $z=x+iy$ 组成．由定理 10.26 得出，对所有实数 $x$

$$(1)\qquad |(D^n f)(x)|\leqslant\beta\delta^{-n}n! \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

因此，$f$ 在实轴上的限制属于 $C\{n!\}$．

相反地，假设 $f$ 定义在实轴上，且 $f\in C\{n!\}$，换句话说

$$(2)\qquad \|D^n f\|_\infty\leqslant\beta B^n n! \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

我们断言表示式

$$(3)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(D^n f)(a)}{n!}(x-a)^n$$

当 $a-B^{-1}<x<a+B^{-1}$ 时，对所有 $a\in R^1$ 是正确的．由 Taylor 公式重复进行分部积分得出

$$(4)\qquad f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(D^j f)(a)}{j!}(x-a)^j$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}(D^n f)(t)dt$$

由(2)式知(4)中最后一项(余项)由

$$(5)\qquad n\beta B^n\left|\int_a^x (x-t)^{n-1}dt\right|=\beta|B(x-a)|^n$$

所控制．如果 $|B(x-a)|<1$，当 $n\to\infty$ 时，它就趋于 0，从而得出(3)式．

我们现在能在(3)式内用满足 $|z-a|<1/B$ 的任何一个复数 $z$ 来代替 $x$．这就在中心为 $a$，半径为 $1/B$ 的圆盘内定义了一个全纯函数 $F_a$，并且当 $x$ 是实数，而 $|x-a|<1/B$ 时，$F_a(x)=F(x)$．因

此不同的函数 $F_a$ 都是彼此的解析延拓，它们在带形域 $|y|<1/B$ 内构成 $f$ 的全纯开拓.

如果 $0<\delta<1/B$, 且 $|z|=a+iy$, $|y|<\delta$, 则

$$|F(z)|=|F_a(z)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(D^nf)(a)}{n!}(iy)^n\right|$$

$$\leqslant\beta\sum_{n=0}^{\infty}(B\delta)^n=\frac{\beta}{1-B\delta}$$

这表明 $F$ 在带形域 $|y|<\delta$ 内有界，并完成了证明.

**19.10 定理** 类 $C\{M_n\}$ 是拟解析的，当且仅当 $C\{M_n\}$ 不包含具有紧支集的非平凡函数.

**证明** 如果 $C\{M_n\}$ 是拟解析的, $f\in C\{M_n\}$, 且 $f$ 有紧支集，则显然 $f$ 和它的所有导数在某点为零. 因此对所有 $x$, $f(x)=0$.

假设 $C\{M_n\}$ 不是拟解析的，则存在一个 $f\in C\{M_n\}$, 使得对 $n=0,1,2,\cdots$, $(D^nf)(0)=0$, 但对某个 $x_0$, $f(x_0)\neq0$. 我们可以假定 $x_0>0$. 若对 $x\geqslant0$, 令 $g(x)=f(x)$; 对 $x<0$, 令 $g(x)=0$, 则 $g\in C\{M_n\}$. 令 $h(x)=g(x)g(2x_0-x)$. 由定理 19.7, $h\in C\{M_n\}$. 同样，若 $x<0$ 和 $x>2x_0$, 则 $h(x)=0$. 但 $h(x_0)=f^2(x_0)\neq0$. 因此，$h$ 是 $C\{M_n\}$ 的一个具有紧支集的非平凡元素.

我们现在完成了关于拟解析类基本定理的预备工作.

## Denjoy Carleman 定理

**19.11 定理** 假设 $M_0=1$, 对 $n=1,2,3,\cdots$, $M_n^2\leqslant M_{n-1}M_{n+1}$, 且对 $x>0$

$$Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{M_n},\ q(x)=\sup_{n\geqslant0}\frac{x^n}{M_n}$$

则下列五个条件中任何一个可推出其余四个:

(*a*) $C\{M_n\}$不是拟解析的。

(*b*) $\int_0^\infty \log Q(x)\frac{dx}{1+x^2}<\infty$.

(*c*) $\int_0^\infty \log q(x)\frac{dx}{1+x^2}<\infty$.

(*d*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M_n}\right)^{1/n}<\infty$.

(*e*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_{n-1}}{M_n}<\infty$.

注：如果当 $n\to\infty$时，$M_n\to\infty$十分迅速，则当 $x\to\infty$时，$Q(x)$慢慢地趋向无穷．这五个条件，以它们自己的方式说明，$M_n\to\infty$是很迅速的．同时注意 $Q(x)\geqslant 1$和 $q(x)\geqslant 1$．这样，(*b*)、(*c*)内的积分恒有定义．可能对某些 $x<\infty$出现 $Q(x)=\infty$．在这种情况下，积分(*b*)是$+\infty$，并且定理断言 $C\{M_n\}$是拟解析的．

若 $M_n=n!$，则$M_{n-1}/M_n=1/n$，因此(*e*)被破坏了．这时定理就断言，$C\{n!\}$是拟解析的，与定理 19.9 一致．

**证明** (*a*)推出(*b*) 假设 $C\{M_n\}$ 不是拟解析的，则 $C\{M_n\}$包含一个具有紧支集的非平凡函数（定理 19.10）．通过对变量的一个仿射变换给出一个函数 $F\in C\{M_n\}$，在某区间$[0,A]$内具有支集，使得

$$\|D^nF\|_\infty\leqslant 2^{-n}M_n \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{1}$$

并使得$F$不恒等于零．定义

$$f(z)=\int_0^A F(t)e^{itz}dt \tag{2}$$

和

$$g(w)=f\left(\frac{i-iw}{1+w}\right) \tag{3}$$

则$f$是整函数．若$\operatorname{Im}z>0$，(2)内被积函数的绝对值最多是$|F(t)|$．

于是，$f$ 在上半平面有界；因此 $g$ 在 $U$ 内有界．同时，$g$ 在 $\bar{U}$ 上，除点 $w=-1$ 外连续．因为 $f$ 不恒等于 0（由 Fourier 变式的唯一性定理），$g$ 也不恒等于 0．定理 15.19 表明

(4) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(e^{i\theta})|d\theta>-\infty$$

如果 $x=i(1-e^{i\theta})/(1+e^{i\theta})=\operatorname{tg}(\theta/2)$，则 $d\theta=2(1+x^2)^{-1}dx$，于是(4)与

(5) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log|f(x)|\frac{dx}{1+x^2}>-\infty$$

相同．另一方面，由于 $F$ 和它的各阶导数在 0 及 $A$ 为零，(2)的分部积分给出

(6) $$f(z)=(iz)^{-n}\int_0^A(D^nF)(t)e^{itz}dt\qquad(z\neq 0)$$

现在由(1)和(6)得出

(7) $$|x^nf(x)|\leqslant 2^{-n}AM_n\qquad(x\text{ 为实数},n=0,1,2,\cdots)$$

因此

(8) $$Q(x)|f(x)|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n|f(x)|}{M_n}\leqslant 2A\qquad(x\geqslant 0)$$

且(5)及(8)推出(b)成立．

证明(b)推出(c)　$q(x)\leqslant Q(x)$．

证明 (c) 推出 (d)　令 $a_n=M_n^{1/n}$，由 $M_0=1$ 和 $M_n^2\leqslant M_{n-1}M_{n+1}$，容易验证对 $n>0$，$a_n\leqslant a_{n+1}$．若 $x\geqslant ea_n$，则 $x^n/M_n\geqslant e^n$，于是

(9) $$\log q(x)\geqslant\log\frac{x^n}{M_n}\geqslant\log e^n=n$$

因此，对每一个 $N$，

$$(10)\quad e\int_{ea_1}^{\infty}\log q(x)\frac{dx}{x^2}\geqslant e\sum_{n=1}^{N}n\int_{ea_n}^{ea_{n+1}}x^{-2}dx+e\int_{ea_{N+1}}^{\infty}(N+1)x^{-2}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{N}n\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\frac{N+1}{a_{N+1}}=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{a_n}$$

这表明$(c)$推出$(d)$.

证明$(d)$推出$(e)$ 令

$$(11)\qquad \lambda_n=\frac{M_{n-1}}{M_n}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

则$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3\geqslant\cdots$,并且若如上述, $a_n=M_n^{1/n}$, 我们便有

$$(12)\qquad (a_n\lambda_n)^n\leqslant M_n\cdot\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=1$$

这样,$\lambda_n\leqslant 1/a_n$和$\Sigma 1/a_n$的收敛性推出$\Sigma\lambda_n$收敛.

证明$(e)$推出$(a)$ 现在假设$\Sigma\lambda_n<\infty$, 其中$\lambda_n$由(11)给出. 我们断言函数

$$(13)\qquad f(z)=\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n z}{\lambda_n z}$$

是一个不恒等于0的,指数型整函数,满足不等式

$$(14)\qquad |x^k f(x)|\leqslant M_k\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\qquad (x\text{ 为实数}, k=0,1,2,\cdots)$$

首先注意$1-z^{-1}\sin z$在原点具有零点. 因此,存在一个常数$B$, 使得

$$(15)\qquad \left|1-\frac{\sin z}{z}\right|\leqslant B|z|\qquad (|z|\leqslant 1)$$

于是得出

$$(16)\qquad \left|1-\frac{\sin\lambda_n z}{\lambda_n z}\right|\leqslant B\lambda_n|z|\qquad \left(|z|\leqslant\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

于是级数

$$(17)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{\sin\lambda_n z}{\lambda_n z}\right|$$

在紧集上一致收敛.(注意,因为$\Sigma\lambda_n<\infty$,所以当$n\to\infty$时,$1/\lambda_n\to\infty$.)因此无穷乘积(13)定义一个不恒等于零的整函数$f$.

其次,恒等式

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{itz}dt \tag{18}$$

表明,若$z=x+iy$,则$|z^{-1}\sin z|\leqslant e^{|y|}$. 因此

$$|f(z)|\leqslant e^{A|z|},\text{其中}A=2+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \tag{19}$$

对实数$x$,我们有$|\sin x|\leqslant|x|$,及$|\sin x|\leqslant 1$. 因此

$$\begin{aligned}|x^kf(x)|&\leqslant|x^k|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\prod_{n=1}^{k}\left|\frac{\sin\lambda_nx}{\lambda_nx}\right| \\ &\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2(\lambda_1\cdots\lambda_k)^{-1}=M_k\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\end{aligned} \tag{20}$$

这就给出了(14). 如果我们积分(14),便得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|x^kf(x)|dx\leqslant M_k\qquad(k=0,1,2,\cdots) \tag{21}$$

我们已证明出$f$满足定理19.3的假设. $f$的Fourier变式

$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx\qquad(t\text{为实数}) \tag{22}$$

因此是不恒等于零的,具有紧支集的函数. 由(21)知$F\in C^\infty$,且由重复应用定理9.2(f),有

$$(D^kF)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)^kf(x)e^{-itx}dx \tag{23}$$

因此,由(21),$\|D^kF\|_\infty\leqslant M_k$. 它表明$F\in C\{M_n\}$.

因此$C\{M_n\}$不是拟解析的,证明就完成了.

## 习　题

1　假使$f$是指数型的整函数,且

$$\varphi(y)=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dx$$

证明或者对所有实数 $y$, $\varphi(y)=\infty$, 或者对所有实数 $y$, $\varphi(y)<\infty$. 证明如果 $\varphi$ 是有界函数, 则 $f=0$.

2 假设 $f$ 是指数型的整函数, 使得 $f$ 在两条非平行直线上的限制属于 $L^2$. 证明 $f=0$.

3 假设 $f$ 是指数型的整函数, 它在两条非平行直线上的限制是有界的. 证明 $f$ 是常数. (应用第十二章, 习题 9.)

4 假设 $f$ 是整函数, $|f(z)|<C\exp(A|z|)$, 且 $f(z)=\sum a_n z^n$, 令

$$\Phi(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!a_n}{w^{n+1}}$$

证明: 若 $|w|>A$, 则级数收敛, 若 $\Gamma(t)=(A+\varepsilon)e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi(w)e^{wz}dw$$

并且 $\Phi$ 就是定理 19.3 的证明中出现的函数 (也可参看第 19.4 节).

5 假设 $f$ 满足定理 19.2 的假设, 证明 Cauchy 公式

$$(*)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi+i\varepsilon)}{\xi-i\varepsilon-z}d\xi\qquad(0<\varepsilon<y)$$

成立, 此处 $z=x+iy$. 证明

$$f^*(x)=\lim_{y\to 0}f(x+iy)$$

对几乎所有 $x$ 存在. $f^*$ 与定理 19.2 出现的函数 $F$ 之间有什么关系? 若在 (*) 中令 $\varepsilon=0$, 且在被积函数中用 $f^*$ 代替 $f$, (*) 是否仍然真确?

6 假设 $\varphi\in L^2(-\infty,\infty)$ 且 $\varphi>0$. 证明, 当且仅当

$$\int_{-\infty}^{\infty}\log\varphi(x)\frac{dx}{1+x^2}>-\infty$$

时, 存在一个 $f$, $|f|=\varphi$, 使得 $f$ 的 Fourier 变式在半直线上为零. 提示: 如习题 5 一样, 考虑 $f^*$, 此处 $f=\exp(u+iv)$, 且

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\log\varphi(t)dt$$

7 设 $f$ 是平面内闭集 $E$ 上的复函数. 证明下列关于 $f$ 的两个条件等价:

(a) 存在开集 $\Omega\supset E$ 和一个函数 $F\in H(\Omega)$, 使得对 $z\in E$, $F(z)=f(z)$.

(*b*) 对每一个 $\alpha\in E$, 对应有 $\alpha$ 的邻域 $V_\alpha$ 和一个函数 $F_\alpha\in H(V_\alpha)$, 使得在 $V_\alpha\cap E$ 内, $F_\alpha(z)=f(z)$. (它的一种特殊情形, 已在定理 19.9 证明.)

8 证明 $C\{n!\}=C\{n^n\}$.

9 证明存在比 $C\{n!\}$ 大的拟解析类.

10 如在定理 19.11 证明中一样, 令 $\lambda_n=M_{n-1}/M_n$. 取 $g_0\in C_c(R^1)$, 且定义

$$g_n(x)=(2\lambda_n)^{-1}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} g_{n-1}(x-t)\,dt \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

直接证明 (不用 Fourier 变式或全纯函数) $g=\lim g_n$ 是一个函数, 它证明了定理 19.11 中的 (*e*) 推出 (*a*) (可以任意选择 $g_0$ 这一点是方便的).

11 找出函数 $\varphi\in C^\infty$ 的一个明显的公式, 这个函数的支集在 $[-2,2]$ 内, 并且 $-1<x<1$ 时, $\varphi(x)=1$.

12 证明对于每一个复数序列 $\{\alpha_n\}$, 都对应有一个函数 $f\in C^\infty$, 使得当 $n=0,1,2,\cdots$ 时, $(D^nf)(0)=\alpha_n$. 提示: 设 $\varphi$ 为习题 11 中所述. 如果 $\beta_n=\alpha_n/n!$, $g_n(x)=\beta_nx^n\varphi(x)$, 且

$$f_n(x)=\lambda_n^{-n}g_n(\lambda_nx)=\beta_nx^n\varphi(\lambda_nx)$$

则对于 $k=0,\cdots,n-1$, 当 $\lambda_n$ 充分大时, $|D^kf_n|<2^{-n}$. 取 $f=\Sigma f_n$.

13 构造一个函数 $f\in C^\infty$, 使幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(D^nf)(a)}{n!}(x-a)^n$$

对每个 $a$ 都有 0 收敛半径. 提示: 令

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_ke^{i\lambda_kx}$$

其中 $\{c_k\}$ 和 $\{\lambda_k\}$ 是正数序列, 选择得使 $\Sigma c_k\lambda_k^n<\infty$ 对 $n=0,1,2,\cdots$ 都成立, 并使 $c_n\lambda_n^n$ 增大得非常迅速, 要比级数 $\Sigma c_k\lambda_k^n$ 中其余所有各项之和大得多.

例如, 令 $c_k=\lambda_k^{1-k}$, 并选 $\{\lambda_k\}$ 使

$$\lambda_k>2\sum_{j=1}^{k-1}c_j\lambda_j^k \text{ 和 } \lambda_k>k^{2k}$$

14 假设 $C\{M_n\}$ 是拟解析的, $f\in C\{M_n\}$, 并且有无穷多个 $x\in[0,1]$, 使 $f(x)=0$. 这能推出什么结论?

15 设 $X$ 是满足下列条件的整函数 $f$ 组成的向量空间: 存在 $C<\infty$ 使

$|f(z)|\leqslant Ce^{\tau|z|}$，并且它在实轴上的限制属于 $L^2$. 将每个 $f\in X$ 对应于它在整数集上的限制. 证明 $f\to\{f(n)\}$是 $X$ 到 $l^2$ 上的一一线性映射.

16 假定 $f$ 是$(-\infty,\infty)$上的可测函数，对所有 $x$, $|f(x)|<e^{-|x|}$. 证明它的 Fourier 变式 $\hat{f}$ 不能有紧支集，除非 $f(x)=0$ a. e.

# 第二十章　用多项式一致逼近

## 引言

**20.1**　设 $K^0$ 是复平面内紧集 $K$ 的内部.（依照定义，$K^0$ 是所有 $K$ 的开圆盘子集的并；当然，即使 $K$ 是非空的，$K^0$ 也可能是空集.）设 $P(K)$ 表示所有在 $K$ 上是 $z$ 的多项式的一致极限的函数集.

什么函数属于 $P(K)$？

有两个必要条件立即引起注意：如果 $f\in P(K)$，则 $f\in C(K)$ 和 $f\in H(K^0)$.

问题提出来了，这些必要条件是否也是充分条件？当 $K$ 分离平面时（换句话说，当 $K$ 关于平面的余集是不连通时），回答是否定的．我们在 13.8 节看到过．另一方面，如果 $K$ 是实轴上的区间（在这种情况 $K^0=\varnothing$），则 Weierstrass 逼近定理断言

$$P(K)=C(K)$$

如果 $K$ 是区间，那末回答是肯定的．Runge 定理也指出这个方向，因为它说明，对于不分离平面的紧集 $K$，$P(K)$ 至少包含所有能够全纯扩展到某个开集 $\Omega\supset K$ 的 $f\in C(K)$.

在本章中，我们将证明 Mergelyan 定理，它说明假若 $K$ 不分离平面，那末，不需要再加任何多余的假设，上面提到的必要条件同样也是充分的.

构成证明的主要组份是：Tietze 开拓定理，一个包含卷积的光滑化过程，Runge 定理和引理 20.2，其证明依赖第十四章介绍的 $\mathscr{S}$ 类的性质.

## 一些引理

**20.2 引理** 假设$D$是半径$r>0$的开圆盘，$E\subset D$，$E$是紧和连通的，$\Omega=S^2-E$是连通的，并且$E$的直径至少是$r$. 则存在函数$g\in H(\Omega)$和常数$b$，具有下述性质：如果

(1)
$$Q(\zeta,z)=g(z)+(\zeta-b)g^2(z)$$

则不等式

(2)
$$|Q(\zeta,z)|<\frac{100}{r}$$

(3)
$$\left|Q(\zeta,z)-\frac{1}{z-\zeta}\right|<\frac{1000r^2}{|z-\zeta|^3}$$

对于所有$z\in\Omega$和所有$\zeta\in D$成立.

我们回顾一下，$S^2$是Riemann球面，而$E$的直径是数$|z_1-z_2|$的上确界，其中$z_1\in E$和$z_2\in E$.

**证明** 不失一般性，假设$D$的中心在原点. 于是$D=D(0;r)$. 定理 13.11 的蕴涵式(d)→(b)说明了$\Omega$是单连通的.（注意，$\infty\in\Omega$.）由 Riemann 映射定理，因而有一个$U$到$\Omega$上的保形映射$F$，使$F(0)=\infty$. $F$有形如

(4)
$$F(w)=\frac{a}{w}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nw^n \qquad (w\in U)$$

的展开式. 我们定义

(5)
$$g(z)=\frac{1}{a}F^{-1}(z) \qquad (z\in\Omega)$$

其中$F^{-1}$是映$\Omega$到$U$上的$F$的逆映射，并且我们令

(6)
$$b=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}zg(z)dz$$

其中$\Gamma$为圆心在 0 和半径为$r$的正向圆周.

依照(4)式，定理 14.15 可用于$F/a$. 它断定$(F/a)(U)$的余

集的直径至多是 4，所以 $\text{diam}E \leqslant 4|a|$．因为 $\text{diam}E \geqslant r$，结果是

(7) $$|a| \geqslant \frac{r}{4}$$

因为 $g$ 是 $\Omega$ 到 $D(0;1/|a|)$ 上的保形映射，故(7)式表明

(8) $$|g(z)| < \frac{4}{r} \qquad (z \in \Omega)$$

又因为 $\Gamma$ 是 $\Omega$ 内的路径，长为 $2\pi r$，所以(6)给出

(9) $$|b| < 4r$$

如果 $\zeta \in D$，则 $|\zeta| < r$，于是(1)，(8)和(9)式蕴涵着

(10) $$|Q| \leqslant \frac{4}{r} + 5r\left(\frac{16}{r^2}\right) < \frac{100}{r}$$

这就证明了(2)式．

固定 $\zeta \in D$．

如果 $z = F(w)$，则 $zg(z) = wF(w)/a$；又因为当 $w \to 0$ 时，$wF(w) \to a$，所以当 $z \to \infty$ 时，$zg(z) \to 1$．因此 $g$ 有展开式

(11) $$g(z) = \frac{1}{z-\zeta} + \frac{\lambda_2(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + \frac{\lambda_3(\zeta)}{(z-\zeta)^3} + \cdots$$
$$(|z-\zeta| > 2r)$$

设 $\Gamma_0$ 是中心在 0 的一个大圆周；(11)（依照 Cauchy 定理）给出

(12) $$\lambda_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} (z-\zeta)g(z)dz = b - \zeta$$

将 $\lambda_2(\zeta)$ 的值代入(11)，则(1)表明函数

(13) $$\varphi(z) = \left[Q(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta}\right](z-\zeta)^3$$

当 $z \to \infty$ 时有界．因此 $\varphi$ 在 $\infty$ 有可去奇点．如果 $z \in \Omega \cap D$，则 $|z-\zeta| < 2r$，于是(2)和(3)给出

(14) $$|\varphi(z)| < 8r^3|Q(\zeta, z)| + 4r^2 < 1000r^2$$

由最大模定理，(14)对于所有 $z \in \Omega$ 成立．这便证明了(3)．

**20.3 引理** 假设$f\in C_c'(R^2)$，$C_c'(R^2)$是所有具有紧支集的在全平面内连续可微的函数的空间．令

$$\bar{\partial}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1}$$

则下述"Cauchy 公式"成立：

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{R^2}\frac{(\bar{\partial}f)(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta \qquad (\zeta=\xi+i\eta) \tag{2}$$

**证明** 这可由 Green 定理推得．但是，下面却是一个简单的直接证明：

设$\varphi(r,\theta)=f(z+re^{i\theta})$，$r>0$，$\theta$是实数．如果$\zeta=z+re^{i\theta}$，链式法则给出

$$(\bar{\partial}f)(\zeta)=\frac{1}{2}e^{i\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\varphi(r,\theta) \tag{3}$$

因此，当$\varepsilon\to0$时，(2)式右边等于极限

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)d\theta dr \tag{4}$$

对于每一个$r>0$，$\varphi$是$\theta$的周期函数，周期为$2\pi$．于是$\partial\varphi/\partial\theta$的积分为0，并且(4)变成

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial r}dr=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\varphi(\varepsilon,\theta)d\theta \tag{5}$$

当$\varepsilon\to0$时，$\varphi(\varepsilon,\theta)$一致地趋于$f(z)$．这就给出了(2)．

我们将使用在证明 Urysohn 引理时所用的同样处置建立 Tietze 开拓定理，因为它完全是这个引理的直接推论．

**20.4 Tietze 开拓定理** 假设$K$是局部紧 Hausdorff 空间$X$的紧子集，并且$f\in C(K)$，则存在一个函数$F\in C_c(X)$，对于所有$x\in K$，满足$F(x)=f(x)$．

（象在 Lusin定理中一样，我们也可以安排得使$\|F\|_X=\|f\|_K$.）

**证明** 假设$f$是实的，$-1\leqslant f\leqslant1$．设$W$是具有紧闭包的开

集，使得 $K\subset W$. 设

(1) $$K^+=\{x\in K: f(x)\geqslant\frac{1}{3}\},\ K^-=\{x\in K: f(x)\leqslant-\frac{1}{3}\}$$

则 $K^+$和 $K^-$是 $W$ 的不相交的紧子集.

作为 Urysohn 引理的推论，存在函数 $f_1\in C_c(X)$ 在 $K^+$ 满足 $f_1(x)=\frac{1}{3}$, 在$K^-$上 $f_1(x)=-\frac{1}{3}$, 对所有$x\in X$, $-\frac{1}{3}\leqslant f_1(x)\leqslant\frac{1}{3}$, 并且 $f_1$ 的支集在 $W$ 内. 因此,

(2) $$\text{在}K\text{上},\ |f-f_1|\leqslant\frac{2}{3};\ \text{在}X\text{上},\ |f_1|\leqslant\frac{1}{3}$$

用 $f-f_1$ 代替 $f$ 重复这一构造过程：存在 $f_2\in C_c(X)$，其支集在$W$内，使得

(3) $$\text{在}K\text{上},\ |f-f_1-f_2|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^2;\ \text{在}X\text{上},\ |f_2|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

按同样方法，我们得到$f_n\in C_c(X)$，其支集在$W$内，使得

(4) $$\text{在}K\text{上},\ |f-f_1-\cdots-f_n|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n;\ \text{在}X\text{上},$$

$$|f_n|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

令$F=f_1+f_2+f_3+\cdots$. 依照(4)式，这个级数在$K$上收敛于 $f$，并且它在$X$上一致收敛. 因此，$F$ 是连续函数. 同样，$F$ 的支集在$\overline{W}$内.

## Mergelyan 定理

**20.5 定理** 如果$K$是平面内的紧集，它的余集是连通的，若 $f$ 是在$K$上连续，在$K$的内部全纯的复函数，并且如果 $\varepsilon>0$，则存在多项式 $P$，对于所有 $z\in K$，满足$|f(z)-P(z)|<\varepsilon$.

如果$K$的内部是空集，则假设部分无所谓满足的问题，因而结论对于所有 $f\in C(K)$成立. 注意$K$不必是连通的.

**证明** 由 Tietze 定理，$f$ 能开拓为一个在全平面内具有紧支集的连续函数. 我们固定这样的一个开拓，并且仍记为 $f$.

对于任意 $\delta>0$，设 $\omega(\delta)$ 是

$$|f(z_2)-f(z_1)|$$

的上确界，其中 $z_1$ 和 $z_2$ 都满足条件 $|z_2-z_1|\leqslant\delta$. 因为 $f$ 一致连续，我们有

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0 \tag{1}$$

从现在起固定 $\delta$. 我们将证明存在多项式 $P$，满足

$$|f(z)-P(z)|<10000\omega(\delta) \qquad (z\in K) \tag{2}$$

由(1)，这就证明了本定理.

我们的第一个目标是构造一个函数 $\Phi\in C_c'(R^2)$，对于所有 $z$，满足

$$|f(z)-\Phi(z)|\leqslant\omega(\delta) \tag{3}$$

$$|(\bar\partial\Phi)(z)|\leqslant\frac{2\omega(\delta)}{\delta} \tag{4}$$

并且

$$\Phi(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_X\frac{(\bar\partial\Phi)(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta \qquad (\zeta=\xi+i\eta) \tag{5}$$

其中 $X$ 是所有在 $\Phi$ 的支集中与 $K$ 的余集的距离不超过 $\delta$ 的点的集. (因此，$X$ 不包含"深入 $K$ 中"的点.)

我们构造 $\Phi$ 作为 $f$ 和一个光滑函数 $A$ 的卷积，当 $r>\delta$ 时，令 $a(r)=0$，当 $0\leqslant r\leqslant\delta$ 时，令

$$a(r)=\frac{3}{\pi\delta^2}\left(1-\frac{r^2}{\delta^2}\right)^2 \tag{6}$$

并且对于所有复数 $z$，定义

$$A(z)=a(|z|) \tag{7}$$

很明显 $A\in C_c'(R^2)$. 我们断言

$$\iint_{R^2} A = 1 \tag{8}$$

$$\iint_{R^2} \bar{\partial} A = 0 \tag{9}$$

$$\iint_{R^2} |\bar{\partial} A| = \frac{24}{15\delta} < \frac{2}{\delta} \tag{10}$$

在(6)中调整常数使(8)能够成立.（在极坐标中计算积分.）因为$A$有紧支集，故(9)很易得到．为了计算(10)，象在引理20.3的证明一样，用极坐标表示$\bar{\partial} A$，并且注意到$\partial A/\partial\theta=0$，$|\partial A/\partial r| = -a'(r)$.

现在定义

$$\Phi(z) = \iint_{R^2} f(z-\zeta) A(\zeta)\, d\xi d\eta = \iint_{R^2} A(z-\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \tag{11}$$

因为$f$和$A$有紧支集，于是$\Phi$也有．因为

$$\Phi(z) - f(z) = \iint_{R^2} [f(z-\zeta) - f(z)] A(\zeta) d\xi d\eta \tag{12}$$

又如果$|\zeta| > \delta$，则$A(\zeta) = 0$，所以由(8)得出(3)．因为$A \in C_c''(R^2)$，$A$的差商有界收敛于对应的$A$的偏导数．因此，(11)的最后一个表达式可以在积分号下求导．于是我们得到

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}\Phi)(z) &= \iint_{R^2} (\bar{\partial} A)(z-\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \\ &= \iint_{R^2} f(z-\zeta) (\bar{\partial} A)(\zeta)\, d\xi d\eta \\ &= \iint_{R^2} [f(z-\zeta) - f(z)] (\bar{\partial} A)(\zeta) d\xi d\eta\end{aligned} \tag{13}$$

最后一个等式依赖于(9)．现在由(10)和(13)给出(4)．如果我们用$\Phi_x$和$\Phi_y$代替$\bar{\partial}\Phi$写出(13)式，则看出$\Phi$有连续偏导数．因此，应用引理20.3于$\Phi$，并且，如果我们能证明在$G$内$\bar{\partial}\Phi = 0$，其

中 $G$ 是所有与 $K$ 的余集的距离超过 $\delta$ 的 $z\in K$ 的集，则(5)便成立. 我们将通过证明

$$\Phi(z)=f(z) \qquad (z\in G) \tag{14}$$

来做到这一点. 注意，因为 $f$ 在 $G$ 内全纯，故在 $G$ 内 $\bar{\partial}f=0$. (我们记住 $\bar{\partial}$ 是Cauchy-Riemann 算子，已在 11.1 节定义.)现在，如果 $z\in G$，则对于所有满足 $|\zeta|<\delta$ 的 $\zeta$，$z-\zeta$ 在 $K$ 的内部. 由(11)的第一个等式，调和函数的平均值性质因此给出：对所有 $z\in G$，

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\int_0^\delta a(r)rdr\int_0^{2\pi}f(z-re^{i\theta})d\theta\\ &=2\pi f(z)\int_0^\delta a(r)rdr=f(z)\iint_{R^2}A=f(z)\end{aligned} \tag{15}$$

我们现在已经证明了(3)，(4)和(5)式.

$X$ 的定义表明，$X$ 是紧集并且可以被有限个半径为 $2\delta$，圆心不在 $K$ 内的开圆盘 $D_1,\cdots,D_n$ 所覆盖. 因为 $S^2-K$ 是连通的，每一个 $D_j$ 的圆心可以被一条在 $S^2-K$ 内的多边形路径连到 $\infty$. 结果是每一个 $D_j$ 包含一个紧连通集 $E_j$，其直径至少是 $2\delta$，使得 $S^2-E_j$ 是连通的，且 $K\cap E_j=\varnothing$.

现在我们对 $r=2\delta$ 应用引理 20.2. 存在函数 $g_j\in H(S^2-E_j)$ 和常数 $b_j$，如果

$$Q_j(\zeta,z)=g_j(z)+(\zeta-b_j)g_j^2(z) \tag{16}$$

则不等式

$$|Q_j(\zeta,z)|<\frac{50}{\delta} \tag{17}$$

$$\left|Q_j(\zeta,z)-\frac{1}{z-\zeta}\right|<\frac{4000\delta^2}{|z-\zeta|^3} \tag{18}$$

对所有 $z\notin E_j$ 和 $\zeta\in D_j$ 成立.

设 $\Omega$ 是 $E_1\cup\cdots\cup E_n$ 的余集. 则 $\Omega$ 是包含 $K$ 的开集.

令 $X_1=X\cap D_1$ 和对于 $2\leqslant j\leqslant n$；$X_j=(X\cap D_j)-(X_1\cup\cdots\cup$

$X_{j-1}$).

定义

(19) $$R(\zeta, z)=Q_j(\zeta, z) \qquad (\zeta\in X_j,\ z\in\Omega)$$

并且

(20) $$F(z)=\frac{1}{\pi}\iint_X(\bar{\partial}\Phi)(\zeta)R(\zeta, z)d\xi d\eta \qquad (z\in\Omega)$$

因为

(21) $$F(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\pi}\iint_{X_j}(\bar{\partial}\Phi)(\zeta)Q_j(\zeta, z)d\xi d\eta$$

(16)式表明$F$是函数$g_j$和$g_j^2$的有限线性组合. 因此$F\in H(\Omega)$.

由(20),(4)和(5),我们有

(22) $$|F(z)-\Phi(z)|<\frac{2\omega(\delta)}{\pi\delta}\iint_X\left|R(\zeta, z)-\frac{1}{z-\zeta}\right|d\xi d\eta$$

$$(z\in\Omega)$$

注意到,如果$\zeta\in X$和$z\in\Omega$, 不等式(17)和(18)用$R$代替$Q_j$仍然真确. 因为,若$\zeta\in X$,则对于某个$j$,$\zeta\in X_j$,并且,$R(\zeta,z)=Q_j(\zeta,z)$对于所有$z\in\Omega$成立.

现在固定$z\in\Omega$,令$\zeta=z+\rho e^{i\theta}$,并且当$\rho<4\delta$时用(17)式,当$4\delta\leqslant\rho$时用(18)式来估计(22)式中的被积函数. 因此看出(22)式的积分小于

(23) $$2\pi\int_0^{4\delta}\left(\frac{50}{\delta}+\frac{1}{\rho}\right)\rho d\rho=808\pi\delta$$

与

(24) $$2\pi\int_{4\delta}^{\infty}\frac{4000\delta^2}{\rho^3}\rho d\rho=2000\pi\delta$$

的和. 这样,(22)式导出

(25) $$|F(z)-\Phi(z)|<6000\omega(\delta) \qquad (z\in\Omega)$$

因为$F\in H(\Omega)$，$K\subset\Omega$，且$S^2-K$是连通的，所以Runge定理指出$F$可以在$K$上用多项式一致逼近．因此(3)和(25)证明(2)式可以成立．

这就完成了证明．

应该指出这个证明的一个特色．我们曾经不得不证明给定函数$f$是在$C(K)$的闭子空间$P(K)$中的．（我们用20.1节的术语．）我们的第一个步骤在于用$\Phi$逼近$f$．但是这一步使我们超出了$P(K)$的范围，因为$\Phi$是这样构造的，使得一般说来，$\Phi$在$K$的整个内部不是全纯的．因此$\Phi$与$P(K)$有正距离．然而，(25)指出这个距离小于一个常数乘$\omega(\delta)$．[事实上，已证明这定理之后，由(3)知道这个距离至多是$\omega(\delta)$，而不是$6000\omega(\delta)$．] (25)的证明依赖于不等式(4)和在$G$内$\bar{\partial}\Phi=0$这两个事实．因为全纯函数$\varphi$被$\bar{\partial}\varphi=0$所刻划，(4)可以看成是$\Phi$与全纯函数离得并不太远，并且这个解释已被(25)所证实．

## 习　题

1　推广Mergelyan定理到$S^2-K$有有限个分支的情况：证明每一个在$K$内部全纯的$f\in C(K)$，可以在$K$上用有理函数一致逼近．

2　证明习题1的结果不能推广到平面内任意紧集$K$．这可由详细验证下面的例子证实．对于$n=1,2,3,\cdots$，设$D_n=D(a_n;r_n)$是$U$内不相交的开圆盘，它们的并$V$在$U$内稠密，并满足$\sum r_n<\infty$．令$K=\overline{U}-V$．设$\Gamma$和$\gamma_n$是路径

$$\Gamma(t)=e^{it},\ \gamma_n(t)=a_n+\gamma_n e^{it},\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

并定义

$$L(f)=\int_\Gamma f(z)\,dz-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\gamma_n}f(z)\,dz\qquad (f\in C(K))$$

证明$L$是$C(K)$上有界线性泛函．证明对每一个极点在$K$外面的有理函数$R$，$L(R)=0$．并证明存在$f\in C(K)$，使$L(f)\neq 0$．

3　证明在证明引理 20.2 时所构造的函数 $g$ 在满足当 $z\to\infty$ 时，$zf(z)\to 1$ 的全体 $f\in H(\Omega)$ 中，具有最小的上确界范数.（这就给出了引理证明的线索.）

同时证明在那个证明中 $b=c_0$，并且不等式 $|b|<4r$，因此可用 $|b|<r$ 替换. 事实上，$b$ 在集 $E$ 的凸包内.

# 附　录

## Hausdorff 极大性定理

我们首先证明一个引理，当它与选择公理配合时，导出定理 4.21 的一个几乎自明的证明.

如果$\mathscr{F}$是一个集族，并且$\Phi\subset\mathscr{F}$. 我们称$\Phi$是$\mathscr{F}$的一个子链，如果$\Phi$按集的包含关系是全序的. 显然，这意味着如果 $A\in\Phi$ 及 $B\in\Phi$，则不是 $A\subset B$ 就是 $B\subset A$. $\Phi$的并将被认为是$\Phi$的全体成员之并.

**引理**　假设$\mathscr{F}$是集$X$的一个非空的子集族，使得$\mathscr{F}$的每一个子链的并属于$\mathscr{F}$. 假设 $g$ 是一个函数，使每一个 $A\in\mathscr{F}$ 对应于一个集 $g(A)\in\mathscr{F}$，满足 $A\subset g(A)$，且 $g(A)-A$ 至多由一个元素组成. 则存在 $A\in\mathscr{F}$，使 $g(A)=A$.

**证明**　固定$A_0\in\mathscr{F}$. 称$\mathscr{F}$的子族$\mathscr{F}'$为塔，如果$\mathscr{F}'$具有下述三个性质：

(*a*)　$A_0\in\mathscr{F}'$，

(*b*)　$\mathscr{F}'$的每一个子链的并属于$\mathscr{F}'$，

(*c*)　如果 $A\in\mathscr{F}'$，则亦有 $g(A)\in\mathscr{F}'$.

所有塔的族是非空的. 因为，如果$\mathscr{F}_1$是所有满足 $A_0\subset A$ 的 $A\in\mathscr{F}$的族，则$\mathscr{F}_1$是一个塔. 设$\mathscr{F}_0$是所有塔的交，则(容易证明)$\mathscr{F}_0$是塔，但$\mathscr{F}_0$的真子族没有一个是塔. 如果 $A\in\mathscr{F}_0$，亦有 $A_0\subset A$. 证明的思想是指出$\mathscr{F}_0$是$\mathscr{F}$的一个子链.

设$\Gamma$是所有这样一些 $C\in\mathscr{F}_0$ 的族，即对每一个 $A\in\mathscr{F}_0$，或者 $A\subset C$ 或者 $C\subset A$.

对于每个 $C\in\Gamma$，设 $\Phi(C)$ 是所有满足 $A\subset C$ 或者 $g(C)\subset A$ 的 $A\in\mathscr{F}_0$ 的族.

$\Gamma$以及每个$\Phi(C)$都明显满足性质(*a*)和(*b*). 固定$C\in\Gamma$，并假设$A\in\Phi(C)$ 我们需要证明 $g(A)\in\Phi(C)$. 如果 $A\in\Phi(C)$，就有三种可能：或者 $A\subset C$ 及 $A\neq C$，或者 $A=C$，或者$g(C)\subset A$. 如果 $A$ 是 $C$ 的真子集，则 $C$ 不能是 $g(A)$ 的真子集，否则 $g(A)-A$ 至少包含两个元素；因为 $C\in\Gamma$，所以 $g(A)\subset C$. 如果 $A=C$，则 $g(A)=g(C)$. 如果 $g(C)\subset A$，因为 $A\subset g(A)$，则亦有 $g(C)\subset$

$g(A)$. 于是 $g(A)\in\Phi(C)$, 并且我们证明了 $\Phi(C)$ 是塔. 现在 $\mathscr{F}_0$ 的极小性蕴涵着对于每一个 $C\in\Gamma$, $\Phi(C)=\mathscr{F}_0$.

换言之, 如果 $A\in\mathscr{F}_0$ 及 $C\in\Gamma$, 则不是 $A\subset C$ 就是 $g(C)\subset A$. 但是, 这也就是说 $g(C)\in\Gamma$. 因此 $\Gamma$ 是塔, 并且 $\mathscr{F}_0$ 的极小性表明 $\Gamma=\mathscr{F}_0$. 由 $\Gamma$ 的定义立即知道 $\mathscr{F}_0$ 是全序的.

设 $A$ 是 $\mathscr{F}_0$ 的并. 因为 $\mathscr{F}_0$ 满足性质 $(b)$, $A\in\mathscr{F}_0$. 由性质 $(c)$, $g(A)\in\mathscr{F}_0$. 因为 $A$ 是 $\mathscr{F}_0$ 的最大元及 $A\subset g(A)$, 由此得出 $A=g(A)$.

**定义** 关于集 $X$ 的一个选择函数是指一个函数 $f$, 它对 $X$ 的每一个非空子集 $E$ 都对应于 $E$ 的一个元素: $f(E)\in E$.

用非正式语言说, $f$ 对 $X$ 的每一个非空子集"选出"一个元素.

**选择公理** 对于每一个集都存在一个选择函数.

**Hausdorff 极大性定理** 每一个非空半序集 $P$ 有一个极大全序子集.

**证明** 设 $\mathscr{F}$ 是 $P$ 的所有全序子集的族. 因为 $P$ 的每一个只由单一元素组成的子集是全序集, 所以 $\mathscr{F}$ 是非空的. 注意, 任何全序集的链的并是全序的.

设 $f$ 是关于 $P$ 的一个选择函数. 如果 $A\in\mathscr{F}$, 设 $A^*$ 是在 $A$ 的余集中满足 $A\cup\{x\}\in\mathscr{F}$ 的所有 $x$ 的集. 如果 $A^*\neq\varnothing$, 令

$$g(A)=A\cup\{f(A^*)\}$$

如果 $A^*=\varnothing$, 令 $g(A)=A$.

由引理, 由于至少有一 $A\in\mathscr{F}$, $A^*=\varnothing$, 并且任何这样的 $A$ 都是 $\mathscr{F}$ 的极大元素.

# 注　释

## 第 一 章

关于微分和积分的现代理论的第一本著作是 Lebesgue 于 1904 年出版的"Leçons sur l'intégration".

要想知道针对着想作出一种合适的积分理论所进行的早期尝试的光辉历史,可以参看[37]†. 其中包含有在关于简单的集论概念被正式定义和被人们充分了解之前,甚至是第一流的数学家们所遇到的困难的有趣讨论.

本书所提出的抽象积分处理方式,是受 Saks 的[28]所启发的. 若用 $\sigma$-环(公理: 如果对所有 $i=1,2,3,\cdots$, $A_i\in\mathscr{R}$, 则 $\bigcup A_i\in\mathscr{R}$, 且 $A_1-A_2\in\mathscr{R}$; 并不要求 $X\in\mathscr{R}$)取代 $\sigma$-代数, 可以得到更大的普遍性. 但其代价必然是使可测性定义变得更为烦琐. 这可以参看[7]的 18 节. 在全部经典性的应用中, $X$ 的可测性或多或少是自动满足的. 这就是我们选择以 $\sigma$-代数为基础的比较简单的测度论的理由.

1.11 节. $\mathscr{B}$ 的定义同[12]. 在[7]中, Borel 集族被定义为由紧集生成的 $\sigma$-环. 当空间不是 $\sigma$-紧时, 这个集族比我们这里定义的要小一些.

## 第 二 章

2.12 节. Urysohn 引理通常的说法是: 若 $K_0$ 和 $K_1$ 是正规 Hausdorff 空间 $X$ 的两个互不相交的闭集, 则存在 $X$ 上的一个连续函数, 它在 $K_0$ 上等于 0 而在 $K_1$ 上等于 1. 其证明恰如本书所述.

2.14 节. 这个定理当 $X=[0,1]$ 时的原始形式是 F. Riesz (1909) 作出的. 关于其进一步的历史, 可参看[5], pp. 373, 380—381 和[12], pp. 134—135. 此处定理的陈述形式与[12]中的具有同样的普遍性. 定理 2.14 的证明中, 对 $X$ 的全体子集所定义的集函数 $\mu$, 由于它的可数次可加性(第一步), 而称为外测度. 这一概念的系统探讨(由Carathéodory 开创的)可参看[25]

† 方括号内的数字参看参考文献目录. ——译者注.

[28].

2.20 节． 关于沿着更为古典的途径直接构造 Lebesgue 测度的情况可参看[31]，[35]和[26].

2.21 节． 任意可数生成 $\sigma$-代数的势$\leqslant c$ 的证明可以在[38]的pp.133—134 找到．它的势或者有限或者$\geqslant c$ 这一点，在做过第一章习题 1 之后应当是很清楚的．

2.22 节． 关于不可测集与在一个群的作用之下测度保持不变二者之间的关系这个论题，J. Von Neumann 有一篇非常富有启发性的文章：Zur allgemeinen Theorie des Masses, *Fundamenta Math.*, Vol. 13, pp. 73—116, 1929. 也可以参看 Halmos 发表在 *Bull. Am. Math. Soc.* (1958 年 5 月) 专门介绍 Von Neumann 的工作的特辑中的文章．

2.23 节． [28], p. 72.

2.24 节． [28], p. 75. 对于 Lebesgue 积分理论，还有另外一种由Daniell(*Ann. Math.*, Vol. 19, pp. 279—294, 1917—1918)作出的、以正线性泛函的开拓为基础的处理方式．当应用于 $C_c(X)$ 时它就导致这样一种结构，使得Vitali-Carathéodory 定理上实质上转化为可测性的定义．参看[17]，关于完整的讨论可参看[18].

习题 8. R. B. Kirk (*Am. Math. Monthly*, Vol. 79, pp. 884—886, 1972.)在 Baire 类定理的基础上找到了一个很有趣的推广．

习题 17. 这个例子出现在 *Acta Math.*, Vol. 89, p. 160, 1953, R. E. Edwards 的"A Theory of Radon Measures on Locally Compact Spaces"中．遗憾的是[27]中忽略了它的存在性．

习题 18. [7], p. 231; 由 Dieudonné 最先作出．

## 第 三 章

最普通的参考书是[9]．也可以参看[36]的第一章．

习题 3. *Fundamenta Math.*, Vol. 1(1920) 包含有与附带性注解有关的三篇文章．

习题 16. [28], p. 18.

习题 17. (*b*) 这一部分的第二种提示性证明由 W. P. Novinger 发表于 *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 34, pp. 627—628, 1972. 它也为 David Hall 所发现．

习题 18. 在概率论中，依测度收敛性是一个很自然的概念. 参看[7]的第九章.

## 第　四　章

论及 Hilbert 空间理论的书很多. 我们列出 [6] 和 [24] 作为主要参考书. 也可参看[5]、[17]和[19].

Fourier 级数的标准著作是[36]. 作为比较简单的引论，可参看 [10], [31]和[39].

## 第　五　章

这方面的经典著作是[2]. 更为近代的文献是[5], [14]和[24]. 也可参看[17]和[19].

5.22 节. 关于表示测度的比较深入的讨论可参看 Arens 和 Singer 的 *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 5, pp. 735—745, 1954.

## 第　六　章

6.3 节. 常数 1/6 可用 $1/\pi$ 代替，而且这也是最好的可能值. 参看 R. P. Kaufman 和 N. W. Rickert, *Bull. Am. Math. Soc.*, Vol. 72, pp. 672—676, 1966, 和 W. W. Bledsoe, *Am. Math. Monthly*, Vol. 77, pp. 180—182, 1970(一种较简单的处理).

6.9 节. Von Neumann 的证明见于他的论文: On Rings of Operators, III, *Ann, Math.*, Vol. 41, pp. 94—161, 1940 的关于测度论一节. 参看该文的 pp. 124—130.

6.15 节. $L^\infty \neq (L_1)^*$ 的现象由 J. T. Schwartz 在 *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 2, pp. 270—275, 1951, 以及 H. W. Ellis 与 D. O. Snow 在 *Can. Math. Bull.*, Vol. 6, pp. 211—229, 1963 中讨论过. 也可参看[7], p. 131 和[28], p. 36.

6.19 节. 定理 2.14 的参考文献此处同样适用.

习题 6. 参看[17], p. 43.

习题10(g). 参看[36], Vol. I. p. 167.

## 第 七 章

Fubini 定理在本书讨论的与[7] 和 [28]中的一样. 不同的处理可参看[25].

7.9 节的(c). 见于 *Fundamenta Math.*, Vol. 1, p. 145, 1920.

习题 2. 与积分是一条曲线所包围的面积这一观念相对应, Lebesgue 积分可以用坐标集的测度来开展讨论. 这就是[16]中所做的.

习题 8. (b) 这一部分, 甚至在更加严格的形式之下, 是 Lebesgue 在 *J. Mathématiques*, *Ser*. 6, Vol. 1 p. 201, 1905 中证明的, 并且似乎已被人们遗忘. 鉴于 Sierpinski 的另一个例子 (*Fundamenta Math.* Vol. 1, p. 114, 1920), 值得注意的是, 存在一个不是 Lebesgue 可测的平面点集 $E$, 它和每一条直线至多有两个交点. 若 $f=\chi_E$, 则 $f$ 不是 Lebesgue 可测的, 尽管其所有截口 $f_x$ 和 $f^y$ 上半连续; 事实上, 它们之中每一个至多有两个不连续点. (这个例子依赖选择公理, 但不依赖连续统假设.)

## 第 八 章

基本定理 8.6 的证明与本书第一版给出的颇为类似. 但现在的这个定理比较强, 因为它所讨论的商 $\mu(E)/m(E)$ 中, $E$ 取遍任意的 Borel 集的序列而仅仅要求它服从正则性条件 8.2 (1). 早期的处理则有赖于一致正则性条件, 同时也限于 $E$ 是开集. 这些更改是 Jim Serrin 1967 年提醒我的. 当然在多数应用中, $E$ 取的都是一些诸如球、立方体之类很规则的集, 而定理 8.6 的全部威力通常是毋需发挥出来的.

微分法定理的经典性证明要用到 Vitali([28], p. 109)作出的一个相当难的覆盖引理. 此处它的位置为一个几乎是显而易见的引理 8.4 所取代. 这个引理看来首次出现在 Wiener 关于遍历定理的文章中(*Duke Math. J.*, Vol. 5, pp. 1—18, 1939). 注意, 该引理的证明用到 $R^k$ 的一个几何性质. (但是定理 8.6 证明中的余下部分却并不用到它!)

近年来, M. de Guzman 和 B. Rubio (*Am. Math. Monthly*, Vol. 79, pp. 341—348, 1972.) 也采用了另外一些覆盖引理.

E. M. Stein 的书[41]讨论了微分理论其它许多方面的课题.

8.10, 8.11 节 A. S. Besicovitch (*Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 41, pp. 103—110, 1945) 证明了. 若 $\mu$ 是 $R^k$ (对任何 $k>1$) 上的正的

奇异 Borel 测度，则 $\mu$ 的对称导数是 $+\infty$ a. e. [$\mu$]. (为了获得这个结论，在他的定理 3 中取了倒数.) 他也使用了另外一个覆盖引理.

8.19 节. 每一个单调函数 (从而每一个 $f\in BV$) 几乎处处可微的初等证明参看[24]的 pp. 5—9. 在那本书中这个定理作为 Lebesgue 理论的出发点. 由 D. Austin 在 *Proc. Am. Math. Soc.* Vol. 16, pp. 201—221, 1965 中最近所作的证明甚至更为简单.

8.21 节. 参看[16], 定理 260—264, 在那里同一结论已在比较弱的假定之下得到. 注意, 定理8.21的证明仅仅用到 $f$ 的右导数的存在性、可积性及 $f$ 的连续性.

8.26 节. 关于在比较弱的假定之下的证明, 可参看 D. E. Varberg 的论文. (*Am. Math. Monthly*, Vol. 78, pp. 42—45, 1971.)

习题 12. 在 *Proc. Am. Math. Soc.* Vol. 36, p. 308, 1972 中, K. Stromberg 给出了一个非常简单的证明.

## 第 九 章

关于另外一种简短的引论, 可参看[36]第十六章. [33]中有 Plancherel 定理的不同证法. [17]、[19]和[27]中讨论了群论方面的问题及与 Banach 代数的联系. 关于不变子空间 (9.16 节) 的进一步的知识可参看[11]. $L^1$ 中相应问题的现状在[27]第七章有所叙述.

## 第 十 章

一般参考书: [1], [4], [13], [20], [29]和[31].

10.8 节. 积分也可以在任意的可求长曲线上定义. 参看[13], Vol. I的附录 $C$.

10.10 节. 指数这一拓扑概念在[29]中采用了, 并且在[1] 中很完满地使用了它. 定理 10.10 的计算性证明见于[1]的 p. 93.

10.13 节. Cauchy 在附带假设 $f'$ 连续的情况下于 1825 年发表了他的定理. Gousart 指出了这个假设是多余的, 并把定理叙述成了现在这种形式. 进一步的历史评注可参看[13], p. 163.

10.16 节. 幂级数表示以及 $f\in H(\Omega)$ 蕴涵 $f'\in H(\Omega)$ 这一事实的标准证法和本书一样都是通过 Cauchy 积分公式进行的. 最近已经构造出一种利

用环绕数(winding number)而不必借助于积分的证明. 其细节可参考[34].

10.25 节. [26], p. 170 有一个关于复数域的代数完备性的很初等的证明.

10.30 节. (b)这部分的证明见于[40].

10.32 节. 开映射定理及 $Z(f)$ 的离散性是全体非常数全纯函数类的拓扑性质. 这些性质刻画这个函数类直到同胚的程度. 这就是 Stoilov 定理. 参看[34].

10.35 节. Cauchy 定理整体形式这一引人注目的简单, 其初等的证明是由 John D. Dixon 发现的. 见 *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 29, pp. 625—626, 1971. [1]中的证明基于恰当微分的理论. 本书第一版中则是从 Runge 定理推出的. 这种处理更早一些在[29], p. 177 中就已采用了, 然而在那里仅仅是就单连通区域来讨论的.

## 第十一章

一般参考书: [1], 第五章; [20], 第一章.

11.12 节. "非切向"极限在圆上确实是几乎处处存在的. 参看[15], pp. 34—37 和[36], Vol. I, pp. 96—106, 特别是其定理(7.8).

11.17 节. 反射原理曾被 H. A. Schwarz 用来解决关于多边形区域的保形映射问题. 参看[13]的 17.6 节. 这方面的进一步结果由 Carathéodory 得到; 参看[4], Vol. II, pp. 82—92, 以及 *Commentarii Mathematici Helvetici*, Vol. 19, pp. 263—278, 1946—1947.

11.19 节. 这是 Herglotz 作出的, *Leipziger Berichte*, Vol. 63, pp. 501—511, 1911.

11.21 节. 参看 Fatou 的论文 Séries trigonométriques et Séries de Taylor. *Acta Math.*, Vol. 30, pp. 335—400, 1906. 这是将 Lebesgue 积分理论应用于全纯函数方面的问题的第一部主要著作.

## 第十二章

12.7 节. 进一步的例子参看[31], pp. 176—186.

12.11 节. 这个定理就三角级数来说, 首先由 W. H. Young (1912; $q=2, 4, 6, \cdots$)和 F. Hausdorff (1923; $2\leqslant q<\infty$)予以证明. F. Riesz (1923)将

它推广到一致有界的正交集. M. Riesz(1926)从一个一般的内插定理导出了这一推广. 而 G. O. Thorin(1939) 则找出了 M. Riesz 定理的复变量时的证明. 本书的证明是 Carderón-Zygmund(1950) 就 Thorin 的思想作的改写. 其它内插定理的完整的参考文献和讨论可在[36]的第十二章找到.

12.12 节. 一种稍微不同的形式见于 *Duke Math. J.*, Vol. 20, pp. 449—458, 1953.

12.13 节. 这一证明实质上是属于 R. Kaufman 的(*Math. Ann.*, Vol. 169, p. 282, 1963). E. L. Stout(*Math. Ann.*, Vol. 177, pp. 339—340, 1968)得到过一个更强的结果.

## 第十三章

13.9 节. Runge 定理发表于 *Acta Math.*, Vol. 6, 1885. (附带说一句, 关于区间上的多项式一致逼近的 Weierstrass 定理也正是在同一年发表的. 见 *Mathematische Werke*, Vol. 3, pp. 1—37.)与原证明很接近的证明可参看[29], pp. 171—177. 本书的泛函分析证法是分析学者们所熟悉的, 而且近年来可能已多次独立地被发现. 这是 L. A. Rubel 写信告诉我的. 在[13], Vol. II, pp. 299—308 中, 注意的重点是放在当多项式的次数固定时逼近的密切程度上.

习题 5、6. 另外一种方法可参看 D. G. Cantor 的 *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 15, pp. 335—336, 1964.

## 第十四章

一般参考书: [20]. 很多特殊的映射函数在那里叙述得很详尽.

14.3 节. 关于线性分式变换的更多的细节可在下列文献中找到: [1], pp. 22—35; [13], pp. 46—57; [4]; 特别是 L. R. Ford的书 "Automorphic Functions", McGraw-Hill Book Company, New York, 1929, 第一章.

14.5 节. 正规族是由 Montel 引出的. 参看[13]的第十五章.

14.8 节. Riemann 定理的历史探讨见[13], pp. 320—321, 和[29], p. 230. Koebe 的证明 (习题 26) 见 *J. für Math.*, Vol. 145, pp. 177—223, 1915, 那里也讨论双连通区域.

14.10 节. 至今尚未获证的 Bieberbach 猜测是说当 $f\in\mathscr{S}$时, 对任意 $n$,

$|a_n|\leqslant n$. 参看[13], pp. 346—358.

14.18 节之($b$). 这一推证见于[20], p. 179.

14.19 节. 保形映射的边界性态曾由 Carathéodory 在 *Math. Ann.*, Vol. 73, 1913, pp. 323—370 中研究过. 定理 14.19 在那里就 Jordan 曲线围成的区域作了证明, 并且引出了素端点的概念. 也可参看 [4], Vol. II, pp. 88—107.

习题 24. 证明是 Y. N. Moschovakis 作出的.

## 第 十 五 章

15.9 节. 典范积与有限阶整函数之间的关系的讨论可参看 [3] 的第二章; [29]的第七章和[31]的第八章.

15.25 节. 这个方向的进一步结果可参看 Szasz 的 *Math. Ann.*, Vol. 77, pp. 482—496, 1916 以及[21]的第二章.

## 第 十 六 章

关于 Riemann 面的经典著作是[32](初版于 1913 年). 其它参考书有: [1]的第六章; [13]的第十章; [29]的第六章和[30].

16.5 节. Ostrowski 定理见于 *J. London Math. Soc.*, Vol. 1, pp. 251—263, 1926. 关于空隙级数方面的近代论述, 可参看 J. P. Kahane的Lacunary Taylor and Fourier Series. *Bull. Am. Math. Soc.*, Vol. 70, pp. 199—213, 1964.

16.16 节. 单值性定理的处理比本书第一版稍微简单一些. 它用到了这样一个事实, 每个单连通平面区域都同胚于一个凸的单连通区域, 即$U$. 现在的证明是这样安排的, 使它不用修改就能应用于多复变全纯函数. (要注意, 当 $k>2$ 时, $R^k$ 中总存在一个不能同胚于任何凸集的单连通开集; 球壳就提供了这样的实例.)

16.17 节. 参考[13]的第十三章, [29]的第八章和[4]的第七部分.

16.21 节. 在[4]的第七部分中, 借助于模函数证明了 Picard 大定理. "初等"的证明可在[31], pp. 277—284 和[29]的第七章找到.

习题 10. 在 Conformal Invariants and Function-theoretic Null-Sets, *Acta Math.*, Vol. 83, pp. 101—129, 1950 一文中, Ahlfors 和 Beurling 讨论了各种各样可去集的类.

## 第十七章

最普通的参考书是［15］．也可参看［36］的第七章．虽然［15］主要是讨论单位圆盘，但大多数证明都安排得使之能应用于本书所叙述的更广泛一些的场合．这些推广的一部分在［27］的第八章也提出来了．

17.1 节．关于次调和函数的完整论述可参看［22］．

17.13 节．在［15］或者 Helson 和 Lowdenslager 在 *Acta Math.*, Vol. 99, pp. 165—202, 1958 发表的文章中，有不同的证明．

17.14 节．“内函数”和“外函数”这两个名词是 Beurling 在一篇论文中新造出来的．在该文中也证明了定理 17.21．这篇文章是：On Two Problems Concerning Linear Transforma—tions in Hilbert Space. *Acta Math.*, Vol. 81, pp. 239—255, 1949．进一步的发展见［11］．

17.25, 17.26 节．M. Riesz 定理的这一证明由 A. P. Calderón 给出，参看 *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 1, pp. 533—535, 1950．也可参看［36］，Vol. I, pp. 252—262．

习题 3．这形成了在其它区域内 $H^p$ 空间定义的基础．参看 *Trans. Am. Math. Soc.*, Vol. 78, pp. 46—66, 1955.

## 第十八章

一般参考书：［17］，［19］和［23］；也可参看［14］．这一理论是由 Gelfand 于 1941 年开创的．

18.18 节．这是由 P. J. Cohen 在 *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 12, 1961, pp. 159—163 中以初等方式予以证明的．

18.20 节．这个定理属于 Wermer，见 *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 4, pp. 866—869, 1953．本书的证明由 Hoffman和 Singer 给出．参看［15］，pp. 93—94．在那里，也给出了 P. J. Cohen 作出的极简单的证明．（参看 18.18 节所列的文献．）

18.21 节．这是 Wiener 关于他的 Tauber 定理的原始证明中的主要步骤之一．参看［33］，p. 91．本书中给出的不费力的证明乃是 Gelfand 理论的第一个辉煌成果．

习题 14．在集 $\Delta$ 上可以给出一个紧的 Hausdorff 拓扑，使得函数 $\hat{x}$ 关于这个拓扑是连续的．这样 $x\to\hat{x}$ 是 $A$ 到 $C(\Delta)$ 内的一个同态．$A$ 作为连续

函数代数的这一表示在研究交换 Banach 代数时是一个最重要的工具.

## 第十九章

19.2, 19.3 节. [21], pp. 1—13. 也可参看[3]. 在那里指数型函数是讨论的主要对象.

19.5 节. 关于 $C\{M_n\}$ 类的更为详尽的介绍可参看 S. Mandelbrojt, "Séries de Fourier et classes quasi-analytiques," Gauthier-Villars, Paris, 1935.

19.11 节. 在[21]中这一定理的证明是基于定理 19.2而不是定理19.3.

习题 4. 函数$\Phi$称为 $f$ 的 Borel 变式. 见[3], 第五章.

习题 12. 提示性证明是 H. Mirkil 给出的. 见 *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 7, pp. 650—652, 1956. 定理由 Borel 于 1895 年证明.

## 第二十章

参看 S. N. Mergelyan, Uniform Approximations to Functions of a Complex Variable, *Uspehi Mat. Nauk.* (N. S.) 7, no. 2(48), 31—122, 1952; *Amer. Math. Soc. Translation* No. 101, 1954. 本书定理 20.5 即 Mergelyan 论文中的定理 1.4.

近年来, L. Carleson 在 *Math. Scandinavica*, Vol. 15, 1964, pp. 167—175 中发表了一个以测度论研究为基础的泛函分析的证明.

## 附　录

Hausdorff 1914 年在他的书"Grundzüge der Mengenlehre," p. 140 中首次陈述了极大性原理. 本书的证明仿自 Halmos 的书[8] 的第 16 节. 在作出"塔"这一名词的同时, 选择 $g$ 使 $g(A)-A$ 至多有一个元素的想法在那里也出现了. 其证明与良序定理的 Zermelo 证法相类似; 见 *Math. Ann.*, Vol. 65, pp. 107—128, 1908.

# 参 考 书 目

1. L. V. Ahlfors: "Complex Analysis", 2d ed; McGraw-Hill Book Company, New York, 1966. (有中译本:《复分析》, 张立译, 上海科技出版社, 1962年.)
2. S. Banach: Théorie des Opérations linéaires, "Monografje Matematyczne," Vol. 1, Warsaw, 1932.
3. R. P. Boas: "Entire Functions," Academic Press Inc., New York, 1954.
4. C. Carathéodory: "Theory of Functions of a Complex Variable," Chelsea Publishing Company, New York, 1954.
5. N. Dunford and J. T. Schwartz: "Linear Operators," Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
6. P. R. Halmos: "Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity," Chelsea Publishing Company New York, 1951.
7. P. R. Halmos: "Measure Theory," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1950. (有中译本:《测度论》, 王建华译, 科学出版社, 1958年.)
8. P. R. Halmos: "Naive Set Theory," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.
9. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya: "Inequalities," Cambridge University Press, New York, 1934. (有中译本:《不等式》, 越民义译, 科学出版社, 1965年.)
10. G. H. Hardy and W. W. Rogosinski: "Fourier Series," Cambridge Tracts no. 38, Cambridge, London, and New York, 1950.
11. H. Helson: "Lectures on Invariant Subspaces," Academic Press Inc., New York, 1964.

12. E. Hewitt and K. A. Ross: "Abstract Harmonic Analysis, "Springer –Verlag OHG, Berlin, 1963.

13. E. Hille: "Analytic Function Theory, "Ginn and Company, Boston, Vol. I, 1959; Vol. II, 1962.

14. E. Hille and R. S. Phillips: "Functional Analysis and Semigroups," Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, Providence, 1957. (前十二章有中译本:《泛函分析与半群》上册, 吴智泉、王振鹏、刘隆复译, 上海科技出版社, 1964年.)

15. K. Hoffman: "Banach Spaces of Analytic Functions; " Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.

16. H. Kestelman: "Modern Theories of Integration, "Oxford University Press, New York, 1937.

17. L. H. Loomis: "An Introduction to Abstract Harmonic Analysis," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1953.

18. E. J. McShane: "Integration, "Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.

19. M. A. Naimark: "Normed Rings, " Erven P. Noordhoff, NV. Groningen Netherlands, 1959.

20. Z. Nehari: "Conformal Mapping, "McGraw-Hill Book Company, New York, 1952.

21. R. E. A. C. Paley and N. Wiener: "Fourier Transforms in the Complex Domain, " Amer. Math. Soc. Collquium Publ. 19, New York, 1934.

22. T. Rado: "Subhormonic Functions", Ergeb. Math., Vol. 5, no. 1, Berlin, 1937.

23. C. E. Rickart: "General Theory of Banach Algebras, "D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.

24. F. Riesz and B. Sz-Nagy: "Leçons d'Analyse Fonctionnelle," Akadémiai Kiadé, Budapest, 1952. (有中译本:《泛函分析讲义》, 第一分册, 梁文骐译, 科学出版社, 1963年; 第二分册, 庄万等译, 科学出版社, 1980年.)

25. H. L. Royden: "Real Analysis, " The Macmillan Company, New

York, 1963.

26. W. Rudin: "Principles of Mathematical Analysis," 2d ed. McGraw-Hill Book Company, New York, 1964. (有中译本:《数学分析原理》,上、下册,赵慈庚、蒋铎译,人民教育出版社,1979年.)
27. W. Rudin: "Fourier Analysis on Groups," Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.
28. S. Saks: "Theory of the Integral," 2d ed., "Monografje Mathematyczne," Vol. 7, Warsaw, 1937. Reprinted by Hafner Publishing Company, Inc., New York.
29. S. Saks and A. Zygmund: "Analytic Functions," "Monografje Mathematyczne," Vol. 28, Warsaw, 1952.
30. G. Springer: "Introduction to Riemann Surfaces," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1957.
31. E. C. Titchmarsh: "The Theory of Functions," 2d ed., Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1939. (有中译本:《函数论》,吴锦译,科学出版社,1962年.)
32. H. Weyl: "The Concept of a Riemann Surface," 3d ed. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1964.
33. N. Wiener: "The Fourier Integral and Certain of Its Applications," Cambridge University Press, New York, 1933. Reprinted by Dover Publications, Inc., New York.
34. G. T. Whyburn: "Topological Analysis," 2d ed. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1964.
35. J. H. Williamson: "Lebesgue Integration," Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1962.
36. A. Zygmund: "Trigonometric Series," 2d ed., Cambridge University Press, New York, 1959.

## 补充参考书

37. T. Hawkins: "Lebesgue's Theory of Integration," University of Wisconsin Press, Madison, 1970.

38. E. Hewitt and K. Stromberg: "Real and Abstract Analysis," Springer Verlag, New York, 1965.

39. Y. Katznelson: "An Introduction to Harmonic Analysis," John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968.

40. R. Narasimhan: "Several Complex Variables," University of Chicago Press, Chicago, 1971.

41. E. M. Stein: "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions," Princeton University Press, Princeton, 1970.

42. E. M. Stein and G. Weiss: "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces," Princeton University Press, Princeton, 1971.

# 专用和缩写符号一览表[†]



† 标准的集论符号叙述在第 6 页和第 7 页，此处没有列入。

# 索 引

## 一 画



## 二 画



## 三 画



## 四 画

## 五 画

## 七 画

## 八　画

## 九 画

## 十　画

## 十 一 画



## 十 二 画

## 十 三 画



## 十 四 画



## 十 六 画



## 十 八 画

## G



## H



## J



## K



## L

## M



## N



## O



## P



## R

# 说　　明

这本书是由六位同志合译的．李世余译序言和第二、九章，戴牧民译注释和第四、五、十八章，李奕华译第一、十、十六、十九章，陈庆祺译第三、六、七、八、十七章，张耀勋译第十一、十二、十三章，仇焕章译第十四、十五、二十章．最后全书由戴牧民、李奕华校核．

因我们的水平不高，译文会出现不少的缺点和错误，希望读者批评指正．

译　　者